MURRAY R. SPIEGEL, Ph. D.
PROFESSOR DE MATEMÁTICA
RENSSELAER POLYTECHNIC INSTITUTE

MECÂNICA RACIONAL

Resumo da Teoria
720 problemas resolvidos

Tradução
de

FRANCISCO ABRANCHES PINHEIRO
Professor de Mecânica do
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

SÃO PAULO
RIO DE JANEIRO
BELO HORIZONTE
PORTO ALEGRE
RECIFE

NEW YORK • ST. LOUIS • SAN FRANCISCO
AUCKLAND • BOGOTÁ • DÜSSELDORF • JOHANNESBURG
KUALA LUMPUR • LISBOA • LONDON • MADRID • MÉXICO
MONTREAL • NEW DELHI • PANAMÁ • PARIS
SINGAPORE • SYDNEY • TOKYO • TORONTO

DO ORIGINAL
Schaum's Outline of Theory and Problems of
THEORETICAL MECHANICS
with an introduction to
LAGRANGE'S EQUATIONS and HAMILTONIAN THEORY
Publicado nos E. U. A. por McGraw-Hill Book Co.

1979

EDITORA McGRAW-HILL DO BRASIL, LTDA.
MATRIZ: Al. Juruá, 434 - Alphaville - Barueri - SP

FILIAIS:

Rua Tabapuã, 1105
SÃO PAULO
ESTADO DE SÃO PAULO

Av. Paulo de Frontim, 679
RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Av. Bernardo Monteiro, 447
BELO HORIZONTE
MINAS GERAIS

Rua General Lima e Silva, 87
PORTO ALEGRE
RIO GRANDE DO SUL

Av. João de Barros, 1.750 s/11
RECIFE
PERNAMBUCO

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

Prefácio da edição Americana

No século XVII, Sir Isaac Newton formulou as suas famosas leis da mecânica. Essas leis muito simples serviram para descrever e predizer os movimentos dos objetos observáveis no universo, incluindo os planetas de nosso sistema solar.

No começo do século XX, foi descoberto que várias conclusões teóricas derivadas das leis de Newton não estavam de acordo com certas conclusões deduzidas das teorias do eletromagnetismo e fenômenos atômicos, as quais estavam também bem apoiadas experimentalmente. Essas discrepâncias levaram à *mecânica relativística* de Einstein, que revolucionou os conceitos de espaço e tempo, e a *mecânica quântica*. Todavia, a mecânica de Newton, também chamada de *mecânica clássica*, é satisfatória para os objetos que se movem com velocidades muito menores que a da luz e que tenham dimensões comparativamente maiores que os dos átomos e moléculas. Por esta razão, a sua importância fundamental é mantida na ciência e engenharia.

A finalidade deste livro é a de apresentar uma visão da mecânica de Newton e suas aplicações. O livro foi feito para ser utilizado como um suplemento a outros livros textos ou mesmo como um livro texto de um curso de mecânica formal. Ele também deve ser útil a estudantes de física, engenharia, matemática, astronomia, mecânica celeste, aerodinâmica e outros campos que necessitem os princípios básicos da mecânica em suas formulações.

Cada capítulo começa com uma clara exposição das definições pertinentes, princípios e teoremas com as ilustrações necessárias para o seu entendimento. A esta introdução, seguem conjuntos de problemas resolvidos e suplementares. Os problemas resolvidos servem para ilustrar e ampliar a teoria, detalhar alguns pontos sem os quais o estudante se sentirá continuamente sem base, e prover uma repetição dos princípios básicos vitais para um aprendizado efetivo. Numerosas demonstrações de teoremas e suas consequências são incluídas nos problemas resolvidos. O grande número de problemas suplementares com respostas serve como uma revisão completa do material de cada capítulo.

Os tópicos cobertos incluem a dinâmica e a estática da partícula, sistemas de partículas e corpos rígidos. Os métodos vetoriais, com sua notação concisa, chegam aos resultados rapidamente, e a interpretações geométricas e físicas, são introduzidas no início e usados neste livro. Um resumo de vetores é dado no primeiro capítulo e pode ser estudado pelo iniciante ou ser usado como referência conforme surgem as necessidades. Foram adicionados os capítulos de equações de Lagrange e a teoria de Hamilton que nos levam a outras formulações equivalentes da mecânica Newtoniana e que são muito valiosas prática e teoricamente.

Foi incluído muito mais material que o necessário para a maioria dos cursos. Isto foi feito para tornar o livro mais flexível e para se obter um livro mais útil como referência e estimular futuros interesses em alguns dos tópicos.

Eu desejo aproveitar esta oportunidade para agradecer o "staff" da Schaum Publishing Company por sua grande cooperação.

M. R. Spiegel
Rensselaer Polytechnic Institute

Nota do Tradutor

Na tradução da presente obra, procuramos nos cingir o mais exatamente possível à idéia original.

Em princípio, empregamos na tradução somente as unidades previstas na Legislação Metrológica Brasileira. Entretanto, deixamos alguns problemas com as unidades inglesas, já que é incontestável a sua influência em nossa literatura técnica.

Para a tradução de termos técnicos foram adotados os mais usados em cada especialidade, mediante consulta a professores e profissionais. Estamos certos que o procedimento adotado é o que melhor atende às necessidades do estudante brasileiro.

Agradecemos as sugestões durante a tradução e antecipadamente a todos aqueles que nos possam apontar falhas, de modo que, nas próximas edições, seja cada vez menor o número de imperfeições.

Francisco Abranches Pinheiro
Instituto Tecnológico de Aeronáutica

Sumário

Capítulo 1

Vetores, Velocidade e Aceleração

MECÂNICA, CINEMÁTICA, DINÂMICA E ESTÁTICA

Mecânica é um ramo da Física que estuda o movimento ou mudança de posição de objetos físicos. Ela é, algumas vezes, subdividida em:

1. *Cinemática*, que consiste no estudo da geometria do movimento;
2. *Dinâmica*, que consiste no estudo das causas físicas do movimento;
3. *Estática*, que consiste no estudo das condições em que não há movimento aparente.

AXIOMAS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA

Um desenvolvimento dos axiomas da Mecânica, como em qualquer ciência, deve conter as idéias básicas:

1. *Termos não definidos ou conceitos.* Isto é obviamente necessário, pois as definições básicas devem basear-se em alguma coisa que permaneça não definida.
2. *Afirmações não provadas.* Estas são afirmações fundamentais, usualmente em forma matemática, que se espera levar a descrições básicas de fenômenos sob estudo. Em geral, estes estudos, chamados de *axiomas* ou *postulados*, são baseados em observações experimentais ou suas abstrações. Em tais casos, são denominados *leis.*
3. *Termos definidos ou conceitos.* Estas *definições* são dadas usando os termos indefinidos ou conceitos.
4. *Afirmações provadas.* Estas são, geralmente, chamadas de *teoremas* e são provadas a partir das definições e axiomas.

Um exemplo do "modo de pensar axiomático" pode ser visto na *Geometria Euclidiana*, onde ponto e linha são conceitos não-definidos.

MODELOS MATEMÁTICOS

Uma descrição matemática de fenômenos físicos é, geralmente, simplificada, trocando-se os objetos físicos reais por *modelos matemáticos* condizentes. Por exemplo, ao se descrever a rotação da Terra em torno do Sol, pode-se considerar a Terra e o Sol como pontos, para muitos fins práticos.

ESPAÇO, TEMPO E MATÉRIA

Da experiência dia a dia, tem-se alguma idéia do significado de cada um dos seguintes termos ou conceitos. Entretanto, achar-se-ia difícil certamente formular

definições completamente satisfatórias. Consideram-se estes termos como conceitos não-definidos.

1. *Espaço.* Isto está relacionado de perto com os conceitos de *ponto*, *posição*, *direção* e *deslocamento*. Medida no espaço envolve os conceitos de *comprimento* ou *distância*, que se admitem informalmente. Unidades de comprimento são o metro, o centímetro etc. Neste livro, considera-se que o espaço seja *euclidiano*, i.e., o espaço da *Geometria de Euclides*.

2. *Tempo.* Este conceito deriva-se da experiência de se ter um *evento* após, antes ou simultaneamente com outro *evento*. Medida do tempo é obtida, por exemplo, com o uso de relógios. Unidades de tempo são o segundo, a hora, o ano, etc.

3. *Matéria.* Objetos físicos são compostos de "pequenas porções de matéria" tais como os átomos e moléculas. Assim se chega ao conceito de um objeto material chamado *partícula*, que pode ser considerado como ocupando um ponto no espaço e, talvez, movendo com o tempo. Uma medida de "quantidade de matéria" associada a uma partícula é chamada de sua *massa*. Unidades de massa são gramas, quilogramas, etc. A menos que haja afirmação em contrário, será admitido que a massa de uma partícula não muda com o tempo.

Comprimento, massa e tempo são, geralmente, chamados *dimensões*, a partir das quais outros valores físicos são construídos. Para uma discussão de unidades e dimensões, veja o Apêndice A.

ESCALARES E VETORES

Vários valores da Física, tais como comprimento, massa e tempo requerem, para sua especificação, um simples número real (além das unidades de medida que são escolhidas antes). Tais valores denominam-se *escalares* e o número real é chamado *magnitude* do valor. Um escalar é representado analiticamente por uma letra, tal como t, m, etc.

Outros valores físicos, tal como deslocamento, requerem, para a sua especificação uma *direção*, além da magnitude. Tais valores chamam-se *vetores*. Um vetor é representado analiticamente por uma letra em negrito, como **A** na fig. 1.1. Geometricamente, ela é representada por uma seta PQ, onde P é chamado *ponto inicial* e Q, *ponto terminal*. A magnitude ou comprimento do vetor é, então, representado por $|\mathbf{A}|$ ou A.

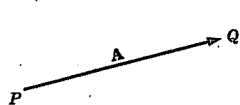
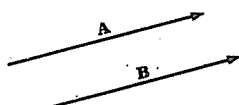
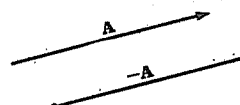



Fig. 1-1 Fig. 1-2 Fig. 1-3

ÁLGEBRA VETORIAL

As operações de adição, subtração e multiplicação da álgebra dos números reais são extensíveis à álgebra de vetores, com definições adequadas.

As definições seguintes são fundamentais:

1. Dois vetores **A** e **B** são iguais, se eles tiverem a mesma magnitude e direção, independentemente de seus pontos iniciais. Assim, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ na fig. 1-2.

2. Um vetor, tendo direção oposta à do vetor **A**, mas com o mesmo comprimento, é representado por $-\mathbf{A}$, como na fig. 1-3.

3. A *soma* ou *resultante* dos vetores **A** e **B** da fig. 1-4 (*a*), é um vetor **C** formado pela colocação do ponto inicial de **B** no ponto final de **A** e ligando-se o ponto inicial de **A** ao ponto terminal de **B** [veja a fig. 1-4(*b*) abaixo]. Escreve-se $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Esta definição é equivalente à *lei do paralelogramo* para adição de vetores como é indicada na fig. 1-4(*c*).

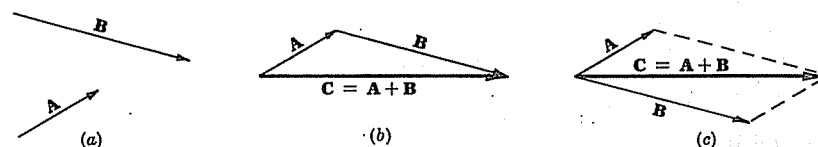



Fig. 1-4

A generalização para soma de mais de dois vetores é imediata. Por exemplo, a fig. 1-5 mostra como obter a soma ou resultante **E** dos vetores **A**, **B**, **C** e **D**.

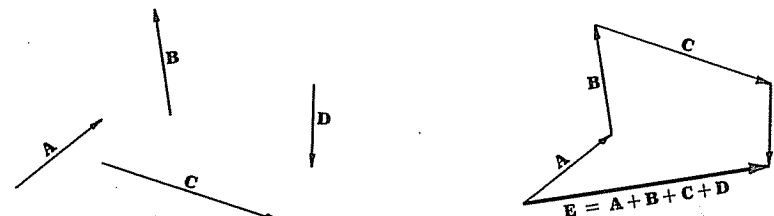



Fig. 1-5

4. A *diferença* de vetores **A** e **B** representada por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é o vetor **C** que, somado a **B**, dá **A**. Equivalentemente, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ pode ser definido como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é definido como sendo o *zero* ou o *vetor zero*, representado por **0**. Este tem a magnitude de zero, mas sua direção não é definida.

5. O *produto* de um vetor **A** por um escalar p é um vetor $p\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}p$ com magnitude $|p|$ vezes a magnitude de **A** e direção a mesma ou oposta à de **A**, conforme p for positivo ou negativo. Se $p = 0$, $p\mathbf{A} = \mathbf{0}$, o vetor zero.

LEIS DA ÁLGEBRA VETORIAL

Se **A**, **B** e **C** são vetores, p e q escalares, então

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$	Lei comutativa para a adição
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$	Lei associativa para a adição
3. $p(q\mathbf{A}) = (pq)\mathbf{A} = q(p\mathbf{A})$	Lei associativa para a multiplicação
4. $(p + q)\mathbf{A} = p\mathbf{A} + q\mathbf{A}$	Lei distributiva
5. $p(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = p\mathbf{A} + p\mathbf{B}$	Lei distributiva

Note que, nestas leis, somente é definida a multiplicação de um vetor por um ou mais escalares.

VETORES UNITÁRIOS

Os vetores que tenham um comprimento unitário são chamados de *vetores unitários.* Se **A** é um vetor com comprimento $A > 0$, então $\mathbf{A}/A = \mathbf{a}$ é um vetor unitário, que tem a mesma direção de **A** e $\mathbf{A} = A \cdot \mathbf{a}$.

VETORES UNITÁRIOS RETANGULARES

Os vetores unitários retangulares **i**, **j** e **k** são vetores unitários perpendiculares entre si, tendo as direções dos eixos positivos x, y e z respectivamente, de um sistema de coordenadas retangulares, [veja a fig. 1-6]. São sempre usados os sistemas de coordenadas retangulares da regra da mão direita, a menos indicação em contrário. Tais sistemas têm o seu nome derivado do fato de que uma rosca direita, girando 90° de Ox para Oy ela avança na direção de z. Em geral, diz-se que três vetores **A**, **B** e **C**, que tenham os pontos iniciais coincidentes e que não sejam coplanares, têm a forma do *sistema da mão direita* ou *sistema destro* se uma rosca direita, girando de um ângulo menor que 180° de **A** para **B**, avançará na direção **C** [veja a fig. 1-7].

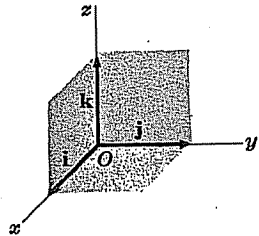



Fig. 1-6

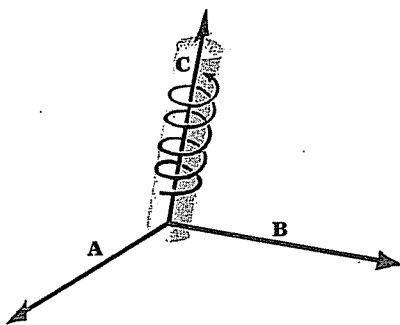
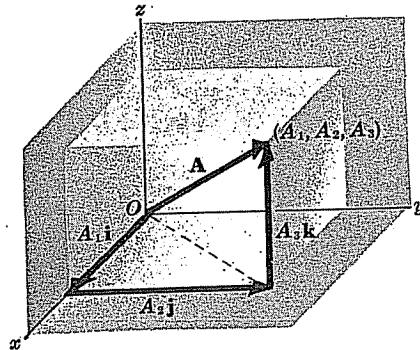



Fig. 1-7 **Fig. 1-8**

COMPONENTES DE UM VETOR

Um vetor qualquer **A** pode ser representado em três dimensões com ponto inicial na origem O do sistema de coordenadas retangulares [veja a fig. 1-8]. Sejam (A_1, A_2, A_3) as coordenadas retangulares da ponta final do vetor **A** com ponto inicial em O. Os vetores $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ e $A_3\mathbf{k}$ são chamados *vetores componentes retangulares* ou simplesmente *vetores componentes* de **A** nas direções x, y e z, respectivamente. A_1, A_2 e A_3 são chamados *componentes retangulares* ou simplesmente *componentes*, de **A** nas direções x, y e z, respectivamente.

A soma ou resultante de $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ e $A_3\mathbf{k}$ é o vetor **A**, tal que se possa escrever

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \tag{1}$$

a magnitude de **A** é $$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \tag{2}$$

Em particular, o *vetor posição* ou o *vetor raio* **r** de O ao ponto (x, y, z) é escrito como sendo

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{3}$$

e tem uma magnitude $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

PRODUTO ESCALAR

O produto escalar de dois vetores **A** e **B**, representado por $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (leia-se **A** ponto **B**) é definido como o produto das magnitudes de **A** e **B** e o co-seno do ângulo entre eles. Em símbolos,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi \tag{4}$$

Note que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é um escalar e não um vetor.

As seguintes leis são válidas:

1. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ Lei comutativa para produto escalar
2. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ Lei distributiva
3. $p(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (p\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (p\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})p$, onde p é um escalar
4. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$
5. $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = B^2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$$

6. Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ e A e B não sendo nulos, então **A** e **B** são perpendiculares entre si.

PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial de **A** e **B** é um vetor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (leia-se **A** vezes **B**). A magnitude de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é definida como o produto das magnitudes de **A** e **B** e o seno do ângulo entre eles. A direção do vetor $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é perpendicular ao plano de **A** e **B** e tal que **A**, **B** e **C** formam um sistema retangular segundo a regra da mão direita. Em símbolos,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \operatorname{sen}\theta \cdot u, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{5}$$

onde u é um vetor unitário que indica a direção de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ou se **A** é paralelo a **B**, então $\operatorname{sen}\theta = 0$ e define-se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$.

As seguintes leis são válidas:

1. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ (A lei comutativa não é válida para o produto vetorial)
2. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ Lei distributiva

3. $p(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (p\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (p\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})p$, onde p é um escalar
4. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
5. Se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, então

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

6. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ = a área de um paralelogramo de lados **A** e **B**.
7. Se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ e **A** e **B** não são vetores nulos, então **A** e **B** são paralelos.

PRODUTOS TRIPLOS

O *produto escalar triplo* é definido como sendo

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{6}$$

onde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Ele representa o volume de um paralelepípedo, tendo como lados **A**, **B** e **C**, ou o volume negativo dele se **A**, **B** e **C** formarem ou não um sistema pela regra da mão direita respectivamente. Tem-se $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

O *produto vetorial triplo* é definido como sendo

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \tag{7}$$

Como $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\mathbf{A}$, é claro que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.

DERIVADAS DE VETORES

Se a cada valor assumido por uma variável escalar u corresponder um vetor $\mathbf{A}(u)$, ou simplesmente **A**, então $\mathbf{A}(u)$ é chamado vetor função de u. A derivada de $\mathbf{A}(u)$ é definida como

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u + \Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} \tag{8}$$

desde que o limite exista. Se $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$, então

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \frac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{du}\mathbf{k} \tag{9}$$

Igualmente, podem-se definir derivadas de ordem maior. Por exemplo, a derivada segunda de $\mathbf{A}(u)$, se existir, é dada por

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = \frac{d^2A_1}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2A_2}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2A_3}{du^2}\mathbf{k} \tag{10}$$

Exemplo. Se $\mathbf{A} = (2u^2 - 3u)\mathbf{i} + 5\cos u\,\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$, então

$$\frac{d\mathbf{A}}{du} = (4u - 3)\mathbf{i} - 5\,\text{sen}\,u\,\mathbf{j} - 3\cos u\,\mathbf{k}, \qquad \frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = 4\mathbf{i} - 5\cos u\,\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\,u\,\mathbf{k}$$

As regras usuais da diferenciação no cálculo comum podem ser estendidas aos vetores, embora a ordem dos fatores nos produtos possa ser importante. Por exemplo, se $\phi(u)$ é uma função escalar, enquanto $\mathbf{A}(u)$ e $\mathbf{B}(u)$ são funções vetores, então

$$\frac{d}{du}(\phi\mathbf{A}) = \phi\frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\mathbf{A} \tag{11}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \tag{12}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B} \tag{13}$$

INTEGRAIS DE VETORES

Seja $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$ um vetor função de u. Define-se a *integral indefinida* de $\mathbf{A}(u)$ como

$$\int \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{i}\int A_1(u)\,du + \mathbf{j}\int A_2(u)\,du + \mathbf{k}\int A_3(u)\,du \tag{14}$$

Se existir uma função vetor $\mathbf{B}(u)$ tal que $\mathbf{A}(u) = \frac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}$, então

$$\int \mathbf{A}(u)\,du = \int \frac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}\,du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c} \tag{15}$$

onde **c** é um vetor constante e arbitrário independente de u. A *integral definida*, entre os limites $u = \alpha$ e $u = \beta$ é, em tal caso, dada por

$$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}(u)\,du = \int_\alpha^\beta \frac{d}{du}\{\mathbf{B}(u)\}\,du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c}\Big|_\alpha^\beta = \mathbf{B}(\beta) - \mathbf{B}(\alpha) \tag{16}$$

como no cálculo elementar. A integral definida pode também ser definida como limite de uma soma análoga à do cálculo elementar.

VELOCIDADE

Considere que uma partícula se mova ao longo da trajetória C [veja a fig. 1-9]. Seja o vetor posiçao do ponto P no instante t, o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, enquanto que o vetor posição do ponto Q no instante $t + \Delta t$ é $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Então, a *velocidade* (também chamada de *velocidade instantânea*) da partícula em P é dada por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{17}$$

e é um vetor tangente a C em P.

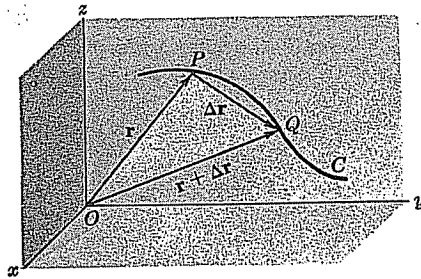



Fig. 1-9

Se $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, pode-se escrever.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{18}$$

A magnitude da velocidade é chamada de *módulo da velocidade* e é dada por

$$v = |\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} \tag{19}$$

onde s é o *comprimento de arco* ao longo de C, medido a partir de um ponto inicial até P.

ACELERAÇÃO

Se $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ é a velocidade da partícula, define-se a *aceleração* (também chamada de *aceleração instantânea*) da partícula em P como

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} \tag{20}$$

Em termos de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a aceleração é

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \tag{21}$$

e sua magnitude,

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \tag{22}$$

VELOCIDADE RELATIVA E ACELERAÇÃO

Se duas partículas P_1 e P_2 estão se movendo com velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e acelerações $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ respectivamente, os vetores

$$\mathbf{v}_{P_2/P_1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{P_2/P_1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \tag{23}$$

são chamados, respectivamente, *velocidade relativa* e *aceleração relativa* de P_2 em relação a P_1.

ACELERAÇÃO TANGENCIAL E NORMAL

Considere que a partícula P com o vetor posição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, se mova ao longo da curva C [fig. 1-10]. Pode-se considerar um sistema de coordenadas retangulares movendo-se com a partícula e definida pelo *vetor unitário* **T** *tangente*, pelo *vetor* **N** *normal* e pelo *vetor unitário* **B** *binormal* à curva C, onde

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{N} = R\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \tag{24}$$

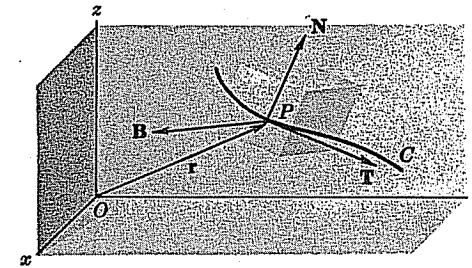



Fig. 1-10

s sendo o comprimento do arco a partir de um ponto inicial qualquer a P e R o *raio de curvatura* de C em P. O recíproco do *raio de curvatura* é chamado de *curvatura* e é dado por $\kappa = 1/R$.

Pode-se mostrar que [veja probl. 1.35] a aceleração ao longo de C é dada por

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N} \tag{25}$$

O primeiro e o segundo termos da direita são chamados de *aceleração tangencial* e *normal* ou *centrípeta*, respectivamente.

MOVIMENTO CIRCULAR

Considere a partícula P movendo-se em um círculo C de raio R. Se s é o comprimento do arco medido ao longo de C, de A a P, e θ é o ângulo subentendido correspondente, com centro em O, então $s = R\theta$. Assim, as magnitudes da velocidade e aceleração tangencial são dadas, respectivamente, por

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{26}$$

e

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \tag{27}$$

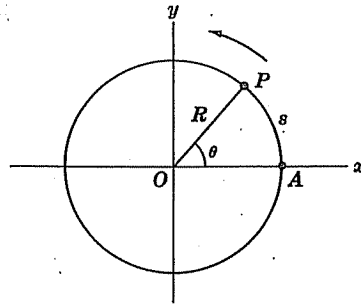



Fig. 1-11

Chama-se a $\omega = d\theta/dt$ e a $\alpha = d^2\theta/dt^2$ de *velocidade angular* e *aceleração angular*, respectivamente. A aceleração normal, como é vista em (25), é dada por $v^2/R = \omega^2 R$.

NOTAÇÃO PARA AS DERIVADAS TEMPORAIS

Algumas vezes, será conveniente usar pontos sobre os símbolos para representar as derivadas em relação ao tempo t, um ponto para a primeira derivada, dois para a segunda derivada, etc. Assim, por exemplo, $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2$, $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$, etc.

GRADIENTE, DIVERGENTE E ROTACIONAL

Se, a cada ponto (x, y, z) de um sistema de coordenadas retangulares, corresponder um vetor $\mathbf{A}$, diz-se que $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ é uma *função vetor* de x, y, z. Chama-se, também, $\mathbf{A}(x, y, z)$ de *vetor campo*. Igualmente, chama-se a função (escalar) $\phi(x, y, z)$ de *escalar campo*.

É conveniente considerar-se um operador vetor diferencial chamado *delta* dado por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{28}$$

Usando isto, definem-se os seguintes valores importantes.

1. *Gradiente*

$$\nabla\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{29}$$

Êste é um vetor chamado *gradiente* de ϕ e é também escrito como grad ϕ.

2. *Divergente*

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \tag{30}$$

Este é um escalar chamado *divergente* de A e é também escrito como div A.

3. *Rotacional*

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{31}$$

Este é um vetor chamado *rotacional* de A e é também escrito como rot A. Duas identidades importantes são

$$\text{div. rot. } \mathbf{A} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0 \tag{32}$$

$$\text{rot. grad. } \phi = \nabla\times(\nabla\phi) = 0 \tag{33}$$

INTEGRAIS DE LINHA

Seja $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, onde $\mathbf{r}(t)$ é o vetor posição de (x, y, z), define a curva C que liga os pontos P_1 e P_2 correspondentes à $t = t_1$ e $t = t_2$ respectivamente. Seja $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ um vetor função da posição (vetor campo). A integral da componente tangencial de $\mathbf{A}$ ao longo de C de P_1 a P_2, escrita como

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \tag{34}$$

é um exemplo de uma *integral de linha*.

Se C é uma curva fechada (que será considerada como uma curva que não se intersecciona em nenhum ponto), então a integral é, geralmente, representada por

$$\oint_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz \tag{35}$$

Em geral, uma integral de linha tem um valor que depende da trajetória. Para os métodos de sua avaliação, veja os probls. 1.39 e 1.40.

INDEPENDÊNCIA DA TRAJETÓRIA

A integral de linha (34) será independente da trajetória, que liga P_1 e P_2 se, e somente se, $\mathbf{A} = \nabla\phi$, ou, equivalentemente, $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Em tal caso, o seu valor é dado por

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \tag{36}$$

considerando que as coordenadas de P_1 e P_2 sejam (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), respec-

tivamente, e que $\phi(x, y, z)$ tenha derivadas parciais contínuas. A integral (35) neste caso é nula.

VETORES LIVRES DESLIZANTES E LIGADOS

Até agora, foram usados vetores que eram especificados somente pela sua magnitude e direção. Tais vetores são chamados *vetores livres*. Dois vetores livres quaisquer são iguais, desde que tenham a mesma magnitude e direção [veja a fig. 1-12(*a*)].

(a) vetores livres iguais (b) vetores deslizantes iguais (c) vetor ligado

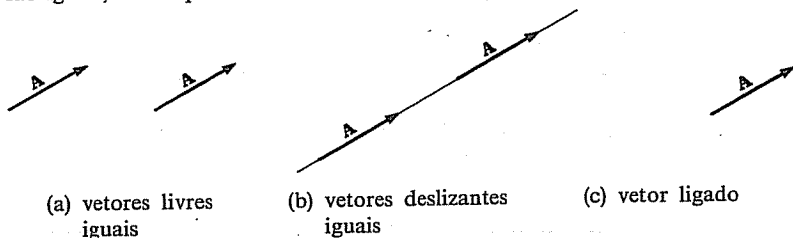



Fig. 1-12

Algumas vezes, na prática, certa *linha de ação* de um vetor é importante. Em tal caso, dois vetores são iguais se, e somente se, eles tiverem a mesma magnitude, direção e linha de ação. Tais vetores são, geralmente, chamados de *vetores deslizantes* [veja a fig. 1-12(*b*)].

Por vezes, é importante especificar o *ponto de ação* de um vetor. Esse vetor [veja a fig. 1-12(*c*)] é chamado *vetor ligado*. Neste caso, dois vetores serão iguais se, e sòmente se, eles forem idênticos.

Na maior parte dos casos, encontram-se vetores livres. Onde vetores deslizantes e vetores ligados forem usados, êles serão explicitados pelo contexto.

Problemas Resolvidos

ÁLGEBRA VETORIAL

1.1. Mostre que a adição de vetores é comutativa, i.e., $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Veja a fig. 1-13.

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

e

$$\mathbf{OR} + \mathbf{RQ} = \mathbf{OQ} \quad \text{ou} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

Então, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

1.2. Mostre que a adição de vetores é associativa, i.e., $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$. Veja a fig. 1-14.

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PQ} = \mathbf{OQ} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad \text{e} \quad \mathbf{PQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{PR} = (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Como

$$\mathbf{OP} + \mathbf{PR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D}$$

$$\mathbf{OQ} + \mathbf{QR} = \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{i.e.} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}$$

tem-se $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

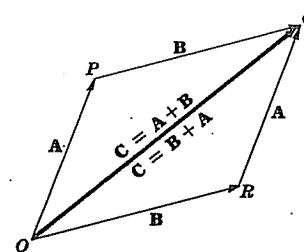



Fig. 1-13

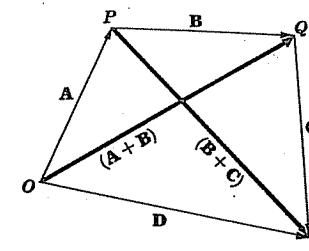



Fig. 1-14

A extensão dos resultados dos probls. 1.1 e 1.2 mostra que a ordem da adição de qualquer número de vetores é imaterial.

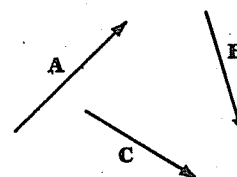
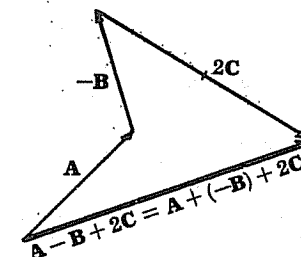
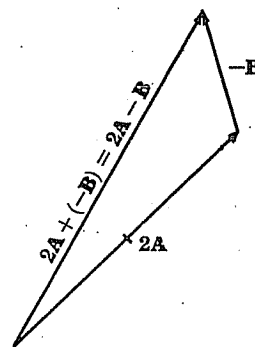
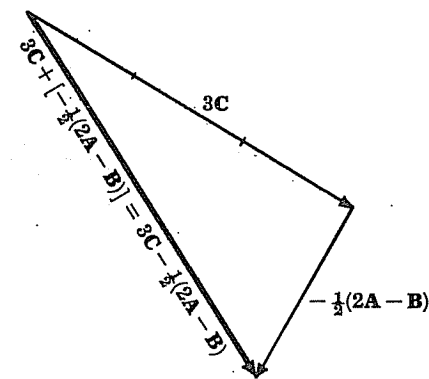
1.3. Dados os vetores **A**, **B** e **C** [fig. 1-15(*a*)] construa (*a*) $\mathbf{A}-\mathbf{B}+2\mathbf{C}$, (*b*) $3\mathbf{C}-\frac{1}{2}(2\mathbf{A}-\mathbf{B})$.

(*a*)

(*b*)

(*c*)

(*d*)

Fig. 1-15

1.4. Prove que a magnitude A do vetor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ é $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$. Veja a fig. 1-16.

Pelo teorema de Pitágoras,

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

onde $\overline{OP}$ representa a magnitude do vetor **OP**, etc. Igualmente, $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.

Então, $(\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2$

ou $$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \quad \text{i.e.} \quad A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

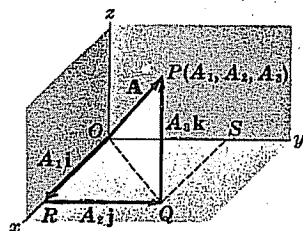



Fig. 1-16

1.5. Determine o vetor que tenha o ponto inicial $P(x_1, y_1, z_1)$ e o ponto final $Q(x_2, y_2, z_2)$ e ache a sua magnitude. Veja a fig. 1-17.

O vetor posição de P é

$$\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}.$$

O vetor posição de Q é

$$\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}.$$

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ ou

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

Magnitude de $\mathbf{PQ} = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Note que esta é a distância entre os pontos P e Q.

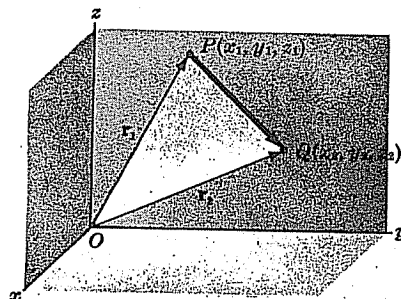



Fig. 1-17

1.6. Ache (*a*) graficamente e (*b*) analiticamente a soma ou a resultante dos seguintes deslocamentos: **A**, 10m a noroeste; **B**, 20m a 30° ao norte do este; *C*, 35m ao sul. Veja a fig. 1.18

Graficamente

No ponto final de **A**, coloca-se o ponto inicial de **B**. No ponto final de **B**, coloca-se o ponto inicial de **C**.

A resultante **D** é formada, ligando-se o ponto inicial de **A** ao ponto final de **C**, i.e., **D** = **A** + **B** + **C**.

Analiticamente

Da fig. 1-18, se **i** e **j** são os vetores unitários nas direções E e N, tem-se

$$\mathbf{A} = -10\cos 45°\,\mathbf{i} + 10\,\text{sen}\,45°\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{B} = 20\cos 30°\,\mathbf{i} + 20\,\text{sen}\,30°\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{C} = -35\mathbf{j}$$

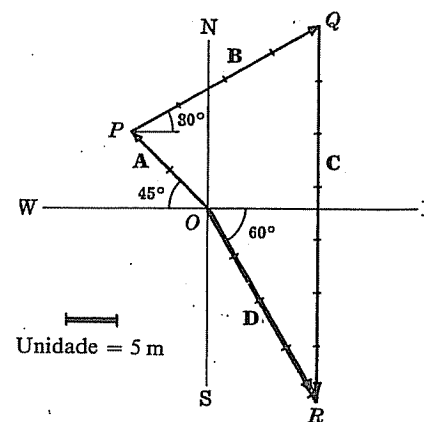



Fig. 1-18

Então, a resultante é

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (-10\cos 45° + 20\cos 30°)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,45° + 20\,\text{sen}\,30° - 35)\mathbf{j}$$
$$= (-5\sqrt{2} + 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10 - 35)\mathbf{j} = 10{,}25\mathbf{i} - 17{,}93\mathbf{j}$$

Assim, a magnitude de **D** é $\sqrt{(10{,}25)^2 + (17{,}93)^2} = 20{,}65$m e a direção é

$$\text{tg}^{-1}\,17{,}93/10{,}25 = \text{tg}^{-1}\,1{,}749 = 60°\,45' \text{ ao sul de este.}$$

Note que, embora os resultados gráfica e analiticamente concordem muito bem, o resultado analítico é, naturalmente, mais acurado.

O PRODUTO ESCALAR

1.7. Prove que a projeção de **A** sobre **B** é igual a **A** · **b**, onde **b** é um vetor unitário na direção de **B**.

Pelos pontos inicial e final de **A** passam planos perpendiculares a **B** em G e H, respectivamente, como se vê na fig. 1-19, abaixo; então,

Projeção de **A** sobre $\mathbf{B} = \overline{GH} = \overline{EF} = A\cos\phi = \mathbf{A}\cdot\mathbf{b}$.

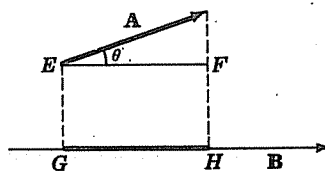



Fig. 1-19

1.8. Prove que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$.

Seja **a** um vetor unitário na direção de **A**; então, [veja a fig. 1-20].

Projeção de $(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ sobre **A** = projeção de **B** sobre **A** + projeção de **C** sobre **A**.

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{a}$$

Multiplicando por A,

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot A\mathbf{a} = \mathbf{B}\cdot A\mathbf{a} + \mathbf{C}\cdot A\mathbf{a}$$

e

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$$

Então, pela lei comutativa para produtos escalares,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

e, assim, a lei distributiva é válida.

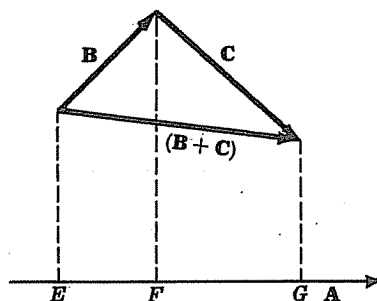



Fig. 1-20

1.9. Ache o valor dos seguintes itens:

(*a*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{i}|\cos 0° = (1)(1)(1) = 1$

(*b*) $\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{k}|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

(*c*) $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{j}|\cos 90° = (1)(1)(0) = 0$

(*d*) $\mathbf{j}\cdot(2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0 - 3 + 0 = -3$

(*e*) $(2\mathbf{i}-\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 2\mathbf{i}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) - \mathbf{j}\cdot(3\mathbf{i}+\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + 2\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} - 3\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}$
$= 6 + 0 - 0 - 0 = 6$

1.10. Se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, prove que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k})\\ &= A_1\mathbf{i}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j}\cdot(B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}) + A_3\mathbf{k}\cdot(B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k})\\ &= A_1B_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\cdot\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\cdot\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}\\ &\quad + A_3B_1\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\cdot\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}\\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\end{aligned}$$

pois $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$ e todos os outros produtos escalares são nulos.

1.11. Se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, mostre que $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A)(A)\cos 0° = A^2$. Então, $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$.

Também, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})\cdot(A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$
$= (A_1)(A_1) + (A_2)(A_2) + (A_3)(A_3) = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

pelo probl. 1.10, tomando $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Então, $A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$ é a magnitude de **A**. Algumas vezes, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$ é escrito como $\mathbf{A}^2$.

1.12. Ache o ângulo agudo entre as diagonais de um quadrilátero que tenha vértices em (0, 0, 0), (3, 2, 0), (4, 6, 0), (1, 3, 0) [fig. 1-21].

Tem-se $\mathbf{OA} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{OB} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{OC} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ de onde

$$\mathbf{CA} = \mathbf{OA} - \mathbf{OC} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

Então,
$$\mathbf{OB}\cdot\mathbf{CA} = |\mathbf{OB}|\,|\mathbf{CA}|\cos\theta$$

i.e.,

$$(4\mathbf{i} + 6\mathbf{j})\cdot(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \sqrt{(4)^2 + (6)^2}\,\sqrt{(2)^2 + (-1)^2}\cos\theta$$

de onde $\cos\theta = 2/(\sqrt{52}\sqrt{5}) = 0{,}1240$ e $\theta = 82°\,53'$.

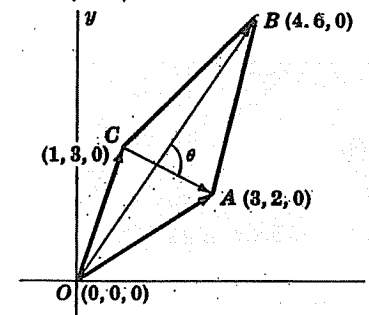



Fig. 1-21

PRODUTO VETORIAL

1.13. Prove que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

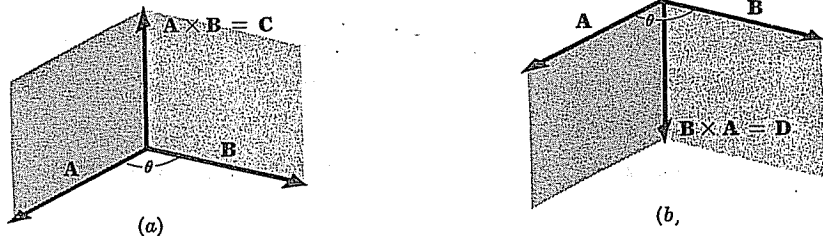



Fig. 1-22

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$ tem magnitude AB sen ϕ e direção tal que **A**, **B** e **C** formem um sistema pela regra da mão direita [fig. 1-22(*a*)].

$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{D}$ tem magnitude BA sen ϕ e direção tal que **B**, **A** e **D** formem um sistema pela regra da mão direita [fig. 1-22(*b*)].

Então, **D** tem a mesma magnitude que **C**, mas em direção oposta, i.e., $\mathbf{C} = -\mathbf{D}$ ou $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$.

A lei comutativa para produto vetorial não é válida.

1.14. Prove que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

para o caso onde **A** é perpendicular a **B** e também a **C**.

Como **A** é perpendicular a **B**, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ é um vetor perpendicular ao plano de **A** e **B** e tem magnitude AB sen $90° = AB$ ou magnitude de $A\mathbf{B}$. Isto é equivalente a multiplicar o vetor **C** por A e girar o vetor resultante de 90° para a posição mostrada.

De maneira idêntica, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ é o vetor obtido pela multiplicação $\mathbf{B} + \mathbf{C}$ por A e girar o vetor resultante de 90° para a posição mostrada.

Como $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ é a diagonal do paralelogramo com $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ como lados, tem-se $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

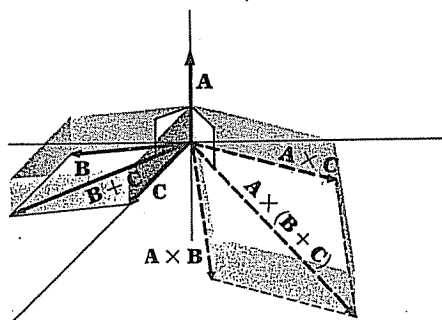



Fig. 1-23

1.15. Prove que $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ no caso geral em que **A**, **B** e **C** não sejam coplanares. Veja a fig. 1-24.

Divida **B** em dois vetores componentes, um perpendicular a **A** e outro paralelo a **A**, represente-os por $\mathbf{B}_\perp$ e $\mathbf{B}_\parallel$, respectivamente. Então, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$.

Se θ é o ângulo entre **A** e **B**, então $B_\perp = B$ sen θ. Assim, a magnitude de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ é AB sen θ, a mesma que a de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Também, a direção de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp$ é a mesma que a de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$. Assim, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Igualmente, se **C** for dividido em dois vetores componentes $\mathbf{C}_\parallel$ e $\mathbf{C}_\perp$, paralelo e perpendicular a **A**, respectivamente, então $\mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$.

Também, como $\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\perp + \mathbf{C}_\parallel = (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) + (\mathbf{B}_\parallel + \mathbf{C}_\parallel)$ segue-se que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

Agora, $\mathbf{B}_\perp$ e $\mathbf{C}_\perp$ são vetores perpendiculares a **A** e, assim, pelo probl. 1.14,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}_\perp + \mathbf{C}_\perp) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_\perp + \mathbf{A} \times \mathbf{C}_\perp$$

Então,
$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

e a lei distributiva se mantém. Multiplicando por -1 e usando o probl. 1.13 isto fica $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}$. Note que a ordem dos fatores em produto vetorial é importante. As leis comuns da Álgebra aplicam-se, somente se a ordem própria for mantida.

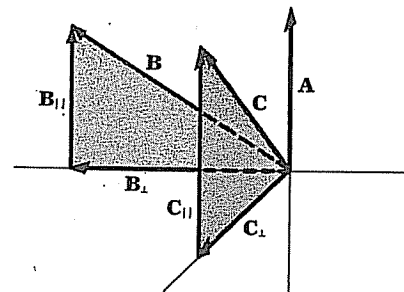



Fig. 1-24

1.16. Se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, prove que

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}) \times (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1\mathbf{i} \times (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) + A_2\mathbf{j} \times (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&\quad + A_3\mathbf{k} \times (B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}) \\
&= A_1B_1\mathbf{i}\times\mathbf{i} + A_1B_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + A_1B_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + A_2B_1\mathbf{j}\times\mathbf{i} + A_2B_2\mathbf{j}\times\mathbf{j} + A_2B_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} \\
&\quad + A_3B_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + A_3B_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + A_3B_3\mathbf{k}\times\mathbf{k} \\
&= (A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

1.17. Se $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, ache $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

1.18. Prove que a área de um paralelogramo com lados $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

$$\text{Área do paralelogramo} = h|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|\,\text{sen}\,\theta\,|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$$

Note que a área do triângulo com lados $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é $\frac{1}{2}|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$.

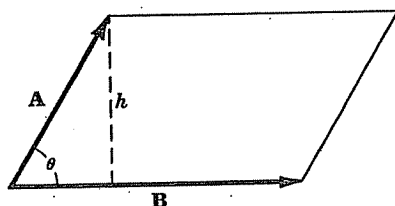



Fig. 1-25

1.19. Ache a área do triângulo com vértices em $P(2, 3, 5)$, $Q(4, 2, -1)$, $R(3, 6, 4)$.

$$\mathbf{PQ} = (4-2)\mathbf{i} + (2-3)\mathbf{j} + (-1-5)\mathbf{k} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}-6\mathbf{k}$$
$$\mathbf{PR} = (3-2)\mathbf{i} + (6-3)\mathbf{j} + (4-5)\mathbf{k} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

$$\text{Área do triângulo} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{PQ}\times\mathbf{PR}| = \tfrac{1}{2}|(2\mathbf{i}-\mathbf{j}-6\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k})|$$
$$= \tfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}\right| = \tfrac{1}{2}|19\mathbf{i}-4\mathbf{j}+7\mathbf{k}|$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(19)^2+(-4)^2+(7)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{426}$$

PRODUTOS TRIPLOS

1.20. Mostre que $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ é, em valor absoluto, igual ao volume de um paralelepípedo com lados $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

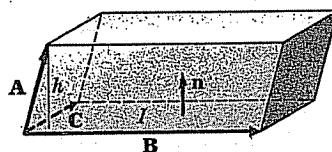



Fig. 1-26

Seja $\mathbf{n}$ um vetor unitário normal ao paralelogramo I, tendo direção de $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$, e seja h a altura do ponto final de $\mathbf{A}$ acima do paralelogramo I.

$$\text{Volume do paralelepípedo} = (\text{altura } h)\,(\text{área do paralelogramo } I)$$
$$= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})(|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|)$$
$$= \mathbf{A}\cdot\{|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|\mathbf{n}\} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

Se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ não formam um sistema que obedeça à regra da mão direita, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} < 0$ e o volume $= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})|$.

1.21. (*a*) Se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ mostre que

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

(*b*) Dê um significado geométrico para o caso onde $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$.

(*a*)
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$
$$= (A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k})\cdot[(B_2C_3-B_3C_2)\mathbf{i}+(B_3C_1-B_1C_3)\mathbf{j} + (B_1C_2-B_2C_1)\mathbf{k}]$$
$$= A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)$$
$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

(*b*) Pelo probl. 1.20, se $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = 0$, então $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são *coplanares*, i.e., estão no mesmo plano e, vice-versa, se $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são coplanares, então $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = 0$.

1.22. Ache o volume de um paralelepípedo de lados $\mathbf{A} = 3\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i}+5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.

Pelos probls, 1.20 e 1.21, o volume do paralelepípedo

$$= |\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})| = \left|\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}\right|$$
$$= |-20| = 20.$$

1.23. Se $\mathbf{A} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, ache (*a*) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

(*a*) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{i} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i}-\mathbf{j}-5\mathbf{k}.$ Então, $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 23\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

(*b*) $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$. Então, $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Segue-se que, em geral, $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} \neq \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

DERIVADAS E INTEGRAIS DE VETORES

1.24. Se $\mathbf{r} = (t^3 + 2t)\mathbf{i} - 3e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,5t\,\mathbf{k}$, ache (*a*) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$, (*b*) $\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$, (*c*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, (*d*) $\left|\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|$ em $t = 0$.

(*a*) $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^3 + 2t)\mathbf{i} + \dfrac{d}{dt}(-3e^{-2t})\mathbf{j} + \dfrac{d}{dt}(2\,\text{sen}\,5t)\mathbf{k} = (3t^2 + 2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + {}$ $+ 10\cos 5t\,\mathbf{k}$ em $t = 0$, $d\mathbf{r}/dt = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

(*b*) De (*a*), $|d\mathbf{r}/dt| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (10)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$ em $t = 0$

(*c*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\{(3t^2 + 2)\mathbf{i} + 6e^{-2t}\mathbf{j} + 10\cos 5t\,\mathbf{k}\} = 6t\mathbf{i} - 12e^{-2t}\mathbf{j} -$ $-50\,\text{sen}\,5t\,\mathbf{k}$ em $t = 0$, $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -12\mathbf{j}$.

(*d*) De (*c*), $|d^2\mathbf{r}/dt^2| = 12$ em $t = 0$.

1.25. Prove que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$, onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são funções diferenciais em u.

Método 1. $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{(\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\cdot(\mathbf{B} + \Delta\mathbf{B}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\Delta u}$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \Delta\mathbf{A}\cdot\Delta\mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\mathbf{A}\cdot\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\mathbf{B} + \frac{\Delta\mathbf{A}}{\Delta u}\cdot\Delta\mathbf{B}\right) = \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

Método 2. Seja $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Então,

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$= \left(A_1\frac{dB_1}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right)$$

$$= \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du}\cdot\mathbf{B}$$

1.26. Se $\phi(x, y, z) = x^2yz$ e $\mathbf{A} = 3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$, ache $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A})$ no ponto $(1, -2, -1)$.

$$\phi\mathbf{A} = (x^2yz)(3x^2y\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}) = 3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^4y^2z\mathbf{i} + x^2y^2z^3\mathbf{j} - x^3yz^2\mathbf{k}) = 3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2\mathbf{i} + 3x^2y^2z^2\mathbf{j} - 2x^3yz\mathbf{k}) = 6x^4y\mathbf{i} + 6x^2yz^2\mathbf{j} - 2x^3z\mathbf{k}$$

Se $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, isto fica $-12\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

1.27. Avalie $\displaystyle\int_{u=1}^{2}\mathbf{A}(u)\,du$, considerando $\mathbf{A}(u) = (3u^2 - 1)\mathbf{i} + (2u - 3)\mathbf{j} + (6u^2 - 4u)\mathbf{k}$.

A integral dada vale

$$\int_{u=1}^{2}\{(3u^2 - 1)\mathbf{i} + (2u - 3)\mathbf{j} + (6u^2 - 4u)\mathbf{k}\}\,du$$

$$= (u^3 - u)\mathbf{i} + (u^2 - 3u)\mathbf{j} + (2u^3 - 2u^2)\mathbf{k}\Big|_{u=1}^{2}$$

$$= \{(8-2)\mathbf{i} + (4-6)\mathbf{j} + (16-8)\mathbf{k}\} - \{(1-1)\mathbf{i} + (1-3)\mathbf{j} + (2-2)\mathbf{k}\}$$

$$= 6\mathbf{i} + 8\mathbf{k}$$

VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

1.28. Uma partícula move-se ao longo de uma curva, cujas equações paramétricas são $x = 3e^{-2t}$, $y = 4\,\text{sen}\,3t$, $z = 5\cos 3t$, onde t é o tempo.
(*a*) Ache a sua velocidade e aceleração em um instante qualquer.
(*b*) Ache as magnitudes da velocidade e aceleração no instante $t = 0$.

(*a*) O vetor posição $\mathbf{r}$ da partícula é

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 3e^{-2t}\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j} + 5\cos 3t\,\mathbf{k}$$

Então, a velocidade é

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6e^{-2t}\mathbf{i} + 12\cos 3t\,\mathbf{j} - 15\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{k}$$

e a aceleração é

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2 = 12e^{-2t}\mathbf{i} - 36\,\text{sen}\,3t\,\mathbf{j} - 45\cos 3t\,\mathbf{k}$$

(*b*) Em $t = 0$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ e $d\mathbf{r}/dt = 12\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$. Então,

magnitude da velocidade em $t = 0$ é $\sqrt{(-6)^2 + (12)^2} = 6\sqrt{5}$

magnitude da aceleração em $t = 0$ é $\sqrt{(12)^2 + (-45)^2} = 3\sqrt{241}$

1.29. Uma partícula movimenta-se de modo que sua aceleração seja dada por

$$\mathbf{a} = 2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

Se a partícula está localizada em $(1, -3, 2)$ no instante $t = 0$ e está se movendo com uma velocidade dada por $4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, ache (*a*) a velocidade e (*b*) o deslocamento da partícula em um instante qualquer $t > 0$.

(*a*) $$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$$

Integrando, $$\mathbf{v} = \int (2e^{-t}\mathbf{i} + 5\cos t\,\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= -2e^{-t}\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

como $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ em $t = 0$, tem-se

$$4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \quad \text{ou} \quad \mathbf{c}_1 = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Então, $$\mathbf{v} = -2e^{-t}\mathbf{i} + 5\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\cos t\,\mathbf{k} + 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$
$$= (6 - 2e^{-t})\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,t - 3)\mathbf{j} + (3\cos t - 1)\mathbf{k} \qquad (1)$$

(*b*) Trocando v por $d\mathbf{r}/dt$ em (1) e integrando, tem-se

$$\mathbf{r} = \int [(6 - 2e^{-t})\mathbf{i} + (5\,\text{sen}\,t - 3)\mathbf{j} + (3\cos t - 1)\mathbf{k}]\,dt$$

$$= (6t + 2e^{-t})\mathbf{i} - (5\cos t + 3t)\mathbf{j} + (3\,\text{sen}\,t - t)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Como a partícula está localizada em $(1, -3, 2)$ em $t = 0$, tem-se $\mathbf{r} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ em $t = 0$, de modo que ou

$$\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Assim, $$\mathbf{r} = (6t + 2e^{-t} - 1)\mathbf{i} + (2 - 5\cos t - 3t)\mathbf{j} + (3\,\text{sen}\,t - t + 2)\mathbf{k} \qquad (2)$$

VELOCIDADE RELATIVA E ACELERAÇÃO

1.30. Um avião move-se na direção noroeste a 125km/h relativamente à Terra, devido ao fato de que há um vento do oeste de 50km/h relativamente à Terra. Determine (*a*) graficamente e (*b*) analiticamente qual a velocidade e em que direção o avião voaria, se não houvesse vento.

(*a*) *Graficamente*

Seja $\mathbf{W}$ = velocidade do vento

$\mathbf{V}_a$ = velocidade do avião com vento

$\mathbf{V}_b$ = velocidade do avião sem vento

Então, [veja a fig. 1-27]

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_b + \mathbf{W} \quad \text{ou} \quad \mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = \mathbf{V}_a + (-\mathbf{W}).$$

V_b tem magnitude 6,5 unidades = 163km/h e direção 33° ao norte do oeste.

(*b*) *Analiticamente*

Sendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ os vetores unitários nas direções E e N respectivamente, vê-se pela fig. 1-27 que

$$\mathbf{V}_a = -125\cos 45°\,\mathbf{i} + 125\,\text{sen}\,45°\,\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{W} = 50\mathbf{i}$$

Então, $\mathbf{V}_b = \mathbf{V}_a - \mathbf{W} = (-125\cos 45° - 50)\mathbf{i} + 125\,\text{sen}\,45°\,\mathbf{j} = -138{,}39\mathbf{i} + 88{,}39\mathbf{j}$.

Assim, a magnitude de $\mathbf{V}_b$ é $\sqrt{(-138{,}39)^2 + (88{,}39)^2} = 164{,}2$km/h e a direção é $\text{tg}^{-1}\,88{,}39 = \text{tg}^{-1}\,0{,}6387 = 32°\,34'$ ao norte do oeste.

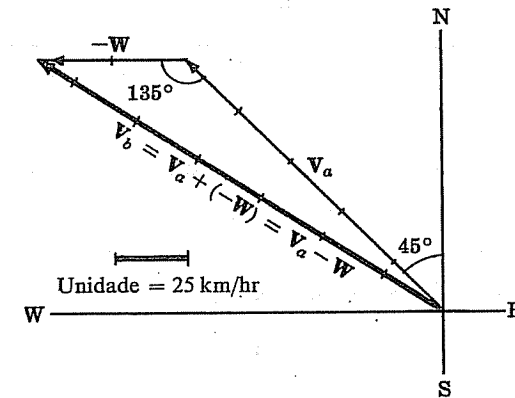



Fig. 1-27

1.31. Duas partículas têm vetores de posição dados por $\mathbf{r}_1 = 2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (3t^2 - 4t)\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$. Ache (*a*) a velocidade relativa e (*b*) a aceleração da segunda partícula em relação à primeira, no instante em que $t = 2$.

(*a*) As velocidades das partículas em $t = 2$ são, respectivamente,

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (6t - 4)\mathbf{k}\Big|_{t=2} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = (10t - 12)\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\Big|_{t=2} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

A velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1

$$= \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = (8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = 6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

(*b*) As acelerações das partículas em $t = 2$ são, respectivamente,

$$\mathbf{a}_1 = \dot{\mathbf{v}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1 = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\Big|_{t=2} = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_2 = \dot{\mathbf{v}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2 = 10\mathbf{i} + 6t\mathbf{j}\Big|_{t=2} = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$$

A aceleração relativa da partícula 2 em relação à partícula 1

$$= \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) - (-2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) = 10\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

ACELERAÇÃO TANGENCIAL E NORMAL

1.32. Dada uma curva espacial C com vetor posição

$$\mathbf{r} = 3\cos 2t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j} + (8t-4)\mathbf{k}$$

(*a*) Ache um vetor $\mathbf{T}$ unitário e tangente à curva.
(*b*) Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição de uma partícula movendo-se sôbre C no instante t, verifique neste caso se $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$.

(*a*) Um vetor tangente a C é

$$d\mathbf{r}/dt = -6\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$

A magnitude dêste vetor é

$$|d\mathbf{r}/dt| = ds/dt = \sqrt{(-6\,\text{sen}\,2t)^2 + (6\cos 2t)^2 + (8)^2} = 10$$

Então, um vetor unitário e tangente a C é

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{-6\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{10}$$
$$= -\tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}$$

(*b*) Assim, de (*a*) vê-se que

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -6\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + 6\cos 2t\,\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$
$$= (10)(-\tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}) = v\mathbf{T}$$

Note que, neste caso, a velocidade em módulo da partícula ao longo da curva é constante.

1.33. Se $\mathbf{T}$ é um vetor unitário e tangente à curva espacial C, mostre que $d\mathbf{T}/ds$ é normal a $\mathbf{T}$.

Como $\mathbf{T}$ é um vetor unitário, tem-se que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$. Então, diferenciando em relação a s, obtém-se

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T} = 2\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$$

que estabelece que $d\mathbf{T}/ds$ é normal, i.e., perpendicular a $\mathbf{T}$.

Se $\mathbf{N}$ é um vetor unitário na direção de $d\mathbf{T}/ds$, tem-se que

$$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$$

e chama-se $\mathbf{N}$ de *vetor unitário principal normal* a C. O escalar $\kappa = |d\mathbf{T}/ds|$ é chamado de *curvatura*, enquanto que $R = 1/\kappa$ é chamado de *raio de curvatura.*

1.34. Ache (*a*) a curvatura, (*b*) o raio de curvatura e (*c*) o vetor unitário normal principal $\mathbf{N}$ em um ponto qualquer da curva espacial do probl. 1.32.

(*a*) Do probl. 1.32

$$\mathbf{T} = -\tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i} + \tfrac{3}{5}\cos 2t\,\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}. \text{ Então,}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{(-6/5)\cos 2t\,\mathbf{i} - (6/5)\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j}}{10}$$
$$= -\tfrac{3}{25}\cos 2t\,\mathbf{i} - \tfrac{3}{25}\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{j}$$

Assim a curvatura é $\kappa = \left|\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \sqrt{(-\tfrac{3}{25}\cos 2t)^2 + (-\tfrac{3}{25}\,\text{sen}\,2t)^2} = \tfrac{3}{25}$

(*b*) O raio de curvatura $= R = 1/\kappa = 25/3$
(*c*) De (*a*), (*b*) e probl. 1.33,

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{ds} = R\frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos 2t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,2t\,\mathbf{j}$$

1.35. Mostre que a aceleração $\mathbf{a}$ de uma partícula que se move ao longo de uma trajetória espacial, com velocidade $\mathbf{v}$ é dada por

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}$$

onde $\mathbf{T}$ é o vetor unitário tangente à trajetória espacial, $\mathbf{N}$ é o vetor unitário normal principal e R é o raio de curvatura.

Velocidade $\mathbf{v}$ = magnitude de $\mathbf{v}$ multiplicada pelo vetor unitário tangente $\mathbf{T}$, ou

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

Diferenciando, $$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

Mas $$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\mathbf{N}\frac{ds}{dt} = \kappa v\mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{R}$$

Então, $$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{R}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N}$$

Isto mostra que a componente da aceleração é dv/dt na direção tangente à trajetória e v^2/R na direção normal principal da trajetória. A última aceleração é, geralmente, chamada de *aceleração centrípeta* ou *aceleração normal.*

MOVIMENTO CIRCULAR

1.36. Uma partícula se move de modo que se seu vetor posição é dado por $\mathbf{r} = \cos \omega\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega\mathbf{j}$, onde ω é uma constante. Mostre que (*a*) a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula é perpendicular a $\mathbf{r}$, (*b*) a aceleração $\mathbf{a}$ é dirigida para a origem e tem magnitude proporcional à distância da partícula à origem, (*c*) $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ = um vetor constante.

(*a*) $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}$. Então

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} = [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}]\cdot[-\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}]$$
$$= (\cos \omega t)(-\omega \operatorname{sen} \omega t) + (\operatorname{sen} \omega t)(\omega \cos \omega t) = 0$$

e $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ são perpendiculares entre si.

(*b*) $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} = -\omega^2 [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}] = -\omega^2 \mathbf{r}$

Então, a aceleração tem direção oposta à de $\mathbf{r}$, i.e., ela é dirigida para a origem. A sua magnitude é proporcional a $|\mathbf{r}|$, que é a sua distância da origem.

(*c*) $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = [\cos \omega t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}] \times [-\omega \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \omega \cos \omega t\,\mathbf{j}]$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \omega t & \operatorname{sen} \omega t & 0 \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t)\mathbf{k} = \omega\mathbf{k},$$ um vetor constante.

Fisicamente, o movimento é o de uma partícula movendo-se sobre um círculo, com velocidade angular em módulo constante ω. A aceleração dirigida para o centro do círculo é a *aceleração centrípeta.*

GRADIENTE, DIVERGENTE E ROTACIONAL

1.37. Se $\phi = x^2yz^3$ e $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k}$, ache (*a*) $\nabla\phi$, (*b*) $\nabla\cdot\mathbf{A}$, (*c*) $\nabla\times\mathbf{A}$, (*d*) div $(\phi\mathbf{A})$, (*e*) rot $(\phi\mathbf{A})$.

(*a*) $$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\mathbf{k} = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$$

(*b*) $$\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y$$

(*c*) $$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\times(xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + 2x^2y\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\mathbf{k}$$

$$= 2x^2\mathbf{i} + (x - 4xy)\mathbf{j}$$

(*d*) $$\operatorname{div}(\phi\mathbf{A}) = \nabla\cdot(\phi\mathbf{A}) = \nabla\cdot(x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3)$$

$$= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$$

(*e*) $$\operatorname{curl}(\phi\mathbf{A}) = \nabla\times(\phi\mathbf{A}) = \nabla\times(x^3yz^4\mathbf{i} - x^2y^3z^3\mathbf{j} + 2x^4y^2z^3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)\mathbf{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\mathbf{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\mathbf{k}$$

1.38. (*a*) Se $\mathbf{A} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j} + (3xz^2 - 2)\mathbf{k}$, mostre que $\nabla\times\mathbf{A} = \mathbf{0}$. (*b*) Ache uma função escalar ϕ tal que $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

(*a*) $$\nabla\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^3 & x^2 + 2y & 3xz^2 - 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

(*b*) *Método* 1. Se $\mathbf{A} = \nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$ então, deve-se ter

(1) $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy + z^3$ (2) $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 + 2y$ (3) $\dfrac{\partial\phi}{\partial z} = 3xz^2 - 2$

Integrando, acha-se

(4) $\phi = x^2y + xz^3 + F_1(y, z)$ (5) $\phi = x^2y + y^2 + F_2(x, z)$
(6) $\phi = xz^3 - 2z + F_3(x, y)$

Comparando isto deve-se ter $F_1(y, z) = y^2 - 2z$, $F_2(x, z) = xz^3 - 2z$, $F_3(x, y) = x^2y + y^2$ e, assim, $\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z$.

Método 2. Tem-se $\mathbf{A} = \nabla\phi$,

$$\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = d\phi$$

uma diferencial exata. Para este caso,

$$\begin{aligned} d\phi = \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} &= (2xy + z^3)\,dx + (x^2 + 2y)\,dy + (3xz^2 - 2)\,dz \\ &= [(2xy + z^3)dx + x^2\,dy + 3xz^2\,dz] + 2y\,dy - 2\,dz \\ &= d(x^2y + xz^3) + d(y^2) + d(-2z) \\ &= d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z) \end{aligned}$$

Então $\phi = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z$. Note que uma constante arbitrária pode ser adicionada a ϕ.

INTEGRAIS DE LINHA E INDEPENDÊNCIA DA TRAJETÓRIA

1.39. Se $\mathbf{A} = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$, avalie $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ de (0, 0, 0) a (1, 1, 1) ao longo das trajetórias C:

(*a*) $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(*b*) linhas retas de (0, 0, 0) a (0, 0, 1), de (0, 1, 1) a (0, 1, 1) e, por último, até (1, 1, 1).

(*c*) uma linha reta ligando (0, 0, 0) a (1, 1, 1).

$$\int_c \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \{(3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}\}\cdot(dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k})$$

$$= \int_C (3x^2 - 6yz)\,dx + (2y + 3xz)\,dy + (1 - 4xyz^2)\,dz$$

(*a*) Se $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, os pontos (0, 0, 0) e (1, 1, 1) correspondem a $t = 0$ e $t = 1$, respectivamente. Então,

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{1} \{3t^2 - 6(t^2)(t^3)\}\,dt + \{2t^2 + 3(t)(t^3)\}\,d(t^2) + \{1 - 4(t)(t^2)(t^3)^2\}\,d(t^3)$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$$

Um outro método

Ao longo de C, $\mathbf{A} = (3t^2 - 6t^5)\mathbf{i} + (2t^2 + 3t^4)\mathbf{j} + (1 - 4t^9)\mathbf{k}$ e $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $d\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k})\,dt$. Então,

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^5)\,dt + (4t^3 + 6t^5)\,dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$$

(*b*) Ao longo da linha reta de (0, 0, 0) a (0, 0, 1), $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ enquanto z varia de 0 a 1. Então, a integral sobre esta parte da trajetória é

$$\int_{z=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(0)(z)\}0 + \{2(0) + 3(0)(z)\}0 + \{1 - 4(0)(0)(z^2)\}\,dz = \int_{z=0}^{1} dz = 1$$

Ao longo da linha reta de (0, 0, 1) a (0, 1, 1), $x = 0$, $z = 1$, $dx = 0$, $dz = 0$ enquanto y varia de 0 a 1. Então, a integral sobre esta parte da trajetória é

$$\int_{y=0}^{1} \{3(0)^2 - 6(y)(1)\}0 + \{2y + 3(0)(1)\}\,dy + \{1 - 4(0)(y)(1)^2\}0 = \int_{y=0}^{1} 2y\,dy = 1$$

Ao longo da linha reta de (0, 1, 1) a (1, 1, 1), $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$, enquanto x varia de 0 a 1. Então, a integral sobre esta parte da trajetória é

$$\int_{x=0}^{1} \{3x^2 - 6(1)(1)\}\,dx + \{2(1) + 3x(1)\}0 + \{1 - 4x(1)(1)^2\}0 = \int_{x=0}^{1} (3x^2 - 6)\,dx = -5$$

Somando, $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = 1 + 1 - 5 = -3$.

(*c*) Ao longo da linha reta que liga (0, 0, 0) a (1, 1, 1), tem-se $x = t$, $y = t$, $z = t$. Então, como $dx = dy = dz = dt$,

$$\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (3x^2 - 6yz)\,dx + (2y + 3xz)\,dy + (1 - 4xyz^2)\,dz$$

$$= \int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^2)\,dt + (2t + 3t^2)\,dt + (1 - 4t^4)\,dt$$

$$= \int_{t=0}^{1} (2t + 1 - 4t^4)\,dt = 6/5$$

Note-se que, neste caso, o valor da integral depende da trajetória.

1.40. Se $\mathbf{A} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + (x^2 + 2y)\mathbf{j} + (3xz^2 - 2)\mathbf{k}$, mostre que (*a*) $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ é independente da trajetória C, que liga os pontos (1, −1, 1) e (2, 1, 2) e (*b*) ache o seu valor.

Pelo probl. 1.38, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = d\phi = d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z)$. Então, a integral é independente da trajetória e o seu valor é

$$\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} d(x^2y + xz^3 + y^2 - 2z)$$

$$= x^2y + xz^3 + y^2 - 2z\Big|_{(1,-1,1)}^{(2,1,2)} = 18$$

PROBLEMAS EM GERAL

1.41. Prove que, se **a** e **b** não são colineares, então $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica que $x = y = 0$.

Considere $x \neq 0$. Então, $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0}$ implica que $x\mathbf{a} = -y\mathbf{b}$ ou $\mathbf{a} = -(y/x)\mathbf{b}$, i.e., **a** e **b** devem ser paralelos à mesma linha (colineares), contrariando a hipótese. Assim, $x = 0$; então, $y\mathbf{b} = \mathbf{0}$, de onde $y = 0$.

1.42. Prove que as diagonais de um paralelogramo bisectam uma à outra.

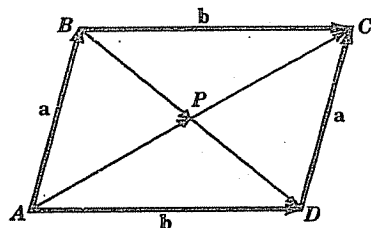
Seja $ABCD$ o paralelogramo dado com diagonais interseccionando-se em P, como é mostrado na fig. 1-28.

Fig. 1-28

Como $\mathbf{BD} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{BD} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Então, $\mathbf{BP} = x(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Como $\mathbf{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{AP} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Mas $\mathbf{AB} = \mathbf{AP} + \mathbf{PB} = \mathbf{AP} - \mathbf{BP}$, i.e., $\mathbf{a} = y(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - x(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (x + y)\mathbf{a} + (y - x)\mathbf{b}$.

Como $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ não são colineares, tem-se, pelo probl. 1.41, $x + y = 1$ e $y - x = 0$, i.e., $x = y = \frac{1}{2}$ e P é o ponto médio de ambas as diagonais.

1.43. Prove que, para um vetor qualquer $\mathbf{A}$,

$$(a)\quad \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$(b)\quad \mathbf{A} = A(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

onde α, β e γ são os ângulos que $\mathbf{A}$ faz com $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente e $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são chamados *co-senos diretores de* $\mathbf{A}$.

(*a*) Tem-se $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$. Então,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = A_1$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = A_2$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = A_3$$

Assim, $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (A \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k}$

(*b*)
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{i}|\cos\alpha = A\cos\alpha$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{j}|\cos\beta = A\cos\beta$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{k} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{k}|\cos\gamma = A\cos\gamma$$

Então, da parte (*a*)

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} = A(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k})$$

1.44. Prove que $\nabla\phi$ é um vetor perpendicular à superfície $\phi(x, y, z) = c$, onde c é uma constante.

Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de um ponto P qualquer da superfície. Mas, $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$ ou $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = 0$

i.e., $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$, tal que $\nabla\phi$ seja perpendicular a $d\mathbf{r}$ e, assim, também perpendicular à superfície.

1.45. Ache o vetor unitário normal à superfície $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ no ponto $P(3, -1, 2)$.

Pelo probl. 1.44, um vetor normal à superfície é

$$\nabla(2x^2 + 4yz - 5z^2) = 4x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + (4y - 10z)\mathbf{k} = 12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k} \text{ para } (3, -1, 2)$$

Então, um vetor unitário normal à superfície em P é

$$\frac{12\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 24\mathbf{k}}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-24)^2}} = \frac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}.$$

Um outro vetor unitário normal à superfície em P é $-\frac{3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{7}$.

1.46. Uma escada AB de comprimento a descansa sobre uma parede vertical OA [fig. 1-29]. O pé B da escada é puxado para fora com velocidade constante v_0. (*a*) Mostre que o ponto médio da escada descreve um arco de círculo de raio $a/2$ com centro em O. (*b*) Ache a velocidade vetorial e a velocidade em módulo do ponto médio da escada, no instante em que B esteja distante $b < a$ da parede.

(*a*) Seja $\mathbf{r}$ o vetor posição do ponto médio M de AB. Se o ângulo $OBA = \theta$, tem-se

$$\mathbf{OB} = a\cos\theta\,\mathbf{i}, \quad \mathbf{OA} = a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = a\cos\theta\,\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}$$

Então,

$$\mathbf{r} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} = \mathbf{OA} + \tfrac{1}{2}\mathbf{AB}$$
$$= a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}(a\cos\theta\,\mathbf{i} - a\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})$$
$$= \tfrac{1}{2}a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})$$

Assim, $|\mathbf{r}| = \frac{1}{2}a$, que é um círculo de raio $a/2$, com centro em O.

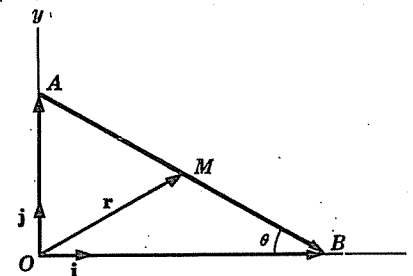



Fig. 1-29

(*b*) A velocidade vetorial do ponto médio M é

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}a(\cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})\} = \tfrac{1}{2}a(-\text{sen}\,\theta\,\dot\theta\mathbf{i} + \cos\theta\,\dot\theta\mathbf{j}) \qquad (1)$$

onde $\dot\theta = d\theta/dt$.

A velocidade do pé B da escada é

$$v_0\mathbf{i} = \frac{d}{dt}(\mathbf{OB}) = \frac{d}{dt}(a\cos\theta\,\mathbf{i}) = -a\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad a\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = -v_0 \quad (2)$$

No instante em que B esteja distante b da parede, tem-se de (2),

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad \dot{\theta} = \frac{-v_0}{a\,\text{sen}\,\theta} = \frac{-v_0}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Assim, de (1) a velocidade vetorial de M pedida neste instante é

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \tfrac{1}{2}v_0\left(\mathbf{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathbf{j}\right)$$

e sua velocidade em módulo é $av_0/2\sqrt{a^2-b^2}$.

1.47. Sejam (r, θ) as coordenadas polares para descrever a posição de uma partícula. Se $\mathbf{r}_1$ é um vetor unitário na direção do vetor posição $\mathbf{r}$ e θ_1 é um vetor unitário perpendicular a r e na direção de θ crescente [veja a fig. 1-30] mostre que

(*a*) $\mathbf{r}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}, \quad \theta_1 = -\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$
(*b*) $\mathbf{i} = \cos\theta\,\mathbf{r}_1 - \text{sen}\,\theta\,\theta_1, \quad \mathbf{j} = \text{sen}\,\theta\,\mathbf{r}_1 + \cos\theta\,\theta_1$

(*a*) Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição da partícula em um instante qualquer t, então $\partial\mathbf{r}/\partial r$ é um vetor tangente à curva θ = constante, i.e., um vetor na direção de $\mathbf{r}$ (r aumentando). Um vetor unitário nesta direção é, assim, dado por

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\bigg/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| \quad (1)$$

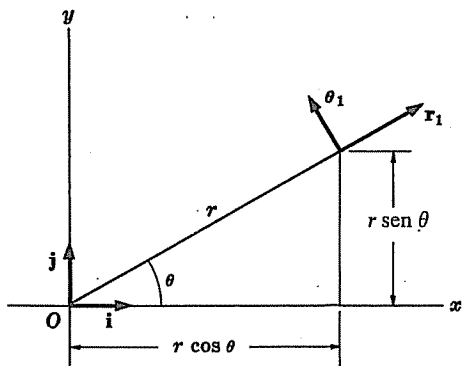



Fig. 1-30

Como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \quad (2)$$

como é visto na fig. 1-30, tem-se

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| = 1$$

tal que

$$\mathbf{r}_1 = \cos\theta\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j} \quad (3)$$

Igualmente, $\partial\mathbf{r}/\partial\theta$ é um vetor tangente à curva r = constante. Um vetor unitário nesta direção é, assim, dado por

$$\theta_1 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\bigg/\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| \quad (4)$$

Agora, de (2)

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} = -r\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta\,\mathbf{j}, \quad \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = r$$

tal que (4) fica

$$\theta_1 = -\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j} \quad (5)$$

(*b*) Estes resultados são obtidos pela solução simultânea das equações (3) e (5) para $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

1.48. Prove que (*a*) $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\theta}\,\theta_1$ (*b*) $\dot{\theta}_1 = -\dot{\theta}\mathbf{r}_1$.

(*a*) De (3) do probl. 1.47, tem-se

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\mathbf{r}_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} = (\mathbf{0})(\dot{r}) + (-\text{sen}\,\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})(\dot{\theta}) = \dot{\theta}\,\theta_1$$

(*b*) De (5) do probl. 1.47, tem-se

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial\theta_1}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial\theta_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} = (\mathbf{0})(\dot{r}) + (-\cos\theta\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta\,\mathbf{j})(\dot{\theta}) = -\dot{\theta}\mathbf{r}_1$$

1.49. Prove que, em coordenadas polares, (*a*) a velocidade vetorial é dada por

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\,\theta_1$$

e (*b*) a aceleração é dada por

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\theta_1$$

(*a*) Tem-se $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ tal que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1 + r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\,\theta_1$$

pelo probl. 1.48(*a*).

(*b*) Do item (*a*) e do probl. 1.48, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1) \\ &= \ddot{r}\,\mathbf{r}_1 + \dot{r}\dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1 + r\dot{\theta}\,\dot{\boldsymbol{\theta}}_1 \\ &= \ddot{r}\,\mathbf{r}_1 + \dot{r}(\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1) + \dot{r}\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1 + r\ddot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1 + (r\dot{\theta})(-\dot{\theta}\mathbf{r}_1) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1\end{aligned}$$

Problemas Propostos

ÁLGEBRA VETORIAL

1.50. Dados dois vetores quaisquer, **A** e **B**, ilustre geomètricamente a igualdade $4\mathbf{A} + 3(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{A} + 3\mathbf{B}$.

1.51. Dados os vetores **A**, **B** e **C**, construa os vetores (*a*) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{C}$, (*b*) $\mathbf{C} - \frac{1}{3}\mathbf{A} + \frac{1}{4}\mathbf{B}$.

1.52. Se **A** e **B** são dois vetores quaisquer, não-nulos, que não têm a mesma direção, prove que $p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$ é um vetor que está no plano determinado por **A** e **B**.

1.53. (*a*) Determine o vetor que tenha o ponto inicial $(2, -1, 3)$ e o ponto final $(3, 2, -4)$. (*b*) Ache a distância entre os dois pontos em (*a*).
Resp. (*a*) $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, (*b*) $\sqrt{59}$

1.54. Um triângulo tem os seus vértices nos pontos $A(2, 1, -1)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(1, -2, 1)$. Ache o comprimento da mediana do lado AB.
Resp. $\frac{1}{2}\sqrt{66}$

1.55. Um homem anda 25 km a nordeste, 15 km a este e 10 km ao sul. Usando uma escala apropriada, determine (*a*) graficamente e (*b*) está longe de sua posição de partida e em que direção.
Resp. 33,6 km, 13,2° ao norte do este.

1.56. Ache um vetor unitário na direção da resultante dos seguintes vetores $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Resp. $\pm(6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k})/\sqrt{89}$

PRODUTO ESCALAR

1.57. Avalie $|(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})|$, se $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
Resp. 24.

1.58. Ache a tal que $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ e $3\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ sejam perpendiculares.
Resp. $a = -4/3$.

1.59. Se $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, ache a projeção de $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ na direção de **B**.
Resp. 17/3.

1.60. Um triângulo tem vértices em $A(2, 3, 1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(1, -2, 3)$. Ache o ângulo agudo que a mediana do lado AC faz com o lado BC.
Resp.: $\cos^{-1}\sqrt{91}/14$.

1.61. Prove a lei dos co-senos para o triângulo ABC, i.e. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. [*Sugestão*: tome os lados como **A**, **B** e **C**, onde $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$. Então, use $\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})$.]

1.62. Prove que as diagonais de um romboedro são perpendiculares entre si.

PRODUTO VETORIAL

1.63. Se $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, ache $|(2\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} - 2\mathbf{B})|$.
Resp. $25\sqrt{3}$.

1.64. Ache um vetor unitário perpendicular ao plano dos vetores $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
Resp. $\pm(2\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{5}$

1.65. Ache a área do triângulo com vértices $(2, -3, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(-1, 2, 3)$.
Resp. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

1.66. Ache a menor distância do ponto $(3, 2, 1)$ ao plano determinado por $(1, 1, 0)$, $(3, -1, 1)$, $(-1, 0, 2)$.
Resp. 2

1.67. Prove a *lei dos senos* para o triângulo ABC, i.e., $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$.
[*Sugestão*: considere os lados como sendo **A**, **B** e **C**, onde $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ e tome o produto vetorial de ambos os lados **A** e **B**, respectivamente.]

PRODUTO TRIPLO

1.68. Se $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, ache (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*b*) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (*c*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$, (*d*) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$.
(*a*) 20, (*b*) 20, (*c*) $8\mathbf{i} - 19\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*d*) $25\mathbf{i} - 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

1.69. Prove que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$, i.e., os sinais de multiplicação vetorial e escalar podem ser trocados.

1.70. Ache o volume de um paralelepípedo cujas arestas são dadas por $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
Resp. 31.

1.71. Ache o volume de um tetraedro com vértices em $(2, 1, 1)$, $(1, -1, 2)$, $(0, 1, -1)$, $(1, -2, 1)$.
Resp. $4/3$.

1.72. Prove que (*a*) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$,
(*b*) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

1.73. (*a*) Sejam $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$ os vetores posição de três pontos P_1, P_2 e P_3, respectivamente. Prove que a equação $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \cdot [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_3)] = 0$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, representa uma equação para o plano determinado por P_1, P_2 e P_3. (*b*) Ache uma equação para o plano que passe por $(2, -1, -2)$ $(-1, 2, -3)$, $(4, 1, 0)$.
Resp. (*b*) $2x + y - 3z = 9$

DERIVADA E INTEGRAL DE VETORES

1.74. Seja $\mathbf{A} = 3t\mathbf{i} - (t^2 + t)\mathbf{j} + (t^3 - 2t^2)\mathbf{k}$. Ache (*a*) $d\mathbf{A}/dt$ e (*b*) $d^2\mathbf{A}/dt^2$ em $t = 1$.
Resp. (*a*) $3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*b*) $-2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

1.75. Se $\mathbf{r} = \mathbf{a} \cos \omega t + \mathbf{b} \operatorname{sen} \omega t$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores não-colineares, constantes e quaisquer, sendo que ω é um escalar constante, prove que (*a*) $\mathbf{r} \times d\mathbf{r}/dt = \omega(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, (*b*) $d^2\mathbf{r}/dt^2 + \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

1.76. Se $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ache $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.
Resp. $-t \operatorname{sen} t$

1.77. Prove que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \dfrac{d\mathbf{B}}{du} + \dfrac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$, onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são funções diferenciais em u.

1.78. Se $\mathbf{A}(u) = 4(u-1)\mathbf{i} - (2u+3)\mathbf{j} + 6u^2\mathbf{k}$, avalie (*a*) $\displaystyle\int_2^3 \mathbf{A}(u)\,du$, (*b*) $\displaystyle\int_1^2 (u\mathbf{i} - 2\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}(u)\,du$.
Resp. (*a*) $6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$, (*b*) -28

1.79. Ache o vetor $\mathbf{B}(u)$ tal que $d^2\mathbf{B}/du^2 = 6u\mathbf{i} - 48u^2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$, onde $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ e $d\mathbf{B}/du = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ para $u = 0$.
Resp. $(u^3 + u + 2)\mathbf{i} + (5u - 4u^4)\mathbf{j} + (6u^2 - 3)\mathbf{k}$

1.80. Prove que $\displaystyle\int \mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2}\,dt = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante.

1.81. Se $\mathbf{R} = x^2y\mathbf{i} - 2y^2z\mathbf{j} + xy^2z^2\mathbf{k}$, ache $\left| \dfrac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial x^2} \times \dfrac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial y^2} \right|$ no ponto $(2, 1, -2)$.
Resp. $16\sqrt{5}$

1.82. Se $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ e $\mathbf{B} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} - xyz\mathbf{k}$, ache $\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ no ponto $(1, -1, 2)$.
Resp. $-4i + 8j$.

VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

1.83. Uma partícula move-se ao longo da curva espacial $\mathbf{r} = (t^2 + t)\mathbf{i} + (3t-2)\mathbf{j} + (2t^3 - 4t^2)\mathbf{k}$. Ache (*a*) a velocidade vetorial, (*b*) a aceleração, (*c*) a velocidade em módulo e (*d*) a magnitude da aceleração no instante $t = 2$.
Resp. (*a*) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, (*b*) $2\mathbf{i} + 16\mathbf{k}$, (*c*) $7\sqrt{2}$, (*d*) $2\sqrt{65}$

1.84. Uma partícula move-se ao longo de uma curva espacial definida por $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \operatorname{sen} t$, $z = e^{-t}$. Ache a magnitude (*a*) da velocidade e (*b*) da aceleração, em um instante qualquer t.
Resp. $\sqrt{3}e^{-t}$, (*b*) $\sqrt{5}e^{-t}$

1.85. O vetor-posição de uma partícula é dado em um instante qualquer t por $\mathbf{r} = a \cos \omega t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j} + ct^2\mathbf{k}$. (*a*) Mostre que, embora a velocidade em módulo da partícula cresça com o tempo, a magnitude da aceleração é sempre constante. (*b*) Descreva o movimento da partícula geometricamente.

VELOCIDADE RELATIVA E ACELERAÇÃO

1.86. Os vetores de posição de duas partículas são dados, respectivamente, por $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 3)\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_2 = (2t - 3t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$. Ache (*a*) a velocidade vetorial relativa e (*b*) a aceleração relativa da segunda partícula em relação à primeira em $t = 1$.
Resp. (*a*) $-5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, (*b*) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

1.87. Um motorista de automóvel, viajando na direção nordeste, a 26 km/h, nota que o vento parece vir do noroeste. Quando êle viaja na direção sudeste, a 30 km/h, o vento parece vir de 60° ao sul do oeste. Ache a velocidade vetorial do vento, relativamente à Terra.
Resp. 52 km/h, na direção de 30° ao sul do oeste.

1.88. Um homem em um barco na margem de um rio deseja alcançar um ponto diretamente oposto, do outro lado do rio. Considerando que a largura do rio seja D e que as velocidades em módulo do barco e da correnteza sejam V e $v < V$, respectivamente, mostre que (*a*) ele deve partir com o barco apontando para a nascente do rio em um ângulo de $\operatorname{sen}^{-1}(v/V)$ com a margem e (*b*) o tempo para cruzar o rio é de $D/\sqrt{V^2 - v^2}$

ACELERAÇÃO TANGENCIAL E NORMAL

1.89. Mostre que as acelerações tangencial e normal de uma partícula movendo-se em uma curva espacial são dadas por d^2s/dt^2 e $\kappa(ds/dt)^2$, onde s é o comprimento do arco da curva medido a partir de um ponto inicial e κ é a curvatura.

1.90. Ache (*a*) a tangente unitária **T**, (*b*) a normal principal **N**, (*c*) o raio de curvatura R e (*d*) a curvatura κ da curva espacial $x = t$, $y = t^2/2$, $z = t$.
Resp. (*a*) $(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{t^2+2}$, (*b*) $(-t\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - t\mathbf{k})/\sqrt{2t^2+4}$, (*c*) $(t^2+2)^{3/2}/\sqrt{2}$, (*d*) $\sqrt{2}/(t^2+2)^{3/2}$

1.91. Uma partícula move-se de tal modo que o seu vetor-posição, em um instante qualquer t, é $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Ache (*a*) a velocidade vetorial, (*b*) a magnitude da velocidade, (*c*) a aceleração, (*d*) a magnitude da aceleração, (*e*) a magnitude da aceleração tangencial, (*f*) a magnitude da aceleração normal.
Resp. (*a*) $\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, (*b*) $\sqrt{t^2+2}$, (*c*) $\mathbf{j}$, (*d*) 1, (*e*) $t/\sqrt{t^2+2}$, (*f*) $\sqrt{2}/\sqrt{t^2+2}$

1.92. Ache (*a*) a aceleração tangencial e (*b*) a aceleração normal de uma partícula que se move sobre a elipse $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\mathrm{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$.

Resp. (*a*) $\dfrac{\omega^2(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}\,\omega t\cos\omega t}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$ (*b*) $\dfrac{\omega^2 ab}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2\,\omega t + b^2\cos^2\omega t}}$

MOVIMENTO CIRCULAR

1.93. Uma partícula move-se em um círculo de raio de 20 cm. Se a sua velocidade em módulo tangencial for 40 cm/s, ache (*a*) a sua velocidade em módulo angular, (*b*) a sua aceleração angular e (*c*) a sua aceleração normal.
Resp. (*a*) 2 rad/s, (*b*) o rad/s² e (*c*) 80 cm/s².

1.94. Uma partícula movendo-se em um círculo de raio R tem uma aceleração angular constante α. Se a partícula parte do repouso, mostre que, após o tempo t, (*a*) a sua velocidade angular é $\omega = \alpha t$, (*b*) o comprimento do arco percorrido é $s = \frac{1}{2}R\,\omega t^2$.

1.95. Uma partícula move-se sobre um círculo de raio R, com velocidade em módulo constante ω_0. No instante $t = 0$, ela começa a descer de modo que sua aceleração angular seja $-\alpha$ (ou desaceleração α). Mostre que (*a*) ela alcança o repouso após o tempo ω_0/α e (*b*) ela percorreu uma distância $R\omega_0^2/2\alpha$.

1.96. Se a partícula do probl. 1.95 está circulando a 3 600 revoluções por minuto em um círculo de raio de 100 cm e desenvolve uma desaceleração constante de 5 rad/s² (*a*) quanto ela demorará para alcançar o repouso e (*b*) qual a distância que ela percorrerá?
Resp. (*a*) 75,4 s, (*b*) $1{,}42 \times 10^6$ cm

GRADIENTE, DIVERGENTE E ROTACIONAL

1.97. Se $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} + (2x^2 - y)\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ e $\phi = 3x^2y + y^2z^3$, ache (*a*) $\nabla\phi$, (*b*) $\nabla\cdot\mathbf{A}$ e (*c*) $\nabla\times\mathbf{A}$ no ponto $(1,-1,1)$.
Resp. (*a*) $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, (*b*) 2, (*c*) $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

1.98. Se $\phi = xy + yz + zx$ e $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2x\mathbf{k}$, ache (*a*) $\mathbf{A}\cdot\nabla\phi$, (*b*) $\phi\nabla\cdot\mathbf{A}$ e (*c*) $(\nabla\phi)\times\mathbf{A}$ no ponto $(3,-1,2)$.
Resp. (*a*) 25, (*b*) 2, (*c*) $56\mathbf{i} - 30\mathbf{j} + 47\mathbf{k}$

1.99. Prove que, se U, V, **A**, **B** tiver derivadas parciais contínuas, então (*a*) $\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$, (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$, (*c*) $\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$.

1.100. Mostre que $\nabla + (r^2\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

1.101. Prove que (*a*) div. rot. $\mathbf{A} = 0$ e (*b*) rot. grad. $\phi = \mathbf{0}$ sob certas condições de **A** e ϕ.

1.102. Se $\mathbf{A} = (2x^2 - yz)\mathbf{i} + (y^2 - 2xz)\mathbf{j} + x^2z^3\mathbf{k}$ e $\phi = x^2y - 3xz^2 + 2xyz$, mostre diretamente que div. rot. $\mathbf{A} = 0$ e rot. grad. $\phi = \mathbf{0}$.

1.103. Se $\mathbf{A} = 3xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x + 2z)\mathbf{k}$, ache rot. rot. **A**.
Resp. $-6x\mathbf{i} + (6z - 1)\mathbf{k}$

1.104. (*a*) Prove que $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$. (*b*) Verifique o resultado de (*a*) se **A** for o dado no probl. 1.103.

1.105. Prove que: (*a*) $\nabla\times(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$. (*b*) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$.

INTEGRAIS DE LINHA E INDEPENDÊNCIA DE TRAJETÓRIA

1.106. Se $\mathbf{F} = (3x - 2y)\mathbf{i} + (y + 2z)\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, avalie $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, onde C é a trajetória que consiste em: (*a*) a curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$; (*b*) a linha reta que liga estes pontos; (*c*) as linhas retas de $(0,0,0)$ a $(0,1,0)$, depois a $(0,1,1)$ e, depois, a $(1,1,1)$; (*d*) a curva $x = z^2$, $z = y^2$.
Resp. (*a*) 23/15, (*b*) 5/3, (*c*) 0, (*d*) 13/30

1.107. Avalie $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{A} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ao longo (*a*) da linha reta de $(0,0,0)$ a $(2,1,3)$, (*b*) da curva espacial $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ de $t = 0$ a $t = 1$, (*c*) da curva definida por $x^2 = 4y$, $3x^3 = 8z$ de $x = 0$ a $x = 2$.
Resp. (*a*) 16, (*b*) 14,2, (*c*) 16

1.108. Ache $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ e C é a curva fechada no plano xy, $x = 2\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, $z = 0$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$.
Resp. 6π.

1.109. (*a*) Se $\mathbf{A} = (4xy - 3x^2z^2)\mathbf{i} + (4y + 2x^2)\mathbf{j} + (1 - 2x^3z)\mathbf{k}$, prove que $\int_C \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$ é independente da curva C que liga os dois pontos dados. (*b*) Avalie a integral em (*a*) se C for a curva do ponto $(1,-1,1)$ ao $(2,2,-1)$.
Resp. (*b*) -19.

1.110. Determine se $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ é independente da trajetória C que liga dois pontos quaisquer, se (*a*) $\mathbf{A} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$, (*b*) $2xz\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j} + (2z - x^2)\mathbf{k}$. No caso em que ela seja independente da trajetória, determine ϕ tal que $A = \nabla\phi$.
Resp. (*a*) Independente da trajetória $\phi = x^2yz + c$; (*b*) dependente da trajetória.

1.111. Avalie $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{E} = r\mathbf{r}$.

Resp. 0

PROBLEMAS EM GERAL

1.112. Se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 8\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, ache $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$.
Resp. $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

1.113. Sejam l_1, m_1, n_1 e l_2, m_2, n_2 os co-senos diretores de dois vetores. Mostre que o ângulo θ entre eles é tal que $\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$.

1.114. Prove que a linha que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado e tem a metade do seu comprimento.

1.115. Prove que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$.

1.116. Se **A**, **B** e **C** são vetores não-coplanares [vetores que não estejam todos no mesmo plano] e $x_1\mathbf{B} + y_1\mathbf{B} + z_1\mathbf{C} = x_2 A + y_2\mathbf{B} + z_2\mathbf{C}$, prove que necessariamente $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

1.117. Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e os pontos P, Q, R e S os pontos médios de lados sucessivos. Prove que (*a*) $PQRS$ é um paralelogramo, (*b*) o perímetro de $PQRS$ é igual à soma dos comprimentos das diagonais de $ABCD$.

1.118. Prove que um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto.

1.119. Ache um vetor unitário normal à superfície $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$ no ponto $(2, 1, -1)$.
Resp. $\pm (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k})/\sqrt{61}$

1.120. Prove que $\mathbf{A} \cdot \dfrac{d\mathbf{A}}{dt} = A\dfrac{dA}{dt}$.

1.121. Se $\mathbf{A}(u)$ é uma função diferenciável em u e $|\mathbf{A}(u)| = 1$, prove que $d\mathbf{A}/du$ é perpendicular à $\mathbf{A}$.

1.122. Prove que $\nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi) \cdot \mathbf{A} + \phi(\nabla \cdot \mathbf{A})$.

1.123. Se $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, $B = C$ necessariamente? Explique.

1.124. Um barco navega na direção nordeste, a 15 km/h. Um homem neste barco observa que um outro barco, localizado a 5 km a oeste, parece mover-se para o sul a 5 km/h. (*a*) Qual é a velocidade real deste barco? (*b*) A que distância passarão mais perto os dois barcos?

1.125. Prove que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) = 0$.

1.126. Resolva a equação $d^2\mathbf{r}/dt^2 = -g\mathbf{k}$, onde g é uma constante, desde que $\mathbf{r} = 0$, $d\mathbf{r}/dt = v_0\mathbf{k}$ em $t = 0$.

1.127. Se $\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, mostre que $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$ em todos pontos, exceto $(0, 0, 0)$.

1.128. A velocidade de uma bala de canhão na sua boca é de 96 km/h. Quanto tempo gastará a bala para percorrer o cano do canhão, que tem 66 cm de comprimento, considerando que a bala seja uniformemente acelerada?
Resp. 0,05 s

1.129. Uma escada AB de 7,5 m está apoiada em uma parede vertical OA, como na fig. 1-29. Se o pé B da escada for puxado para fora da parede a 3,6 m/s, ache (*a*) a velocidade e (*b*) a aceleração do topo A da escada, no instante em que B está a 4,5 m da parede.
Resp. (*a*) 2,7 m/s para baixo, (*b*) 3,375 m/s² para baixo.

1.130. Prove que (*a*) $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \leqq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$, (*b*) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}| \leqq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|$. Dê uma interpretação geométrica possível.

1.131. Um trem parte do repouso, com aceleração uniforme. Após 10 segundos, ele tem uma velocidade de 20 km/h. (*a*) Quanto êle percorrerá, após 15 segundos e (*b*) qual será sua velocidade em km/h?
Resp. (*a*) 62 m, (*b*) 30 km/h

1.132. Prove que a magnitude da aceleração de uma partícula movendo-se sobre uma curva espacial é $\sqrt{(dv/dt)^2 + v^4/R^2}$. onde v é a velocidade em módulo tangencial e R é o raio de curvatura.

1.133. Se $\mathbf{T}$ é o vetor unitário tangente à curva C e $\mathbf{A}$ é um vetor campo, prove que

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

onde s é o parâmetro de comprimento do arco.

1.134. Se $\mathbf{A} = (2x - y + 4)\mathbf{i} + (5y + 3x - 6)\mathbf{j}$, avalie em torno de um triângulo com vértices em $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(3, 2, 0)$.
Resp. 12

1.135. Um motorista, em um automóvel, parte de um ponto A de uma autopista e pára no ponto B, após percorrer a distância D no tempo T. Durante o curso

da viagem, êle corre à velocidade máxima V. Considerando que a aceleração é constante, tanto no início, como no fim da viagem, mostre que o tempo durante o qual êle viaja à máxima velocidade é de $2D/V - T$.

1.136. Prove que as medianas de um triângulo (*a*) podem formar um triângulo, (*b*) encontre um ponto que divida o comprimento da mediana na razão de dois para um.

1.137. Se uma partícula tem velocidade $\mathbf{v}$ e aceleração $\mathbf{a}$ ao longo de uma curva espacial, prove que o raio de curvatura de sua trajetória é dado numericamente por

$$R = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

1.138. Prove que a área de um triângulo formado pelos vetores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ é $\frac{1}{2}|\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + \mathbf{C} \times \mathbf{A}|$.

1.139. (*a*) Prove que a equação $\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}$ pode ser resolvida se, e somente se, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, (*b*) Mostre que uma solução é $\mathbf{X} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}/A^2$. (*c*) Pode-se achar a solução geral?
Resp. $\mathbf{X} = \mathbf{B} \times \mathbf{A}/A^2 + \lambda\mathbf{A}$, onde λ é um escalar qualquer.

1.140. Ache todos os vetores X tais que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = p$.
Resp. $\mathbf{X} = p\mathbf{A}/A^2 + \mathbf{V} \times \mathbf{A}$, onde $\mathbf{V}$ é um vetor arbitrário.

1.141. Por qualquer ponto dentro de um triângulo são passadas três linhas paralelas, respectivamente, a cada um dos três lados do triângulo e terminando nos dois outros lados. Prove que a soma das razões dos comprimentos destas linhas pelos lados correspondentes é 2.

1.142. Se $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ são o vetor unitário tangente, o vetor unitário normal principal e o vetor unitário binormal à curva espacial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$, considerada diferenciável, prove que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}, \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}$$

Estas são chamadas *fórmulas de Frenet-Serret*. Nestas fórmulas, κ é chamado de *curvatura*, τ é a *torção* e os seus recíprocos $R = 1/\kappa$, $\sigma = 1/\tau$ são chamados de *raio de curvatura* e *raio de torção*.

1.143. Na fig. 1-31, AB é uma haste de pistão de comprimento l. Se A se move ao longo da linha horizontal CD, enquanto B se move com velocidade angular constante ω em tôrno do círculo de raio a com centro em O, ache (*a*) a velocidade e (*b*) a aceleração de A.

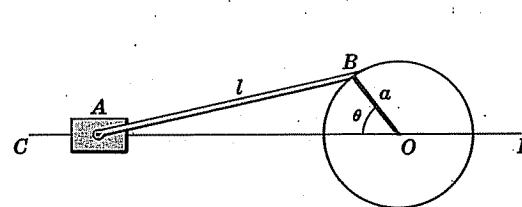
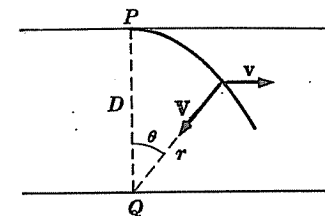



Fig. 1-31 Fig. 1-32

1.144. Um barco deixa o ponto P [veja a fig. 1-32] de um lado do rio e anda com velocidade constante $\mathbf{V}$ na direção do ponto Q do outro lado do rio diretamente oposto a P e cuja distância é D. Se r é a distância instantânea de Q ao barco, θ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e PQ e o rio tem uma velocidade v, prove que a trajetória do barco é dada por

$$r = \frac{D \sec\theta}{(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)^{v/V}}$$

1.145. Se $v = V$ no probl. 1.144, prove que a trajetória é um arco de parábola.

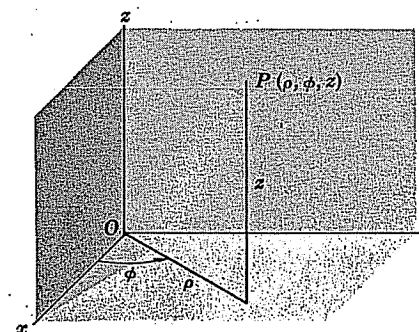
1.146. (*a*) Prove que, em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) [veja a fig. 1-33] o vetor-posição é $\mathbf{r} = \rho\cos\phi\,\mathbf{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
(*b*) Expresse a velocidade em coordenadas cilíndricas.
(*c*) Expresse a aceleração em coordenadas cilíndricas.
Resp. (*b*) $\mathbf{v} = \dot\rho\,\boldsymbol{\rho}_1 + \rho\dot\phi\,\boldsymbol{\phi}_1 + \dot z\mathbf{k}$
(*c*) $\mathbf{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\,\boldsymbol{\rho}_1 + (\rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi)\,\boldsymbol{\phi}_1 + \ddot z\,\mathbf{k}$

Coordenadas Cilíndricas

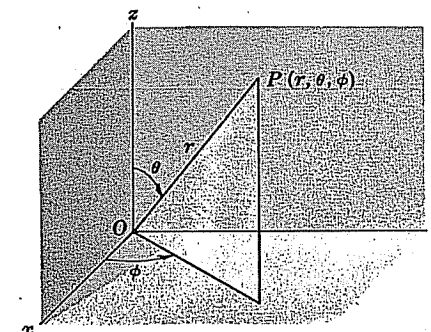
Fig. 1-33

Coordenadas Esféricas

Fig. 1-34

1.147. (*a*) Prove que, em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) [veja a fig. 1-34], o vetor posição é $\mathbf{r} = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{i} + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \mathbf{j} + \mathbf{r} \cos \theta \mathbf{k}$
(*b*) Expresse a velocidade em coordenadas esféricas.
(*c*) Expresse a aceleração em coordenadas esféricas.
Resp. (*b*) $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{\theta}_1 + r\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta\, \boldsymbol{\phi}_1$

(*c*) $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\mathbf{r}_1 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)\boldsymbol{\theta}_1$
$+ (2r\dot{\theta}\dot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta + r\ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta)\boldsymbol{\phi}_1$

1.148. Mostre que, se uma partícula se move no plano xy, os resultados dos probls. 1.146 e 1.147 reduzem-se aos do probl. 1.49.

Capítulo 2

As Leis de Newton do Movimento, Trabalho, Energia e Momentum

AS LEIS DE NEWTON

As três leis do movimento enunciadas por Isaac Newton são consideradas os axiomas da Mecânica:

1. Uma partícula permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta (i.e., com velocidade constante), a menos que seja compelida a mudar este estado por forças a ela aplicadas.

2. Se $\mathbf{F}$ é a fôrça aplicada (externa) em uma partícula de massa m, a qual como consequência se move com velocidade $\mathbf{v}$, então

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1}$$

onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é chamado de *momentum*. Se m independe do tempo t, pode-se escrever

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \tag{2}$$

onde $\mathbf{a}$ é a aceleração da partícula.

3. Sempre que uma partícula 1 exerce uma fôrça $\mathbf{F}_{12}$ sôbre a partícula 2, a partícula 2 também exerce uma força $\mathbf{F}_{21}$ sobre a partícula 1, e as fôrças são da mesma intensidade, mesma linha de ação e sentidos contrários $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$. Em outras palavras, a cada ação corresponde uma reação igual e de sentido oposto.

DEFINIÇÕES DE FORÇA E MASSA

Os conceitos de *fôrça* e *massa*, dados nos axiomas acima, não estão ainda definidos, embora intuitivamente nós tenhamos uma idéia de massa como a medida da "quantidade de matéria de um objeto" e fôrça como uma medida de "quanto se puxa ou empurra um objeto". Pode-se, entretanto, usar os axiomas acima para desenvolver suas definições [veja probl. 2.28].

AS UNIDADES DE FORÇA E MASSA

As unidades padrões de massa são o *grama* (g) no sistema CGS (centímetro-grama-segundo) e o *quilograma* (kg) no sistema MKS (metro-kilograma-segundo). As unidades padrões de fôrça nestes sistemas são o *dina* e o *newton*, respectivamente. Um *dina* é a fôrça que dá a uma massa de 1 g uma aceleração de 1 cm/s^2. Um *newton* é a força que dá a uma massa de 1 kg uma aceleração de 1 m/s^2. As relações entre estas unidades estão no Apêndice A.

SISTEMAS INERCIAIS DE REFERÊNCIA. MOVIMENTO ABSOLUTO

As leis de Newton são postuladas sob a hipótese de que todas as medidas e observações são tomadas em relação a um sistema de coordenadas ou sistema de referência que está fixo no espaço ou está em repouso absoluto. Esta é a hipótese de que espaço e movimento são absolutos. Entretanto, deve ficar bem claro que uma partícula pode estar em repouso ou com um movimento uniforme em linha reta com respeito a um sistema de referência e percorrendo uma trajetória curva e acelerando com respeito a um outro sistema de referência.

Pode-se mostrar que, se as leis de Newton são verificadas para um sistema de referência, então elas serão verificadas em um outro sistema de referência que se mova com uma velocidade constante a ele relativa [veja probl. 3.2]. Todos estes sistemas de referência são chamados de *sistemas de referência inerciais* ou *sistemas de referência Newtonianos.* Para qualquer observador, em um destes sistemas a força exercida em uma partícula será a mesma. Este é o chamado *princípio clássico da relatividade.*

A Terra não é exatamente um sistema inercial, mas, para muitos fins práticos, pode ser assim considerada, desde que os movimentos em observação não tenham grandes velocidades. Para sistemas não-inerciais, nós usamos os métodos do cap. 6. Para velocidades da ordem da velocidade da luz (300.000 km/s), devem ser usadas as *leis da relatividade de Einstein* ou *mecânica relativista.*

TRABALHO

Se uma fôrça $\mathbf{F}$ aplicada a uma partícula dando a ela um deslocamento $d\mathbf{r}$, então o *trabalho* feito pela fôrça sôbre a partícula é definido como

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{3}$$

desde que somente a componente de $\mathbf{F}$ na direção de $d\mathbf{r}$ esteja produzindo o movimento.

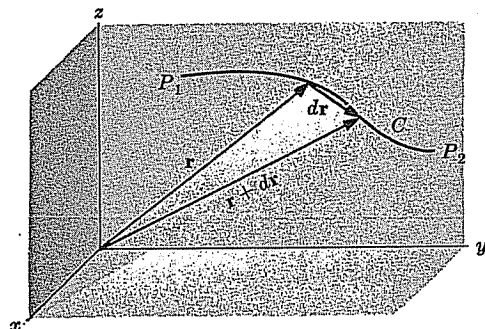



Fig. 2-1

O trabalho total feito por um campo de fôrça (campo de vetor) $\mathbf{F}$ para o movimento da partícula do ponto P_1 para o ponto P_2 ao longo de uma trajetória C da fig. 2-1 é dado pela integral de linha [veja cap. 1].

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{4}$$

onde $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são os vetores de posição de P_1 e P_2, respectivamente.

POTÊNCIA

A razão do trabalho feito em uma partícula pelo tempo é, geralmente, chamada de *potência instantânea* ou, sucintamente, de *potência*, aplicada a uma partícula. Usando os símbolos W e $\mathcal{P}$ para trabalho e potência respectivamente, tem-se:

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt} \tag{5}$$

Se $\mathbf{F}$ é a fôrça atuante sobre uma partícula e v é a velocidade da partícula, então tem-se

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{6}$$

ENERGIA CINÉTICA

Considerando a partícula acima com uma massa constante, que, nos tempos t_1 e t_2, esteja localizada em P_1 e P_2, se mova com as velocidades $\mathbf{v}_1 = d\mathbf{r}_1/dt$ e $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{r}_2/dt$, respectivamente. Então, prova-se o seguinte [veja probl. 2.8].

Teorema 2.1. O trabalho total realizado no movimento da partícula de P_1 e P_2 ao longo de C, é dado por

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \tag{7}$$

Se chamarmos
$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{8}$$

a energia cinética da partícula, então o teorema 2.1 é equivalente à afirmação

$$\begin{aligned}&\text{Trabalho Total feito de } P_1 \text{ a } P_2 \text{ ao longo de } C \\ &= \text{Energia cinética em } P_2 - \text{Energia cinética em } P_1\end{aligned} \tag{9}$$

ou, em símbolos,
$$W = T_2 - T_1 \tag{10}$$

onde $T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, $T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$.

CAMPOS DE FÔRÇA CONSERVATIVOS

Considerando existir uma função escalar V tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Então, pode-se provar o seguinte [veja probl. 2.15].

Teorema 2.2. O trabalho total realizado em mover a partícula de P_1 a P_2 ao longo de C é

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(P_1) - V(P_2) \tag{11}$$

Em tal caso, o trabalho realizado é *independente da trajetória* C que liga os pontos P_1 e P_2. Se o trabalho realizado por um campo de força, ao mover uma partícula de um ponto a um outro, é independente da trajetória que liga os dois pontos, então o campo de força é chamado de *conservativo.*

Os seguintes teoremas são válidos:

Teorema 2.3. O campo de força **F** é conservativo se, e somente se, existir um campo escalar V diferenciável continuamente, tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ ou, se, e somente se,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot. } \mathbf{F} = 0 \quad \text{identicamente.} \tag{12}$$

Teorema 2.4. Um campo de força **F** diferenciável continuamente é conservativo se, e somente se, para *qualquer* trajetória fechada C, não se interseccionando (curva fechada simples),

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{13}$$

ou, em outras palavras, o trabalho total realizado em movimentar uma partícula ao longo de uma trajetória fechada é zero.

ENERGIA POTENCIAL OU POTENCIAL

O escalar V tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ é chamado de *energia potencial*, também chamado de *potencial escalar* ou, sucintamente, de *potencial* da partícula no campo de força **F** conservativo. Em tal caso, a equação (11) do teorema 2.2 pode ser escrita

$$\begin{aligned}&\text{Trabalho Total realizado de } P_1 \text{ a } P_2 \text{ ao longo de } C \\ &= \text{Energia Potencial em } P_1 - \text{Energia Potencial em } P_2\end{aligned} \tag{14}$$

ou, em símbolos,

$$W = V_1 - V_2 \tag{15}$$

onde $V_1 = V(P_1)$, $V_2 = V(P_2)$.

Deve ser notado que o potencial é definido, a menos de uma constante aditiva arbitrária.

Pode-se expressar o potencial como

$$V = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{16}$$

onde se supõe que $V = 0$ quando $r = r_0$.

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

Para um campo de força conservativo, tem-se, das equações (10) e (15),

$$T_2 - T_1 = V_1 - V_2 \quad \text{ou} \quad T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17}$$

que podem ser escritas como

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + V_2 \tag{18}$$

A quantidade $E = T + V$, a qual é a soma da energia cinética e energia potencial, é chamada de *energia total*. De (18) vê-se que a energia total em P_1 é a mesma que a energia total em P_2. Pode-se fixar esta conclusão como

Teorema 2.5. Em um campo de força conservativo, a energia total, [i.e., a soma da energia cinética e da energia potencial] é constante. Em símbolos, $T + V$ = constante $= E$.

Este teorema é, geralmente, chamado de princípio da *conservação da energia*.

IMPULSO

Na fig. 2-1, considere que a partícula está em P_1 e P_2 nos tempos t_1 e t_2 onde tem as velocidades v_1 e v_2, respectivamente. A integral no tempo da força **F** dada por

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt \tag{19}$$

é chamada o *impulso* da força **F**. O seguinte teorema pode ser provado [veja probl. 2.18].

Teorema 2.6. O impulso é igual à mudança de momentum; ou, em símbolos,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 \tag{20}$$

O teorema é verdadeiro, mesmo que a massa seja variável e a força não conservativa.

TORQUE E MOMENTUM ANGULAR

Se uma partícula com posição representada por um vetor **r** move-se em um campo de força **F** [fig. 2-2], define-se

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{21}$$

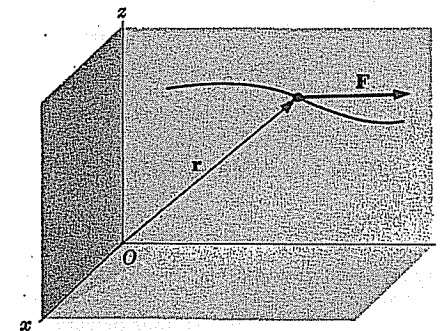



Fig. 2-2

como o *torque* ou *momento* de uma força **F** em torno de O. A magnitude de Λ é a medida do "efeito de rotação" produzido pela força sobre a partícula. Pode-se provar que [veja probl. 2.20]

Teorema 2.7.

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\{m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} \tag{22}$$

A quantidade

$$\mathbf{\Omega} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \tag{23}$$

é chamada de *momentum angular* ou *momento de momentum* em torno de O. Em palavras, o teorema estabelece que o torque agente sobre a partícula iguala-se à razão da mudança de seu momentum angular pelo tempo, ou,

$$\Lambda = \frac{d\Omega}{dt} \tag{24}$$

Este teorema é verdadeiro, mesmo que a massa m seja variável ou a força não-conservativa.

CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

Se fizermos $\mathbf{F} = 0$ na segunda lei de Newton, acha-se

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad m\mathbf{v} = \text{constante} \tag{25}$$

Isto leva ao seguinte

Teorema 2.8. Se a fôrça externa resultante exercida sobre uma partícula é zero, seu momentum permanecerá constante.

Este teorema é, geralmente, chamado de princípio da *conservação de momentum*. Para o caso de massa constante, ele é equivalente à primeira lei de Newton.

CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM ANGULAR

Se fizermos $\Lambda = O$ em (24), acharemos

$$\frac{d}{dt}\{m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \text{constante} \tag{26}$$

Isto leva ao seguinte

Teorema 2.9. Se o torque externo resultante exercido sobre uma partícula é zero, o momentum angular permanecerá constante.

Este teorema é sempre chamado o princípio de *conservação do momento angular*.

FORÇAS NÃO-CONSERVATIVAS

Se não houver uma função escalar V tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$ [ou, equivalentemente, se $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$], então $\mathbf{F}$ é chamado de campo de força *não-conservativa*. Os resultados (7), (20) e (24) acima são válidos para todos os tipos de campos de fôrça, conservativos ou não. Entretanto, (11) e (17) ou (18) são válidos apenas para os campos de força conservativos.

ESTÁTICA OU EQUILÍBRIO DE UMA PARTÍCULA

Um importante caso especial de movimento de uma partícula ocorre quando a partícula está ou parece estar *em repouso* ou *em equilíbrio* com respeito a um sistema de coordenadas inercial ou sistema de referência. Uma condição necessária e suficiente para isto é que, da segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{27}$$

ou a fôrça resultante (externa) exercida sobre a partícula seja zero.

Se o campo de fôrça é conservativo com um potencial V, então uma condição necessária e suficiente para que uma partícula esteja em equilíbrio em um ponto é que

$$\nabla V = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

neste ponto.

ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

Se uma partícula, a qual é deslocada um pouco de um ponto de equilíbrio P, e tende a voltar a P, então chama-se P, de *ponto de estabilidade* ou *ponto estável* e o equilíbrio é dito ser *estável*. Vice-versa, diz-se que o ponto é de *instabilidade* e o equilíbrio é *instável*. O teorema seguinte é fundamental.

Teorema 2.10. Uma condição necessária e suficiente para que um ponto de equilíbrio seja estável é que o potencial V seja mínimo neste ponto.

Problemas Resolvidos

LEIS DE NEWTON

2.1. Devido a um campo de força, uma partícula de massa 5 unidades se move ao longo de uma curva espacial, cujo vetor posição é dado pela função no tempo t por

$$\mathbf{r} = (2t^3 + t)\mathbf{i} + (3t^4 - t^2 + 8)\mathbf{j} - 12t^2\mathbf{k}$$

Ache (*a*) a velocidade, (*b*) o momentum, (*c*) a aceleração e (*d*) o campo de força no tempo t.

(*a*) Velocidade $= \mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = (6t^2 + 1)\mathbf{i} + (12t^3 - 2t)\mathbf{j} - 24t\mathbf{k}$

(*b*) Momentum $= \mathbf{p} = m\mathbf{v} = 5\mathbf{v} = (30t^2 + 5)\mathbf{i} + (60t^3 - 10t)\mathbf{j} - 120t\mathbf{k}$

(*c*) Aceleração $= \mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 12t\mathbf{i} + (36t^2 - 2)\mathbf{j} - 24\mathbf{k}$

(*d*) Força $= \mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 60t\mathbf{i} + (180t^2 - 10)\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$

2.2. A partícula de massa m move-se no plano xy; assim, o vetor de posição é

$$\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

onde a, b, e ω são constantes positivas e $a > b$. (*a*) Mostre que a partícula move em uma elipse. (*b*) Mostre que a força atuante na partícula é sempre dirigida para a origem.

(*a*) O vetor-posição é

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

e, assim, $x = a \cos \omega t$, $y = b \operatorname{sen} \omega t$ que são as equações paramétricas de uma elipse, tendo os semi-eixos maior e menor de comprimento a e b, respectivamente [veja fig. 2-3].

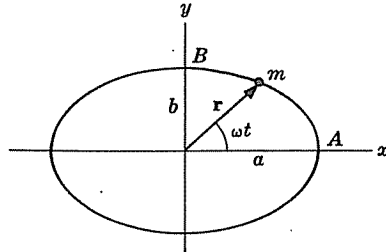



Fig. 2-3

Desde que

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = \cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t = 1$$

a elipse é também dada por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(*b*) Supondo que a partícula tenha massa m constante e a força atuante nela seja

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}[(a\cos\omega t)\mathbf{i} + (b\operatorname{sen}\omega t)\mathbf{j}]$$

$$= m[-\omega^2 a\cos\omega t\,\mathbf{i} - \omega^2 b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}]$$

$$= -m\omega^2[a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j}] = -m\omega^2\mathbf{r}$$

o que mostra que a força é sempre dirigida para a origem.

2.3. Dois observadores O e O' fixos relativamente a dois sistemas de coordenadas $Oxyz$ e $O'x'y'z'$, respectivamente, observam o movimento da partícula P no espaço [veja fig. 2-4]. Mostre que a ambos observadores a partícula age como se estivesse sob a ação da mesma força se, e somente se, os sistemas de coordenadas se movem relativamente um ao outro com velocidade constante.

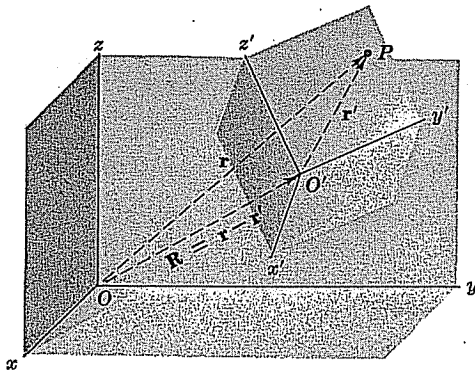



Fig. 2-4

Sejam os vetores de posição das partículas $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ nos sistemas de coordenadas $Oxyz$ e $O'x'y'z'$, respectivamente, e que o vetor de posição de O' com respeito a O seja $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

As forças atuantes em P relativamente aos observadores O e O', de acordo com as leis de Newton, são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad \mathbf{F}' = m\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$$

A diferença das forças observadas é de

$$\mathbf{F} - \mathbf{F}' = m\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = m\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$$

e ela será nula se, e somente se

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = O \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \text{constante}$$

i.e., os sistemas de coordenadas movem-se relativamente um ao outro, com velocidade constante. Estes sistemas de coordenadas são os chamados *sistemas de coordenadas inerciais.*

O resultado pode ser chamado de *princípio clássico da relatividade.*

2.4. Uma partícula de massa 2 move-se em um campo de força variável no tempo e dado por

$$\mathbf{F} = 24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}$$

Supondo que em $t = 0$, a partícula esteja localizada em $\mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e que tenha velocidade $\mathbf{v}_0 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$, ache (*a*) a velocidade e (*b*) a posição no tempo t.

(*a*) Pela segunda lei de Newton

$$2d\mathbf{v}/dt = 24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}$$

ou

$$d\mathbf{v}/dt = 12t^2\mathbf{i} + (18t - 8)\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$$

Integrando em relação a t e chamando $\mathbf{c}_1$ a constante de integração, tem-se

$$\mathbf{v} = 4t^3\mathbf{i} + (9t^2 - 8t)\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ em $t = 0$, então $\mathbf{c}_1 = 6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ e, assim,

$$\mathbf{v} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

(*b*) Desde que $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, do item (*a*) obtém-se

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

que, integrado em relação a t e chamando $\mathbf{c}_2$ de constante de integração,

$$\mathbf{r} = (t^4 + 6t)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t)\mathbf{j} - (t^3 + 8t)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Desde que $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ em $t = 0$, então $\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e, assim,

$$\mathbf{r} = (t^4 + 6t + 3)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\mathbf{j} + (4 - t^3 - 8t)\mathbf{k}$$

2.5. Uma força $\mathbf{F}$ constante atuando em uma partícula de massa m muda a sua velocidade de $\mathbf{v}_1$ para $\mathbf{v}_2$ no tempo τ.

(*a*) Prove que $\mathbf{F} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/\tau$.

(*b*) O resultado de (*a*) será o mesmo, sendo a força variável? Explique.

(*a*) Pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} \tag{1}$$

Então, se $\mathbf{F}$ e m são constantes, feita a integração, obtém-se

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F}/m)t + \mathbf{c}_1$$

Em $t = 0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ tal que $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1$, i.e.,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{F}/m)t + \mathbf{v}_1 \tag{2}$$

Em $t = \tau$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ tal que $\quad \mathbf{v}_2 = (\mathbf{F}/m)\tau + \mathbf{v}_1$

i.e., $\quad \mathbf{F} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)/\tau \quad (3)$

Outro método

Escreva (1) como $m d\mathbf{v} = \mathbf{F} dt$. Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ em $t = 0$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ em $t = \tau$, obtém-se

$$\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} m\, d\mathbf{v} = \int_0^{\tau} \mathbf{F}\, dt \quad \text{ou} \quad m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{F}\tau$$

que é o resultado.

(*b*) Não, o resultado em geral não se mantém, se $\mathbf{F}$ não for constante, pois, em tal caso, não se obtém o mesmo resultado da integração realizada em (*a*).

2.6. Ache a força constante, no (*a*) sistema CGS, e (*b*) sistema MKS, necessária para acelerar uma massa de 10.000 g movendo-se ao longo de uma linha reta de uma velocidade de 54 km/h até 108 km/h em 5 minutos.

Suponha que o movimento seja na direção positiva do eixo x. Então, se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são as velocidades, tem-se dos dados que $\mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}$ km/h, $\mathbf{v}_2 = 108\mathbf{i}$ km/h, $m = 10.000$g, $t = 5$ min.

(*a*) No sistema CGS

$m = 10^4$ g, $\mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}\,km/h = 1{,}5 \times 10^3\mathbf{i}$ cm/s, $\mathbf{v}_2 = 3{,}0 \times 10^3\,\mathbf{i}$ cm/s, $t = 300$s

Então,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (10^4\ \text{g})\left(\frac{1{,}5 \times 10^3\,\mathbf{i}\ \text{cm/s}}{3 \times 10^2\ \text{s}}\right)$$

$$= 0{,}5 \times 10^5\,\mathbf{i}\ \text{g cm/s}^2 = 5 \times 10^4\,\mathbf{i}\ \text{dinas}$$

Assim, a magnitude da força é de 50.000 dinas na direção positiva do eixo x.

(*b*) No sistema MKS

$m = 10$ kg, $\quad \mathbf{v}_1 = 54\mathbf{i}$ km/h $= 15\mathbf{i}$ m/s, $\quad \mathbf{v}_2 = 30\mathbf{i}$ m/s, $\quad t = 300$ s

Então,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (10\ \text{kg})\left(\frac{15\mathbf{i}\ \text{m/s}}{300\ \text{s}}\right)$$

$$= 0{,}5\mathbf{i}\ \text{kg m/s}^2 = 0{,}5\mathbf{i}\ \text{newtons}$$

Assim, a magnitude é de 0,5 newtons na direção positiva do eixo x. Este resultado poderia ser obtido do item (*a*) notando-se que 1 newton $= 10^5$ dinas ou 1 dina $= 10^{-5}$ newtons.

Neste problema simples, o vetor unitário é, algumas vezes, omitido, sendo subentendido que a força $\mathbf{F}$ terá a direção positiva do eixo x. Entretanto, é melhor trabalhar assim, e os problemas semelhantes apresentam-se com este vetor unitário para enfatizar o caráter de vetor da força, velocidade, etc. Isto é especialmente importante em casos em que as velocidades podem mudar suas direções. Veja, por exemplo, o probl. 2.46.

2.7. Qual a força constante necessária para trazer certa massa de 1.000 kg, de uma velocidade de 90 km/h ao repouso em 4 segundos.

Supondo que o movimento seja em linha reta na direção positiva do eixo x. Então, usando o sistema de unidade MKS, tem-se

$m = 1.000$ kg, $\quad \mathbf{v}_1 = 90\mathbf{i}$ km/h $= 25$ m/s, $\quad \mathbf{v}_2 = 0\mathbf{i}$ m/s, $\quad t = 4$ s

Então, $$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t}\right) = (1.000)\ \text{kg}\left(\frac{-25\mathbf{i}\ \text{m/s}}{4\ \text{s}}\right)$$

$$= -1{,}25 \times 10^4\,\mathbf{i}\ \text{m kg/s}^2 = -1{,}25 \times 10^4\,\mathbf{i}\ \text{newtons}$$

Assim, a força tem uma magnitude de $1{,}25 \times 10^4$ newtons na direção negativa do eixo x, i.e., na direção oposta à do movimento. Como era de se esperar.

TRABALHO, POTÊNCIA E ENERGIA CINÉTICA

2.8. A partícula de massa m constante move-se no espaço sob influência de um campo de força F. Supondo que, nos tempos t_1 e t_2, as velocidades sejam $\mathbf{v}_1$

e $\mathbf{v}_2$, respectivamente, prove que o trabalho realizado é igual à mudança de energia cinética, i.e.,

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$$\text{Trabalho realizado} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}\,dt = m\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$$

$$= \tfrac{1}{2}m\int_{t_1}^{t_2} d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_{t_1}^{t_2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

2.9. Ache o trabalho realizado em mover um objeto por uma trajetória dada pelo vetor $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ se a força aplicada é $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Refira-se à fig. 2-5.

Trabalho realizado = (magnitude da força na direção do movimento) (distância percorrida)

$$= (F\cos\theta)(r) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$$
$$= (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$$
$$= 6 - 2 + 5 = 9$$

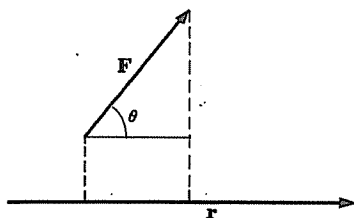



Fig. 2-5

2.10. Referindo-se ao probl. 2.2, (*a*) ache a energia cinética da partícula nos pontos A e B, (*b*) ache o trabalho realizado pelo campo de força em mover a partícula de A para B, (*c*) obtenha o resultado do probl. 2.8 neste caso e (*d*) mostre que o trabalho total realizado, feito pelo campo de força ao mover a partícula, ao longo de uma elipse, é zero.

(*a*) Velocidade $= \mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = -\omega a \operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega b\cos\omega t\,\mathbf{j}$.
Energia cinética $= \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\omega^2 a^2 \operatorname{sen}^2\omega t + \omega^2 b^2\cos^2\omega t)$.
Energia cinética em $A\,|$onde $\cos\omega t = 1,\ \operatorname{sen}\omega t = 0| = \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2$
Energia cinética em $B\,|$onde $\cos\omega t = 0,\ \operatorname{sen}\omega t = 1| = \tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2$

(*b*) *Método* 1. Do item (*b*) do probl. 2.2,

$$\text{Trabalho realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B (-m\omega^2\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -m\omega^2\int_A^B \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\tfrac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = -\tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2\Big|_A^B$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$$

Método 2. Pode-se supor que, em A e B, $t = 0$ e $t = \pi/2\omega$, respectivamente. Então:

$$\text{Trabalho realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^{\pi/2\omega} [-m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{j})]\cdot[-\omega a\operatorname{sen}\omega t\,\mathbf{i} + \omega b\cos\omega t\,\mathbf{j}]\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2\omega} m\omega^3(a^2 - b^2)\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\omega t\Big|_0^{\pi/2\omega} = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)$$

(*c*) Dos itens (*a*) e (*b*),

$$\text{Trabalho realizado} = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2) = \tfrac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2 b^2$$
$$= \text{energia cinética em } A - \text{Energia cinética em } B$$

(*d*) Usando o método 2 da parte (*b*), desde que t varia de 0 a $t = 2\pi/\omega$ para um circuito completo em torno da elipse,

$$\text{Trabalho realizado} = \int_0^{2\pi/\omega} m\omega^3(a^2 - b^2)\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2\omega t\Big|_0^{2\pi/\omega} = 0$$

O método 1 pode também ser usado, para obter o mesmo resultado.

2.11. Prove que, se $\mathbf{F}$ é a força atuante em uma partícula e $\mathbf{v}$ a velocidade (instantânea) da partícula, então a potência (instantânea) aplicada à partícula é dada por

$$\mathscr{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

Pela definição, o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}$, ao dar à partícula um deslocamento $d\mathbf{r}$ é

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Assim, a potência (instantânea) é dada por

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

como foi pedido.

2.12. Ache a potência (instantânea) aplicada à partícula do probl. 2.1 pelo campo de força.

Pelo probl. 2.1, a velocidade e a força são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{v} = (6t^2 + 1)\mathbf{i} + (12t^3 - 2t)\mathbf{j} - 24t\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{F} = 60t\mathbf{i} + (180t^2 - 10)\mathbf{j} - 120\mathbf{k}$$

Então, a potência [pelo probl. 2.11] é dada por

$$\mathscr{P} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = (60t)(6t^2 + 1) + (180t^2 - 10)(12t^3 - 2t) + (120)(24t)$$
$$= 2160t^5 - 120t^3 + 2960t$$

2.13. Ache o trabalho realizado pela força no (*a*) probl. 2.6, (*b*) probl. 2.7.

(*a*) No sistema CGS: $v_1 = |\mathbf{v}_1| = 1{,}5 \times 10^3$ cm/s, $v_2 = |\mathbf{v}_2| = 3{,}0 \times 10^3$ cm/s, $m = 10^4$ g

Então, pelo probl. 2.8,

$$\text{Trabalho realizado} = \text{mudança de energia cinética} = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(10^4\,\text{g})(9{,}0 \times 10^6 - 2{,}25 \times 10^6)\frac{\text{cm}^2}{\text{s}^2}$$
$$= 3{,}38 \times 10^{10}\frac{\text{g cm}^2}{\text{s}^2} = 3{,}38 \times 10^{10}\left(\frac{\text{g cm}}{\text{s}^2}\right)(\text{cm})$$
$$= 3{,}38 \times 10^{10}\,\text{dina cm} = 3.38 \times 10^{10}\,\text{erg}$$

No sistema MKS, tem-se, igualmente:

$$\text{Trabalho realizado} = \tfrac{1}{2}(10\,\text{kg})(900 - 225)\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$= 3{,}38 \times 10^3\left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right)(\text{m}) = 3{,}38 \times 10^3\,\text{m newton}$$

(*b*) Como no itém (*a*),

$$\text{Trabalho realizado} = \tfrac{1}{2}(1000\,\text{kg})(25^2 - 0^2)\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$= 3{,}125 \times 10^5\left(\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 3{,}125 \times 10^5\,\text{m newton}$$

CAMPOS DE FORÇA CONSERVATIVOS, ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

2.14. Mostre que o campo de força $\mathbf{F}$ definido por

$$\mathbf{F} = (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,\mathbf{k}$$

é um campo de fôrça conservativo.

Método 1. O campo de força $\mathbf{F}$ é conservativo se, e somente se, rot. $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$. Ora,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2z^3 - 6xz^2 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 - 6x^2z \end{vmatrix}$$
$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(3xy^2z^2 - 6x^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^3)\right]$$
$$+ \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(y^2z^3 - 6xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy^2z^2 - 6x^2z)\right]$$
$$+ \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(2xyz^3) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2z^3 - 6xz^2)\right]$$
$$= \mathbf{0}$$

Então, o campo de força é conservativo.

Método 2. O campo de força $\mathbf{F}$ é conservativo se, e somente se, existir uma função escalar ou potencial $V(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = -\text{grad}\, V = -\nabla V$. Então,

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$
$$= (y^2z^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,\mathbf{k}$$

Assim, se $\mathbf{F}$ é conservativo, é possível achar V tal que

$$\partial V/\partial x = 6xz^2 - y^2z^3, \quad \partial V/\partial y = -2xyz^3, \quad \partial V/\partial z = 6x^2z - 3xy^2z^2 \qquad (1)$$

Integrando a primeira equação em relação a x mantendo y e z constantes, tem-se

$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + g_1(y, z) \qquad (2)$$

onde $g_1(y, z)$ é uma função de y e z.

Igualmente, integrando a segunda equação com respeito a y (mantendo x e z constantes) e a terceira equação com respeito a z (mantendo x e y constantes), tem-se

$$V = -xy^2z^3 + g_2(x, z) \qquad (3)$$
$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + g_3(x, y) \qquad (4)$$

Das equações (2), (3) e (4) obtém-se um V comum se se achar

$$g_1(y, z) = c, \quad g_2(x, z) = 3x^2z^2 + c, \quad g_3(x, y) = c \qquad (5)$$

onde c é uma constante arbitrária e segue-se que

$$V = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$$

que é o potencial pedido.

Método 3.

$$V = -\int_{r_0}^{r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} (y^2z^3 - 6xz^2)dx + 2xyz^3\,dy + (3xy^2z^2 - 6x^2z)dz$$

$$= -\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} d(xy^2z^3 - 3x^2z^2) = 3x^2z^2 - xy^2z^3 + c$$

onde $c = x_0y_0^2z_0^3 - 3x_0^2z_0^2$.

2.15. Prove o teorema 2.2: Se a força atuante sobre uma partícula é dada por $\mathbf{F} = -\nabla V$, então o trabalho total realizado ao mover a partícula de P_1 a P_2 ao longo da trajetória C é

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = V(P_1) - V(P_2)$$

Tem-se

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} -\nabla V\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} -dV = -V\Big|_{P_1}^{P_2} = V(P_1) - V(P_2)$$

2.16. Ache o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}$ do probl. 2.14 em mover uma partícula do ponto $A(-2,1,3)$ ao $B(1,-2,-1)$.

$$\text{Trabalho realizado} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -\nabla V\cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)} -dV = -V(x,y,z)\Big|_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)}$$

$$= -3x^2z^2 + xy^2z^3 - c\Big|_{(-2,1,3)}^{(1,-2,-1)} = 155$$

2.17. (*a*) Mostre que o campo de força do probl. 2.2 é conservativo.
(*b*) Ache a energia potencial nos pontos A e B da fig. 2-3.
(*c*) Ache o trabalho realizado pela força em mover a partícula de A a B e compare com o probl. 2.10(*b*).
(*d*) Ache a energia total da partícula e mostre que é constante, i.e., demonstre o princípio da conservação da energia.

(*a*) Do probl. 2(*b*), $\mathbf{F} = -m\omega^2\mathbf{r} = -m\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$. Então,

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -m\omega^2x & -m\omega^2y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2y)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2x) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right] + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-m\omega^2y) - \frac{\partial}{\partial y}(-m\omega^2x)\right]$$

$$= \mathbf{0}$$

Assim, o campo é conservativo.

(*b*) Desde que o campo seja conservativo, existe um potencial V tal que

$$\mathbf{F} = -m\omega^2x\mathbf{i} - m\omega^3y\mathbf{j} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

Então, $\partial V/\partial x = m\omega^2x$, $\partial V/\partial y = m\omega^2y$, $\partial V/\partial z = 0$

de onde, omitindo a constante, tem-se

$$V = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 + \tfrac{1}{2}m\omega^2y^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) = \tfrac{1}{2}m\omega^2r^2$$

que é o potencial pedido.

(*c*) Potencial no ponto A da fig. 2-3 [onde $r = a$] $= \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2$.
Potencial no ponto B da fig. 2-3 [onde $r = b$] $= \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2$. Então,

O trabalho realizado de A a B = potencial em A − potencial em B

$$= \tfrac{1}{2}m\omega^2a^2 - \tfrac{1}{2}m\omega^2b^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2-b^2)$$

concordando com o probl. 2.10(*b*).

(*d*) Pelo probl. 2.10, itens (*a*) e (*b*),

$$\text{Energia cinética em qualquer ponto} = T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = \tfrac{1}{2}m(\omega^2a^2\operatorname{sen}^2\omega t + \omega^2b^2\cos^2\omega t)$$

$$\text{Energia potencial em qualquer ponto} = V = \tfrac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2\cos^2\omega t + b^2\operatorname{sen}^2\omega t)$$

Assim, em qualquer ponto realizando a soma e usando a expressão

$$\operatorname{sen}^2\omega t + \cos^2\omega t = 1,$$
$$T + V = \tfrac{1}{2}m\omega^2(a^2+b^2)$$

a qual é constante.

IMPULSO, TORQUE, MOMENTUM ANGULAR E CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

2.18. Prove o teorema 2.6: O impulso da força é igual à mudança de momentum.

Por definição de impulso, veja (19) e, pela segunda lei de Newton, tem-se

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}(m\mathbf{v})\,dt = \int_{t_1}^{t_2}d(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}\Big|_{t_1}^{t_2} = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

2.19. Uma massa de 5.000 kg move-se em linha reta, mudando a velocidade de 540 km/h para 720 km/h em 2 minutos. Qual o impulso desenvolvido neste tempo?

Método 1. Suponha que a massa se mova na direção positiva do eixo x. No sistema MKS,

$$\mathbf{v}_1 = 540\mathbf{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{540\mathbf{i} \times 1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 1{,}5 \times 10^2\,\mathbf{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\mathbf{v}_2 = 720\mathbf{i}\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{720\mathbf{i} \times 1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = 2{,}0 \times 10^2\,\mathbf{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Então, do probl. 2.18,

$$\text{Impulso} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = (5000\,\text{kg})(0{,}5 \times 10^2\,\mathbf{i}\,\text{m/s})$$
$$= 2{,}5 \times 10^5\,\mathbf{i}\,\text{kg m/s} = 2{,}5 \times 10^5\,\mathbf{i}\,\text{newton s}$$

pois 1 newton = 1 kg m/s² ou 1 newton s = 1 kg m/s

Assim, o impulso tem uma magnitude de $2{,}5 \times 10^5$ newton s na direção positiva do eixo x.

Método 2.

Usando o sistema CGS, $\mathbf{v}_1 = 540\mathbf{i}\,\text{km/h} = 1{,}5 \times 10^4\mathbf{i}\,\text{cm/s}$ e $\mathbf{v}^2 = 720\mathbf{i}\,\text{km/h} = 2{,}0 \times 10^4\mathbf{i}\,\text{cm/s}$. Então,

$$\text{Impulso} = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = (5000 \times 10^3\,\text{g})(0{,}5 \times 10^4\,\mathbf{i}\,\text{cm/s})$$
$$= 2{,}50 \times 10^{10}\,\mathbf{i}\,\text{g cm/s} = 2{,}50 \times 10^{10}\,\mathbf{i}\,\text{ds}$$

pois 1 dina = 1 g cm/s² ou 1 dina s = 1 g cm/s.

Note que, para achar o impulso, não tem de ser usado o tempo de 2 minutos como foi dado pelo enunciado do problema.

2.20. Prove o teorema 2.7: O momento da força ou torque em torno da origem O de um sistema de coordenadas é igual à razão da mudança de momentum angular pelo tempo.

O momento da força ou torque em torno de O é

$$\Lambda = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

O momentum angular ou momento do momentum em torno de O é

$$\Omega = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v})$$

Agora, tem-se

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$
$$= \mathbf{v} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \Lambda$$

o que dá o resultado pedido.

2.21. Determine (*a*) o torque e (*b*) o momentum angular em torno da origem para a partícula do probl. 2.4 no instante t.

(*a*) Torque $\Lambda = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$= [(t^4+6t+3)\mathbf{i}+(3t^3-4t^2+15t-1)\mathbf{j}+(4-t^3-8t)\mathbf{k}] \times [24t^2\mathbf{i}+(36t-16)\mathbf{j}-12t\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^4+6t+3 & 3t^3-4t^2+15t-1 & 4-t^3-8t \\ 24t^2 & 36t-16 & -12t \end{vmatrix}$$

$$= (32t^3 + 108t^2 - 260t + 64)\mathbf{i} - (12t^5 + 192t^3 - 168t^2 - 36t)\mathbf{j}$$
$$- (36t^5 - 80t^4 + 360t^3 - 240t^2 - 12t + 48)\mathbf{k}$$

(*b*) Momentum angular $\Omega = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$

$$= 2[(t^4 + 6t + 3)\mathbf{i} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\mathbf{j} + (4 - t^3 - 8t)\mathbf{k}]$$
$$\times [(4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

$$= 2\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^4+6t+3 & 3t^3-4t^2+15t-1 & 4-t^3-8t \\ 4t^3+6 & 9t^2-8t+15 & -3t^2-8 \end{vmatrix}$$

$$= (8t^4 + 36t^3 - 130t^2 + 64t - 104)\mathbf{i} - (2t^6 + 48t^4 - 56t^3 - 18t^2 - 96)\mathbf{j}$$
$$- (6t^6 - 16t^5 + 90t^4 - 80t^3 - 6t^2 + 48t - 102)\mathbf{k}$$

Note que o torque é a derivada do momentum angular em relação a t, ilustrando o teorema do probl. 2.20.

2.22. Uma partícula move-se em um campo de força dado por $\mathbf{F} = r^2\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da partícula. Prove que o momentum angular da partícula é conservado.

O torque atuante sobre a partícula é

$$\Lambda = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (r^2\mathbf{r}) = r^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

Então, pelo teorema 2.9, o momentum angular é constante, i.e., o momentum angular é conservado.

FORÇAS NÃO CONSERVATIVAS

2.23. Mostre que o campo de força dado por $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xyz^2\mathbf{k}$ não é conservativo.

Tem-se

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^2yz & 0 & -xyz^2 \end{vmatrix} = -xz^2\mathbf{i} + (x^2y + yz^2)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$$

Então, como $\nabla \times \mathbf{F} \not\equiv 0$, o campo não é conservativo.

ESTÁTICA DA PARTÍCULA

2.24. A partícula P está sob a ação das forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_5$ e $\mathbf{F}_6$ mostradas na fig. 2-6. Represente geometricamente a força necessária para que P não se mova.

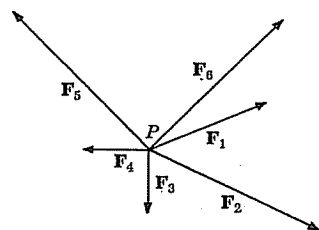



Fig. 2-6

Fig. 2-7

A resultante **R** das forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, $\mathbf{F}_4$, $\mathbf{F}_5$ e $\mathbf{F}_6$ pode ser achada pela adição de vetores como indicado na fig. 2-7. Tem-se que $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4 + \mathbf{F}_5 + \mathbf{F}_6$. A força necessária para que P não se mova é $-\mathbf{R}$, a qual é um vetor da mesma magnitude que **R**, mas de direção oposta e, algumas vezes, chamada de *equilibrante*.

2.25. Uma partícula está sob a ação das forças $\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 10\mathbf{i} + 25\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$ e $\mathbf{F}_3 = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$. Ache a força necessária para manter a partícula em equilíbrio.

A resultante das forças é

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = (5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 15\mathbf{k}) + (10\mathbf{i} + 25\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) + (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$$
$$= 30\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

E a força necessária para manter a partícula em equilíbrio é

$$-\mathbf{R} = -30\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

2.26. As forças coplanares indicadas na fig. 2-8 agem sobre uma partícula P. Ache a resultante destas forças (*a*) analiticamente e (*b*) graficamente. Qual é a força para manter a partícula em equilíbrio?

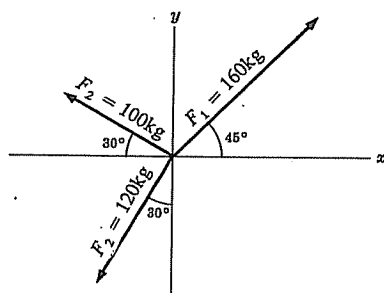
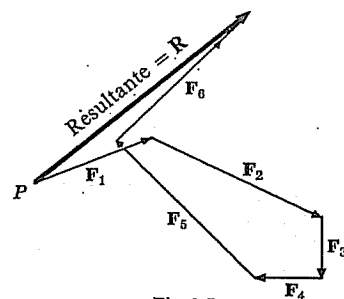
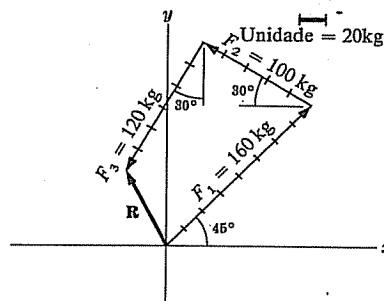



Fig. 2-8

Fig. 2-9

(*a*) *Analiticamente.* Da fig. 2-8 tem-se

$$\mathbf{F}_1 = 160\,(\cos 45°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45°\,\mathbf{j}), \quad \mathbf{F}_2 = 100\,(-\cos 30°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\,\mathbf{j}), \text{ e}$$
$$\mathbf{F}_3 = 120\,(-\cos 60°\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} 60°\,\mathbf{j})$$

Então, a resultante **R** é

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$
$$= (160\cos 45° - 100\cos 30° - 120\cos 60°)\mathbf{i} + (160\operatorname{sen} 45° +$$
$$+ 100\operatorname{sen} 30° - 120\operatorname{sen} 60°)\mathbf{j}$$
$$= -33{,}46\mathbf{i} + 59{,}21\mathbf{j}$$

Escreva $\mathbf{R} = R\cos\alpha\,\mathbf{i} + R\operatorname{sen}\alpha\mathbf{j}$, onde α é o ângulo com o eixo x positivo medido no sentido anti-horário; vê-se que

$$R\cos\alpha = -33{,}46, \qquad R\operatorname{sen}\alpha = 59{,}21$$

Assim, a magnitude de **R** é

$$R = \sqrt{(-33{,}46)^2 + (59{,}21)^2} = 68{,}0\ \text{kg}$$

e a direção α com relação à direção positiva do eixo x é dada por

$$\operatorname{tg}\alpha = 59{,}21/(-33{,}46) = -1.770 \quad \text{ou} \quad \alpha = 119°\,28'.$$

(*b*) *Graficamente.* Escolhendo uma unidade de 20 kg como é mostrado na fig. 2-9, acha-se que a resultante tem uma magnitude próxima de 68 kg e direção com um ângulo de, aproximadamente, 61° em relação à direção negativa do eixo x [usando um transferidor] assim o ângulo com a direção positiva do eixo é de, aproximadamente, 119°.

Uma força $-\mathbf{R}$, i.e., a oposta em direção a **R**, mas de igual magnitude, é necessária para manter P em equilíbrio.

ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

2.27. Uma partícula move-se ao longo do eixo x em um campo de força, tendo um potencial de $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$, $\kappa > 0$.

(*a*) Determine os pontos de equilíbrio e (*b*) investigue a estabilidade.

(*a*) Os pontos de equilíbrio ocorrem onde $\nabla V = 0$ ou neste caso

$$dV/dx = \kappa x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$

Assim, há somente um ponto de equilíbrio em $x = 0$.

(*b*) *Método 1.*

Como $d^2V/dx^2 = \kappa > 0$, segue que em $x = 0$, tem um mínimo. Assim, pelo teorema 2.10, $x = 0$ é um ponto de estabilidade. Isto pode ser visto também pelo probl. 2.36, onde é mostrado que a partícula oscila em torno de $x = 0$.

Método 2.

Como $\mathbf{F} = -\nabla V = -\dfrac{dV}{dx}\mathbf{i} = -\kappa x\mathbf{i}$. Então, para $x > 0$, a partícula sofre o efeito de uma força para a esquerda, e quando $x < 0$ a partícula sofre

um efeito de uma força para a direita. Assim, $x = 0$ é um ponto de estabilidade.

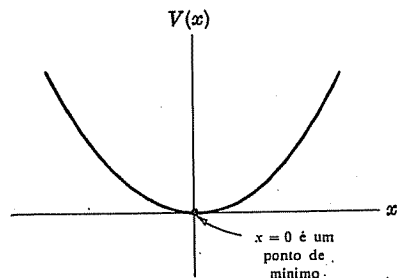



Fig. 2-10

Método 3.

O fato de que $x = 0$ é um ponto de mínimo pode ser visto pelo gráfico de $V(x)$ versus x [fig. 2-10].

PROBLEMAS DIVERSOS

2.28. Mostre como as leis de Newton podem ser usadas para desenvolver as definições de força e massa.

Considere, em primeiro lugar, uma dada partícula P, supondo que sua massa m_P não seja definida, mas seja simplesmente uma quantidade escalar constante associada a P. O axioma 1 estabelece que, se P se move com uma velocidade constante (a qual pode ser zero), então a força atuante nela é zero. O axioma 2 estabelece que, se a velocidade não é constante, então existe uma força atuando em P dada por $m_P \mathbf{a}_P$ onde $\mathbf{a}_P$ é a aceleração de P. Então, a força é definida pelos axiomas 1 e 2 [embora o axioma 1 seja desnecessário, pois ele pode ser deduzido do axioma 2, fazendo $\mathbf{F} = \mathbf{0}$]. Deve-se notar que a força é um vetor e, assim, tem todas as propriedades dos vetores, em particular a lei do paralelograma para a adição de vetores.

Para definir a massa m_P da partícula P, deixe que ela interatue com uma outra partícula que será considerada uma *partícula padrão*, a qual será tomada como uma partícula de *massa unitária*. Se $\mathbf{a}_P$ e $\mathbf{a}_S$ são as acelerações da partícula P e da partícula padrão, respectivamente, segue dos axiomas 2 e 3 que $m_P \mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_S$. Assim, a massa m_P pode ser definida como $-\mathbf{a}_S/\mathbf{a}_P$.

2.29. Ache o trabalho realizado em mover uma partícula em torno de um círculo C no plano xy, se o círculo tem o centro na origem e raio 3 e se o campo de força for dado por

$$\mathbf{F} = (2x - y + z)\mathbf{i} + (x + y - z^2)\mathbf{j} + (3x - 2y + 4z)\mathbf{k}$$

No plano $z = 0$, $\mathbf{F} = (2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$ e $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ assim, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C [(2x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}]\cdot[dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}]$$

$$= \int_C (2x - y)\,dx + (x + y)\,dy$$

Como as equações paramétricas do círculo são $x = 3\cos t$, e $y = 3\,\text{sen}\,t$, onde t varia de 0 a 2π [veja fig. 2-11]. Então, a integral de linha é

$$\int_{t=0}^{2\pi} [2(3\cos t) - 3\,\text{sen}\,t][-3\,\text{sen}\,t]\,dt$$

$$+ [3\cos t + 3\,\text{sen}\,t][3\cos t]\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (9 - 9\,\text{sen}\,t\cos t)\,dt$$

$$= 9t - \frac{9}{2}\text{sen}^2\,t\Big|_0^{2\pi} = 18\pi$$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
$= 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$

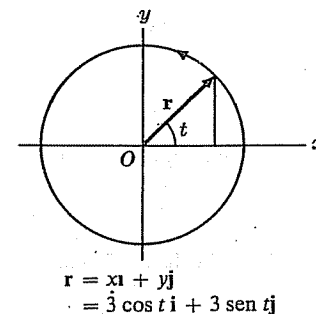



Fig. 2-11

Ao percorrer a trajetória C foi escolhido o sentido anti-horário indicado na fig. 2-11. Chama-se este sentido de sentido *positivo*, ou é o mesmo que dizer que se percorreu C no sentido positivo. Se C for percorrido no sentido horário (negativo), o valor da integral seria -18π.

2.30. (*a*) Se $\mathbf{F} = -\nabla V$, onde V seja univalente e tenha derivadas parciais contínuas, mostre que o trabalho realizado, ao mover a partícula de um ponto $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ a um outro ponto $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ neste campo, é independente da trajetória percorrida entre os dois pontos.

(*b*) De outro lado, se $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ for independente da trajetória C ligando quaisquer dois pontos, mostre que há uma função V tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$.

(*a*) Trabalho realizado $= \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{P_1}^{P_2} \nabla V\cdot d\mathbf{r}$

$$= -\int_{P_1}^{P_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} dV = V(P_1) - V(P_2) = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$

Então, a integral depende somente dos pontos P_1 e P_2 e não da trajetória percorrida. Isto é verdadeiro somente se $V(x, y, z)$ for univalente em ambos os pontos P_1 e P_2.

(*b*) Faça $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1\mathbf{i} + \mathbf{F}_2\mathbf{j} + \mathbf{F}_3\mathbf{k}$. Por hipótese $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ é independente da trajetória que liga os dois pontos, os quais tomamos como (x_1, y_1, z_1) e (x, y, z), respectivamente. Então,

$$V(x, y, z) = -\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x,y,z)} (F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz)$$

é independente da trajetória que liga (x_1, y_1, z_1) e (x, y, z). Assim,

$$V(x, y, z) = -\int_C [F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz]$$

onde C é a trajetória percorrida entre (x_1, y_1, z_1) e (x, y, z). Escolhendo uma trajetória particular, como os segmentos de linha reta que unem (x_1, y_1, z_1) e a (x, y_1, z_1) a (x, y, z_1) e a (x, y, z), e chamando $V(x, y, z)$ de trabalho realizado ao longo da trajetória percorrida, então

$$V(x, y, z) = -\int_{x_1}^{x} F_1(x, y_1, z_1)dx - \int_{y_1}^{y} F_2(x, y, z_1)dy - \int_{z_1}^{z} F_3(x, y, z)dz$$

Segue-se que

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_3(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_2(x, y, z_1) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z)dz = -F_2(x, y, z_1) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z)dz$$

$$= -F_2(x, y, z_1) - F_2(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z}$$

$$= -F_2(x, y, z_1) - F_2(x, y, z) + F_2(x, y, z_1) = -F_2(x, y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_1(x, y_1, z_1) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z_1)dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z)dz$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z_1)dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z)dz$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z_1)\Big|_{y_1}^{y} - F_1(x, y, z)\Big|_{z_1}^{z}$$

$$= -F_1(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z_1) + F(x, y_1, z_1) - F_1(x, y, z) + F(x, y, z_1)$$

$$= -F_1(x, y, z)$$

Então, $\quad \mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = -\nabla V$

Assim, uma condição necessária e suficiente para que o campo $\mathbf{F}$ seja conservativo é que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

2.31. (*a*) Mostre que $\mathbf{F} = (2xy + z^3)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$ é um campo de força conservativo. (*b*) Ache o potencial. (*c*) Ache o trabalho realizado em mover um objeto neste campo de $(1, -2, 1)$ a $(3, 1, 4)$.

(*a*) Uma condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa é que $\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = 0$.

Ora

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2xy + z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Então $\mathbf{F}$ é um campo de força conservativo.

(*b*) Como no probl. 2.14, pelos métodos 2 ou 3, acha-se $V = -(x^2y + xz^3)$.

(*c*) Trabalho realizado $= -(x^2y + xz^3)\Big|_{(1,-2,1)}^{(3,1,4)} = -202$.

2.32. Prove que, se $\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ for independente da trajetória percorrida entre os dois pontos P_1 e P_2 em uma dada região, então $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ para todas as trajetórias fechadas na região ou vice-versa.

Seja $P_1AP_2BP_1$ [veja fig. 2-12] uma curva fechada. Então,

$$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

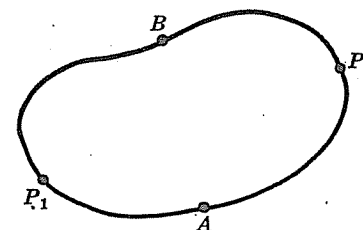



Fig. 2-12

pois a integral de P_1 a P_2, ao longo da trajetória por A é a mesma que a por B, por hipótese.

E, vice-versa, se $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, então

$$\int_{P_1AP_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{P_2BP_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

e, assim, $\int_{P_1AP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1BP_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

2.33. (*a*) Mostre que uma condição necessária e suficiente para que $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ seja uma diferencial exata é que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ onde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

(*b*) Mostre que $(y^2z^3 \cos x - 4x^3 z)dx + 2z^3 y \operatorname{sen} x\, dy + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)dz$ é uma função diferencial exata da função ϕ e ache-a.

(*a*) Suponha $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$, uma diferencial exata. Então, como x, y e z são variáveis independentes,

$$F_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

e, como $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k} = \nabla\phi$. Assim,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla\phi = 0.$$

E, vice-versa, se $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Então, $\mathbf{F} = \nabla\phi$ e, como $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\phi$, i.e., $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz = d\phi$, é uma diferencial exata.

(*b*) $\mathbf{F} = (y^2z^3 \cos x - 4x^3z)\mathbf{i} + 2z^3y \operatorname{sen} x\,\mathbf{j} + (3y^2z^2 \operatorname{sen} x - x^4)\mathbf{k}$ e $\nabla \times \mathbf{F}$ calculado é zero, assim pela parte (*a*) se obtém o resultado pedido.

2.34. Referindo-se ao probl. 2.4, ache (*a*) a energia cinética da partícula em $t = 1$ e $t = 2$, (*b*) o trabalho realizado pelo campo ao mover a partícula do ponto quando $t = 1$ ao ponto quando $t = 2$, (*c*) o momentum da partícula em $t = 1$ e $t = 2$ e (*d*) o impulso ao mover a partícula de $t = 1$ a $t = 2$.

(*a*) Da parte (*a*) do probl. 2.4,

$$\mathbf{v} = (4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}$$

Então, as velocidades em $t = 1$ e $t = 2$ são

$$\mathbf{v}_1 = 10\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 11\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}_2 = 38\mathbf{i} + 35\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

e as energias cinéticas em $t = 1$ e $t = 2$ são

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(2)[(10)^2 + (16)^2 + (-11)^2] = 477, \quad T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = 3069$$

(*b*) Trabalho realizado $= \int_{t=1}^{2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

$$= \int_{t=1}^{2} [24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}] \cdot [(4t^3 + 6)\mathbf{i} + (9t^2 - 8t + 15)\mathbf{j} - (3t^2 + 8)\mathbf{k}]\,dt$$

$$= \int_{t=1}^{2} [(24t^2)(4t^3 + 6) + (36t - 16)(9t^2 - 8t + 15) + (12t)(3t^2 + 8)]\,dt = 2592$$

Note que, pela parte (*a*), este valor é o mesmo pela diferença ou mudança de energia cinética $3069 - 477 = 2592$, ilustrando o teorema 2.1, de que: trabalho realizado = mudança da energia cinética.

(*c*) Pela parte (*a*), o momentum em um instante t qualquer é

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = 2\mathbf{v} = (8t^3 + 12)\mathbf{i} + (18t^2 - 16t + 30)\mathbf{j} - (6t^2 + 16)\mathbf{k}$$

Então, os "momenta" em $t = 1$ e $t = 2$ são

$$\mathbf{p}_1 = 20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - 22\mathbf{k}, \quad \mathbf{p}_2 = 76\mathbf{i} + 70\mathbf{j} - 40\mathbf{k}$$

(*d*) Impulso $= \int_{t=1}^{2} \mathbf{F}\,dt$

$$= \int_{t=1}^{2} [24t^2\mathbf{i} + (36t - 16)\mathbf{j} - 12t\mathbf{k}]\,dt = 56\mathbf{i} + 38\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$$

Note que, pela parte (*b*), o mesmo valor pode ser achado como a diferença ou a mudança de momentum, i.e., $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (76\mathbf{i} + 70\mathbf{j} - 40\mathbf{k}) - (20\mathbf{i} + 32\mathbf{j} - 22\mathbf{k}) = 56\mathbf{i} + 38\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$, ilustrando o teorema 2.6, de que impulso = mudança de "momentum".

2.35. Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x sob influência de um campo de força conservativo, tendo o potencial $V(x)$. Se a partícula está nas posições x_1 e x_2 nos momentos t_1 e t_2, respectivamente, prove que, se E é a energia total, então

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}$$

Pela conservação de energia,

$$\text{Energia cinética} + \text{energia potencial} = E$$
$$\tfrac{1}{2}m(dx/dt)^2 + V(x) = E$$

Então,
$$(dx/dt)^2 = (2/m)\{E - V(x)\} \qquad (1)$$

do que se obtém, considerando-se a raiz quadrada,

$$dt = \sqrt{m/2}\,(dx/\sqrt{E - V(x)})$$

e, por integração,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} \qquad (2)$$

2.36. (*a*) Se a partícula do probl. 2.35 tem um potencial de $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$ e parte do repouso de $x = a$, prove que $x = a \cos \sqrt{\kappa/m}\, t$ e (*b*) descreva o movimento.

(*a*) Da fórmula (1) do probl. 2.35, $(dx/dt)^2 = (2/m)(E - \frac{1}{2}\kappa x^2)$. E, como $dx/dt = 0$ onde $x = a$, acha-se $E = \frac{1}{2}\kappa a^2$ tal que

$$(dx/dt)^2 = (\kappa/m)(a^2 - x^2) \quad \text{ou} \quad dx/\sqrt{a^2 - x^2} = \pm\sqrt{\kappa/m}\, dt$$

A integração obtida é $\text{sen}^{-1}(x/a) = \pm\sqrt{\kappa/m}\, t + c_1$. Como $x = a$ em $t = 0$, $c_1 = \pi/2$. Então,

$$\text{sen}^{-1}(x/a) = \pm\sqrt{\kappa/m}\, t + \pi/2 \quad \text{ou} \quad x = a\,\text{sen}(\pi/2 \pm \sqrt{\kappa/m}\, t) = a \cos\sqrt{\kappa/m}\, t$$

(*b*) A partícula oscila entre $x = a$ e $x = -a$ ao longo de eixo x. O tempo para uma vibração completa ou oscilação de $x = a$ a $x = a$ de novo é chamado de *período* de oscilação e é dado por $P = 2\pi\sqrt{m/\kappa}$.

2.37. Uma partícula de massa 3 unidades move-se no plano xy sob influência de um campo de força, tendo um potencial de $V = 12x(3y - 4x)$. A partícula parte do repouso no momento $t = 0$, no ponto cujo vetor posição é $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$.

(*a*) Ache as equações diferenciais e condições, descrevendo o movimento. (*b*) Resolva as equações de (*a*). (*c*) Ache a posição em um instante t qualquer. (*d*) Ache a velocidade em um instante qualquer t.

(*a*) Como $V = 12x(3y - 4x) = 36xy - 48x^2$, o campo de força é

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = (-36y + 96x)\mathbf{i} - 36x\mathbf{j}$$

Então, pela segunda lei de Newton,

$$3\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (-36y + 96x)\mathbf{i} - 36x\mathbf{j}$$

ou, em forma de componentes, usando $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

$$d^2x/dt^2 = -12y + 32x, \quad d^2y/dt^2 = -12x \qquad (1)$$

onde $\quad x = 10, \quad \dot{x} = 0, \quad y = -10, \quad \dot{y} = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \qquad (2)$

e usando o fato de que a partícula inicia o movimento em $\mathbf{r} = 10\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$ com velocidade $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$.

(*b*) Da segunda equação de (1), $x = \frac{1}{12}d^2y/dt^2$. Substituída na primeira equação de (1), resulta em

$$d^4y/dt^4 - 32\,d^2y/dt^2 - 144y = 0 \qquad (3)$$

Se α é constante, então $y = e^{\alpha t}$ é uma solução de (3), desde que

$\alpha^4 - 32\alpha^2 - 144 = 0$, i.e., $(\alpha^2 + 4)(\alpha^2 - 36) = 0$ ou $\alpha = \pm 2i$, $\alpha = \pm 6$

Então, as soluções são $e^{2it}, e^{-2it}, e^{6t}, e^{-6t}$ ou $\cos 2t$, $\text{sen}\, 2t$, e^{6t}, e^{-6t} [em termos de funções reais] e a solução geral é

$$y = c_1 \cos 2t + c_2\,\text{sen}\, 2t + c_3 e^{6t} + c_4 e^{-6t} \qquad (4)$$

Assim, de $x = -\frac{1}{12}d^2y/dt^2$, usando (4), acha-se

$$x = \tfrac{1}{3}c_1 \cos 2t + \tfrac{1}{3}c_2\,\text{sen}\, 2t - 3c_3 e^{6t} - 3c_4 e^{-6t} \qquad (5)$$

Usando as condições (2) em (4) e (5), obtém-se

$$\tfrac{1}{3}c_1 - 3c_3 - 3c_4 = 10, \quad \tfrac{2}{3}c_2 - 18c_3 + 18c_4 = 0,$$
$$c_1 + c_3 + c_4 = -10, \quad 2c_2 + 6c_3 - 6c_4 = 0$$

que, resolvidas, dão

$$c_1 = -6, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -2, \quad c_4 = -2$$

e, assim,

$$x = -6\cos 2t - 2e^{6t} - 2e^{-6t}, \quad y = -2\cos 2t + 6e^{6t} + 6e^{-6t}$$

(*c*) A posição em um instante qualquer é

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (-6\cos 2t - 2e^{6t} - 2e^{-6t})\mathbf{i} + (-2\cos 2t + 6e^{6t} + 6e^{-6t})\mathbf{j}$$

(*d*) A velocidade em um instante qualquer é

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = (12\,\text{sen}\, 2t - 12e^{6t} + 12^{-6t})\mathbf{i} + (4\,\text{sen}\, 2t + 36e^{6t} - 36e^{-6t})\mathbf{j}$$

Em termos de funções hiperbólicas

$$\text{sen h}\,\alpha t = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}), \quad \cosh \alpha t = \tfrac{1}{2}(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$

pode-se escrever também

$$\mathbf{r} = (-6\cos 2t - 4\cosh 6t)\mathbf{i} + (-2\cos 2t + 12\cosh 6t)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (12\,\text{sen}\, 2t - 24\,\text{sen h}\, 6t)\mathbf{i} + (4\,\text{sen}\, 2t + 72\,\text{sen h}\, 6t)\mathbf{j}$$

2.38. Prove que em coordenadas polares (r, θ),

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\theta_1$$

Seja

$$\nabla V = G\mathbf{r}_1 + H\theta_1 \qquad (1)$$

onde G e H são determináveis. Como $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ e usando $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ e probl. 1.47(*b*), pode ser obtido

$$d\mathbf{r} = (\cos\theta\, dr - r\,\text{sen}\,\theta)(\cos\theta\,\mathbf{r}_1 - \text{sen}\,\theta\,\boldsymbol{\theta}_1) + (\text{sen}\,\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta)(\text{sen}\,\theta\,\mathbf{r}_1 + \cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1)$$

ou

$$d\mathbf{r} = dr\,\mathbf{r}_1 + r\,d\theta\,\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (2)$$

Como $$\nabla V \cdot d\mathbf{r} = dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

Usando (1) e (2), fica

$$(G\mathbf{r}_1 + H\boldsymbol{\theta}_1)\cdot(dr\,\mathbf{r}_1 + r\,d\theta\,\boldsymbol{\theta}_1) = G\,dr + Hr\,d\theta = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

e, como $$G = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad H = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

Em (1) tem-se $$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

2.39. De acordo com a *teoria da relatividade*, a massa m da partícula é dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

onde v é a velocidade, m_0 a massa em repouso, c a velocidade da luz e $\beta = v/c$.

(*a*) Mostre que a razão do trabalho realizado pelo tempo é dada por

$$m_0 c^2 \frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-1/2}$$

(*b*) Deduza de (*a*) que a energia cinética é

$$T = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2\{(1-\beta^2)^{-1/2} - 1\}$$

(*c*) Se v for bem menor que c, mostre que $T = \frac{1}{2}mv^2$, aproximadamente.

(*a*) Pela segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Se W é o trabalho realizado, então

$$\frac{dW}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = v\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m_0c^2\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = m_0c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

provado pela diferenciação direta.

(*b*) Como trabalho realizado = mudança da energia cinética, tem-se

Razão do trabalho realizado pelo tempo = razão da mudança da energia pelo tempo,

ou, pela parte (*a*), $$\frac{dW}{dt} = \frac{dT}{dt} = m_0c^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Integrando, $$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + c_1$$

Para determinar c_1 note que, por definição, $T = 0$ quando $v = 0$ ou $\beta = 0$, tal que $c_1 = -m_0c^2$. Assim, tem-se, como foi pedido,

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2 = (m - m_0)c^2$$

(*c*) Para $\beta < 1$ pelo teorema binomial,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\beta^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\beta^6 + \ldots$$

Então, $T = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right] - m_0c^2 = \frac{1}{2}mv^2$, aproximadamente.

Problemas Propostos

LEIS DE NEWTON

2.40. Uma partícula de massa 2 unidades move-se ao longo de uma trajetória espacial definida por $\mathbf{r} = (4t^2 - t^3)\mathbf{i} - 5t\mathbf{j} + (t^4 - 2)\mathbf{k}$. Ache (*a*) o momentum e (*b*) a força atuante nela em $t = 1$.
Resp. (*a*) $10\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, (*b*) $4\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$

2.41. Uma partícula movendo-se em um campo de força $\mathbf{F}$ tem seu momentum em um tempo t qualquer, dado por $\mathbf{p} = 3e^{-t}\mathbf{i} - 2\cos t\,\mathbf{j} - 3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$. Ache $\mathbf{F}$.
Resp. $-3e^{-t}\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} - 3\cos t\,\mathbf{k}$

2.42. Sob influência de um campo de força, uma partícula de massa m move-se ao longo de uma trajetória elíptica

$$\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$$

Se $\mathbf{p}$ é o momentum, prove que (*a*) $\mathbf{r}\times\mathbf{p} = mab\omega\mathbf{k}$; (*b*) $\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \frac{1}{2}m(b^2 - a^2)\,\text{sen}\,2\omega t$.

2.43. Se $\mathbf{F}$ é a força atuante sobre a partícula do probl. 2.42, prove que $\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0$. Explique o que significa isto fisicamente.

2.44. Uma fôrça de 100 dinas na direção do eixo x positivo é exercida sôbre uma partícula de massa 2 g por 10 minutos. Qual a velocidade que a partícula adquire admitindo que ela parta do repouso?
Resp. 3×10^4 cm/s.

2.45. Faça o probl. 2.44 com uma fôrça de 20 newtons e a massa de 10 kg.
Resp. 1200 m/s.

2.46. (*a*) Ache a fôrça constante necessária para acelerar uma massa de 40 kg. da velocidade de $4\mathbf{i}-5\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ m/s a $8\mathbf{i}+3\mathbf{j}-5\mathbf{k}$ m/s em 20 segundos. (*b*) Qual a magnitude da fôrça em (*a*)?
Resp. (*a*) $8\mathbf{i}+16\mathbf{j}-16\mathbf{k}$ N ou $(8\mathbf{i}+16\mathbf{j}-16\mathbf{k}) \times 10^5$ d. (*b*) 24 N ou 24×10^5 d.

2.47. Um elevador de um alto edifício desce do último andar ao andar térreo sem parar. (*a*) Explique como uma pessoa vendada no elevador pode acreditar que o elevador não se esteja movendo. (*b*) A pessoa pode dizer quando o movimento começa ou termina? Explique.

2.48. Uma partícula de massa unitária move-se em um campo de fôrça dado em têrmos do tempo t por

$$\mathbf{F} = (6t-8)\mathbf{i} - 60t^3\mathbf{j} + (20t^3 + 36t^2)\mathbf{k}$$

Sua posição e velocidade iniciais são dadas, respectivamente, por $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i}-3\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_0 = 5\mathbf{i}+4\mathbf{j}$. Ache (*a*) a posição e (*b*) a velocidade da partícula em $t = 2$.
Resp. (*a*) $4\mathbf{i}-88\mathbf{j}+77\mathbf{k}$, (*b*) $\mathbf{i}-236\mathbf{j}+176\mathbf{k}$.

2.49. A fôrça atuante sôbre uma partícula de massa m é dada em têrmos do tempo t por

$$\mathbf{F} = a \cos \omega t\, \mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{j}$$

Se a partícula está em repouso inicialmente na origem, ache sua (*a*) posição e (*b*) velocidade em qualquer instante.

Resp. (*a*) $\dfrac{a}{m\omega^2}(1-\cos \omega t)\mathbf{i} + \dfrac{b}{m\omega^2}(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)\mathbf{j}$, (*b*) $\dfrac{a}{m\omega} \operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + \dfrac{b}{m\omega}(1-\cos \omega t)\mathbf{j}$

TRABALHO, POTÊNCIA E ENERGIA CINÉTICA

2.50. Uma partícula é movida por uma fôrça $\mathbf{F} = 20\mathbf{i}-30\mathbf{j}+15\mathbf{k}$ ao longo de uma linha reta do ponto A ao ponto B, com os vetôres de posição $2\mathbf{i}+7\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ e $5\mathbf{i}-3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$, respectivamente. Ache o trabalho realizado.
Resp. 315.

2.51. Ache a energia cinética de uma partícula de massa 20 movendo-se com uma velocidade de $3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+4\mathbf{k}$.
Resp. 500.

2.52. Devido a um campo de fôrça $\mathbf{F}$, uma partícula de massa 4 move-se ao longo de uma trajetória espacial $\mathbf{r} = (3t^2-2t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t^4\mathbf{k}$. Ache o trabalho realizado pelo campo, ao mover a partícula do ponto em que $t = 1$ ao ponto em que $t = 2$.
Resp. 2454.

2.53. Em um dado instante, uma partícula de massa 10 percorre uma trajetória espacial com uma velocidade dada por $4\mathbf{i}+16\mathbf{k}$. Em um instante posterior, sua velocidade é de $8\mathbf{i}-20\mathbf{j}$. Ache o trabalho realizado sôbre a partícula entre os dois instantes.
Resp. 192.

2.54. Verifique o teorema 2.1, para a partícula do probl. 2.52.

2.55. Uma partícula de massa m move-se sob influência de um campo de fôrça dado por $\mathbf{F} = a(\operatorname{sen} \omega t\, \mathbf{i} + \cos \omega t\, \mathbf{j})$. Se a partícula está em repouso inicialmente na origem, prove que o trabalho realizado sôbre a partícula até o instante t é dado por $(a^2/m\omega^2)(1-\cos \omega t)$.

2.56. Prove que a potência instantânea aplicada à partícula do probl. 2.55 é $(a^2/m\omega) \operatorname{sen} \omega t$.

2.57. Uma partícula move-se com velocidade de $5\mathbf{i}-3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ sob influência de uma fôrça constante $\mathbf{F} = 20\mathbf{i}+10\mathbf{j}+15\mathbf{k}$. Qual a potência instantânea aplicada sôbre a partícula?
Resp. 160.

CAMPO DE FÔRÇA CONSERVATIVO; ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

2.58. (*a*) Prove que o campo de fôrça $\mathbf{F} = (y^2-2xyz^3)\mathbf{i} + (3+2xy-x^2z^3)\mathbf{j} + (6z^3-3x^2yz^2)\mathbf{k}$ é conservativo. (*b*) Ache o potencial V associado ao campo de fôrça de (*a*).
Resp. (*b*) $xy^2 - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4$

2.59. Uma partícula move-se em um campo de fôrça do probl. 2.58 do ponto $(2,-1,2)$ ao ponto $(-1,3,-2)$. Ache o trabalho realizado.
Resp. 55.

2.60. (*a*) Ache as constantes a, b e c tal que o campo de fôrça definido por

$$\mathbf{F} = (x+2y+az)\mathbf{i} + (bx-3y-z)\mathbf{j} + (4x+cy+2z)\mathbf{k}$$

seja conservativo. (*b*) Qual o potencial associado ao campo de fôrça em (*a*)?
Resp. (*a*) $a = 4,\ b = 2,\ c = -1$ (*b*) $V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - z^2 - 2xy - 4xz + yz$

2.61. Ache o trabalho realizado ao mover uma partícula do ponto $(1,-1,2)$ ao $(2,3,-1)$ em um campo de fôrça com potencial dado por $V = x^3 - y^3 + 2xy - y^2 + 4x$.
Resp. 15.

2.62. Verifique se o campo de força $\mathbf{F} = (x^2y - z^3)\mathbf{i} + (3xyz + xz^2)\mathbf{j} + (2x^2yz + yz^4)\mathbf{k}$ é conservativo.
Resp. Não é conservativo.

2.63. Ache o trabalho realizado ao mover uma partícula em um campo de força $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 2(xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ pelas trajetórias (*a*) uma linha reta que vai de (0, 0, 0) a (2, 1, 3), (*b*) uma trajetória espacial $x = 2t^2$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ de $t = 0$ a $t = 1$. O trabalho realizado independe da trajetória? Explique.
Resp. (*a*) 16, (*b*) 14,2.

2.64. (*a*) Ache o valor de $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F} = (x - 3y)\mathbf{i} + (y - 2x)\mathbf{j}$ e C é uma trajetória fechada no plano xy dado por $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$ de $t = 0$ a $t = 2\pi$. (*b*) Dê uma interpretação física ao resultado de (*a*).
Resp. (*a*) 6π se C for percorrido no sentido positivo (anti-horário).

2.65. (*a*) Mostre que o campo de força $\mathbf{F} = -\kappa r^3 \mathbf{r}$ é conservativo.
(*b*) Determine a energia potencial de uma partícula, movendo-se sob o campo de fôrça de (*a*).
(*c*) Se uma partícula de massa m move-se com uma velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ neste campo, mostre que, se E é a energia total constante, então $\frac{1}{2}m(dr/dt)^2 + \frac{1}{5}\kappa r^5 = E$. Qual o princípio importante que isto ilustra?

2.66. Uma partícula de massa 4 move-se em um campo de força definido por $\mathbf{F} = -200\mathbf{r}/r^3$. (*a*) Mostre que o campo é conservativo e ache a energia potencial. (*b*) Se a partícula parte de $r = 1$ com uma velocidade de 20, qual será a velocidade em $r = 2$?
Resp. (*a*) $V = 200/r$, (*b*) $15\sqrt{2}$

IMPULSO, TORQUE E MOMENTUM ANGULAR. CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

2.67. Uma partícula de massa unitária move-se em um campo de força dado por

$$\mathbf{F} = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + (12t - 6)\mathbf{j} + (6t - 12t^2)\mathbf{k}$$

onde t é o tempo. (*a*) Ache a mudança de momentum da partícula do instante $t = 1$ ao $t = 2$. (*b*) Se a velocidade em $t = 1$ é $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$, qual é a velocidade em $t = 2$?
Resp. (*a*) $\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 19\mathbf{k}$, (*b*) $5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$.

2.68. Uma partícula de massa m move-se ao longo de uma trajetória espacial definida por $\mathbf{r} = a\cos\omega t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{j}$. Ache (*a*) o torque e (*b*) o momentum angular na origem.
Resp. (*a*) 0, (*b*) $2mab\omega\mathbf{k}$

2.69. Uma partícula move-se em um campo de força dado por $\mathbf{F} = \phi(r)\mathbf{r}$. Prove que o momentum angular da partícula é constante na origem.

2.70. Ache (*a*) o torque e (*b*) o momentum angular em torno da origem no instante $t = 2$ para a partícula do probl. 2.67, supondo que em $t = 0$ ela está localizada na origem.
Resp. (*a*) $-(36\mathbf{i} + 128\mathbf{j} + 60\mathbf{k})$, (*b*) $-44\mathbf{i} + 52\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$.

2.71. Ache o impulso desenvolvido pela força dada por $\mathbf{F} = 4t\mathbf{i} + (6t^2 - 2)\mathbf{j} + 12$ de $t = 0$ a $t = 2$.
Resp. $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 24t\mathbf{k}$

2.72. Qual é a magnitude do impulso desenvolvido pela massa de 20 g que muda sua velocidade de $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ m/s para $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ m/s?
Resp. $1{,}8 \times 10^5$ dinas s. ou 1,8 newton s.

ESTÁTICA DA PARTÍCULA

2.73. Uma partícula está sob a ação das forças $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + a\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = 5\mathbf{i} + c\mathbf{j} + b\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = b\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4 = c\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. Ache os valores das constantes a, b, c, de modo que a partícula permaneça em equilíbrio.
Resp. $a = 7$, $b = 11$, $c = 4$.

2.74. Ache (*a*) graficamente e (*b*) analiticamente, a resultante da força atuante sobre a massa m da fig. 2-13, onde todas as forças estão num plano.
Resp. (*b*) 19,5 dinas em uma direção que faz um ângulo de 85° 22′ com o eixo x negativo.

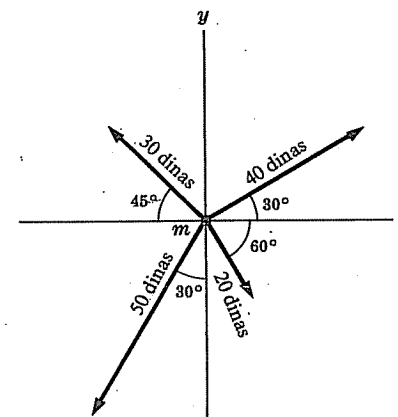



Fig. 2-13

2.75. O potencial de uma partícula movendo-se no plano xy é dado por $V = 2x^2 - 5xy + 3y^2 + 6x - 7y$. (*a*) Prove que haverá um ponto, e somente um, no qual a partícula permanecerá em equilíbrio e (*b*) ache as coordenadas deste ponto.
Resp. (*b*) (1, 2)

2.76. Prove que uma partícula que se mova em um campo de força de potencial

$$V = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2xz - 4x + 8y - 4z$$

pode permanecer em equilíbrio em um número infinito de pontos; localize estes pontos.
Resp. Todos os pontos estão no plano $x - 2y + z = 2$.

ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

2.77. Uma partícula move-se sobre o eixo x em um campo de força, tendo potencial $V = x^2(6-x)$. (*a*) Ache os pontos de equilíbrio (*b*) investigue suas estabilidades.
Resp. $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável; $x = 4$ é um ponto de equilíbrio instável.

2.78. Faça o probl. 2.77 com (*a*) $V = x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$, (*b*) $V = x^4$.
Resp. (*a*) $x = 1$ e 2 são pontos de equilíbrio estável; $x = -1$ é um ponto de equilíbrio instável.

2.79. Faça o probl. 2.77 com $V = \text{sen}\, 2\pi x$.
Resp. Se $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ então, $x = \frac{3}{4} + n$ são pontos de equilíbrio estável, enquanto $x = \frac{1}{4} + n$ são pontos de equilíbrio instável.

2.80. Uma partícula move-se em um campo de força de potencial $V = x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16y - 4z$. Ache os pontos de equilíbrio estável.
Resp. $(4, -8, 2)$.

PROBLEMAS EM GERAL

2.81. (*a*) Prove que $\mathbf{F} = (y^2 \cos x + z^3)\mathbf{i} + (2y \,\text{sen}\, x - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$ é um campo de força conservativo. (*b*) Ache o potencial correspondente a $\mathbf{F}$. (*c*) Ache o trabalho realizado em mover uma partícula neste campo de $(0, 1, -1)$ a $(\pi/2, -1, 2)$.
Resp. (*a*) $V = y^2 \,\text{sen}\, x + xz^3 - 4y + 2z + c$, (*b*) $15 + 4\pi$

2.82. Uma partícula P está sob a ação de 3 forças coplanares, como indicado na fig. 2-14. Ache a força necessária para não deixar que P se mova.
Resp. 323 kg na direção oposta à força de 150 kg.

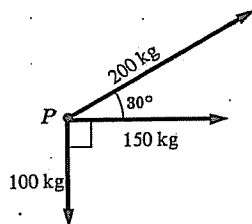



Fig. 2-14

2.83. (*a*) Prove que $\mathbf{F} = r^5\mathbf{r}$ é conservativo e (*b*) ache o potencial correspondente.
Resp. (*b*) $V = -\frac{1}{4}r^4 + c$.

2.84. Explique o seguinte paradoxo: De acordo com a terceira lei de Newton, um reboque puxa para trás um automóvel, ao qual está ligado, com uma força de mesmo valor e sentido contrário ao da força com que o automóvel puxa para frente o reboque. Então, o automóvel não se move.

2.85. Ache o potencial de uma partícula colocada em um campo de força dado por $\mathbf{F} = -\kappa r^{-n}\mathbf{r}$ onde κ e n são constantes. Trate de todos os casos possíveis.

2.86. Uma catarata de 200 m de altura tem uma vazão de água de 15.000 m³ por segundo. Admitindo que a densidade da água é de 1 ton/m³ e que um cavalo vapor é 75 mkgf/s, ache a potência da catarata.
Resp. $4 \cdot 10^7$ cv.

2.87. A potência aplicada a uma partícula por um campo de força é dada em função do tempo t por $\mathscr{P}(t) = 3t^2 - 4t + 2$. Ache o trabalho realizado em que $t = 2$ ao ponto em que $t = 4$.
Resp. 36

2.88. Pode o torque aplicado sobre uma partícula ser zero, sem que a força seja zero? Explique.

2.89. Pode a força sobre uma partícula ser zero, sem que o momentum angular seja zero? Explique.

2.90. Sob a influência de um campo de força $\mathbf{F}$, uma partícula de massa 2 move-se em uma trajetória espacial $\mathbf{r} = 6t^4\mathbf{i} - 3t^2\mathbf{j} + (4t^3 - 5)\mathbf{k}$. Ache (*a*) o trabalho realizado ao mover a partícula do ponto em que $t = 0$ ao ponto em que $t = 1$, (*b*) a potência aplicada à partícula em um instante qualquer.
Resp. (*a*) 756(*b*) $72t(48t^4 + 8t + 1)$

2.91. Um campo de força move uma partícula de massa m ao longo de uma trajetória espacial $\mathbf{r} = a \cos \omega t\, \mathbf{i} + b \,\text{sen}\, \omega t\, \mathbf{j}$. (*a*) Qual a potência requerida? (*b*) Discuta fisicamente o caso em que $a = b$.
Resp. (*a*) $m(a^2 - b^2)\omega^3 \,\text{sen}\, \omega t \cos \omega t$.

2.92. O momentum angular de uma partícula é dado como uma função do tempo por

$$\Omega = 6t^2\mathbf{i} - (2t + 1)\mathbf{j} + (12t^3 - 8t^2)\mathbf{k}$$

Ache o torque no instante em que $t = 1$.
Resp. $12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$.

2.93. Ache a força constante necessária para dar a um objeto de massa 18.000 kg uma velocidade de 15 km/h em 5 min, partindo do repouso.
Resp. 250 newtons.

2.94. Uma força constante de 100 newtons é aplicada por 2 minutos a uma massa de 20 kg, a qual está inicialmente em repouso. (*a*) Qual a velocidade alcançada? (*b*) Qual a distância percorrida?
Resp. (*a*) 600 m/s, (*b*) 36.000 m

2.95. Uma partícula de massa m move-se sobre o eixo x, sob a influência de uma fôrça de atração em direção à origem O dada por $\mathbf{F} = -(\kappa/x)\mathbf{i}$. Se a partícula inicia o movimento do repouso em $x = a$, prove que ela chegará em um tempo dado por $\frac{1}{2}\pi a \sqrt{ma/2\kappa}$.

2.96. Faça o probl. 2.95, se $\mathbf{F} = -(\kappa/x^3)\mathbf{i}$.

2.97. Uma partícula de massa 2 move-se em um campo de fôrça $\mathbf{F} = t^2\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$, onde t é o tempo. (*a*) Quanto irá percorrer a partícula de $t = 0$ a $t = 3$, se ela está inicialmente em repouso na origem? (*b*) Ache a energia cinética em $t = 1$ e $t = 3$. (*c*) Qual o trabalho realizado sobre a partícula pelo campo de $t = 1$ a $t = 3$? (*d*) Qual é a potência aplicada à partícula em $t = 1$? (*e*) Qual é o impulso suprido à partícula em $t = 1$?

2.98. Em $t = 0$, uma partícula de massa unitária está em repouso na origem. Se é exercida uma fôrça de $\mathbf{F} = 100te^{-2t}\mathbf{i}$, ache (*a*) a mudança de momentum da partícula ao ir de $t = 1$ a $t = 2$, (*b*) a velocidade após um longo tempo.
Resp. (*a*) $25e^{-2}(3-5e^{-2})\mathbf{i}$, (*b*) 25

2.99. Uma partícula de massa 3 unidades move-se no plano xy, sob influência de um campo de fôrça, tendo um potencial de $V = 6x^3 + 12y^3 + 36xy - 48x^2$. Investigue o movimento da partícula, quando for deslocada um pouco da posição de equilíbrio.
[*Sugestão*: Perto de $x = 0$, $y = 0$ o potencial é próximo de $36xy - 48x^2$, pois $6x^3$ e $12y^3$ são desprezíveis].

2.100. Uma partícula de massa unitária move-se sobre o eixo x e sob a influência de um campo de fôrça, tendo um potencial de $V = 6x(x-2)$. (*a*) Mostre que $x = 1$ é uma posição de equilíbrio. (*b*) Prove que, se a massa for deslocada um pouco de sua posição de equilíbrio, ela oscilará em tôrno dela com um período de $4\pi\sqrt{3}$.
[*Sugestão*: Seja $x = 1 + u$ e negligencie têrmos em u de grau mais alto que um].

2.101. Uma partícula de massa m move-se em um campo de fôrça $\mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i}$. (*a*) Quanto será o trabalho realizado em mover a partícula de $x = x_1$ a $x = x_2$? (*b*) Se uma partícula unitária inicia o movimento em $x = x_1$, com velocidade v_1, qual será a sua velocidade, ao alcançar $x = x_2$?
Resp. (*a*) $\frac{1}{2}\kappa(x_1^2 - x_2^2)$, (*b*) $\sqrt{v_1^2 + (\kappa/m)(x_1^2 - x_2^2)}$

2.102. Uma partícula de massa 2 move-se no plano xy sob a influência de um campo de fôrça, tendo um potencial de $V = x^2 + y^2$. A partícula inicia o movimento partindo do repouso em $t = 0$ no ponto (2, 1). (*a*) Ache as equações diferenciais e as condições necessárias para descrever o movimento. (*b*) Ache a posição em um instante t qualquer. (*c*) Ache a velocidade em um instante t qualquer.

2.103. Faça o probl. 2.102, para $V = 8xy$.

2.104. O teorema 2.7 é verdadeiro para um sistema de referência ou sistema de coordenadas não inercial? Prove sua resposta.

2.105. (*a*) Prove que, se uma partícula se move no plano xy, sob influência de um campo de fôrça tendo um potencial $V = 12x(3y - 4x)$, então $x = 0$, $y = 0$ é um ponto de equilíbrio estável. (*b*) Discuta, comparando a resposta de (*a*) ao probl. 2.37.

2.106. (*a*) Prove que uma condição suficiente para que o ponto (a, b) seja um ponto de mínimo da função $V(x, y)$ é que em (a, b)

$$(i)\ \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (ii)\ \Delta = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$$

(*b*) Use (*a*) para investigar os pontos de estabilidade de uma partícula que se move em um campo de fôrça, tendo um potencial de $V = x^3 + y^3 - 3x - 12y$.
Resp. (*b*) O ponto (1, 2) é um ponto de estabilidade.

2.107. Considere que uma partícula de massa unitária se mova no campo de fôrça do probl. 2.106. Ache a sua velocidade em um instante qualquer.

2.108. Uma partícula dá uma volta completa pelo círculo $\mathbf{r} = a(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j})$ no campo de fôrça

$$\mathbf{F} = (x\mathbf{i} - y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$$

(*a*) Ache o trabalho realizado. (*b*) O campo de fôrça é conservativo? (*c*) As respostas dos itens (*a*) e (*b*) contradizem o teorema 2.4? Explique.

2.109. É afirmado, algumas vêzes, que a Mecânica Clássica ou Newtoniana faz a hipótese de que o espaço e o tempo são ambos absolutos. Discuta qual é o significado desta afirmação.

2.110. A quantidade $\mathbf{F}_{av} = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt}{t_2 - t_1}$ é chamada a *fôrça média* atuante sôbre a partícula do instante t_1 ao t_2. O resultado (3) do probl. 2.5 se mantém, se $\mathbf{F}$ for reposto por $\mathbf{F}_m$? Explique.

2.111. Uma partícula de massa 2 g move-se em um campo de fôrça $\mathbf{F} = 8xy\mathbf{i} + (4x^2 - 8z)\mathbf{j} - 8y\mathbf{k}$ dinas. Se ela tem uma velocidade de 4 cm/s no ponto $(-1, 2, -1)$, qual a velocidade em $(1, -1, 1)$?
Resp. 6 cm/s.

2.112. (*a*) Ache as posições de equilíbrio estável de uma partícula movendo-se em um campo de fôrça de potencial $V = 18r^2e^{-2r}$.
(*b*) Se a partícula é sôlta em $r = \frac{1}{4}$, ache a velocidade quando ela alcança a posição de equilíbrio.
(*c*) Ache o período para pequenas oscilações em tôrno da posição de equilíbrio.

2.113. De acordo com a *teoria especial da relatividade de Einstein*, a massa m de uma partícula, movendo-se com uma velocidade v relativa a um observador, é dada por $m = m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, onde c é a *velocidade da luz* [2,998 · 10 m/s] e m_0 a *massa em repouso*. Qual o aumento percentual sobre a massa em repouso de (*a*) um avião movendo-se a 1000 km/h, (*b*) um planeta, movendo-se a 35.000 km/h, (*c*) um elétron movendo-se à metade da velocidade da luz? Quais as conclusões que se podem tirar destes resultados?

2.114. Prove que, em coordenadas cilíndricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

onde $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_z$ são vetores unitários na direção crescente de ρ_m, ϕ_m e z, respectivamente.

2.115. Prove que, em coordenadas esféricas,

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi$$

onde $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{e}_\phi$ são vetores unitários na direção crescente de r, θ e ϕ, respectivamente.

Capítulo 3

Movimento em um Campo Uniforme: Queda de Corpos e Projéteis

CAMPOS DE FORÇA UNIFORMES

Um campo de força que tenha magnitude e direção constante é chamado de *campo de força uniforme* ou *constante*. Se a direção deste campo é tomada como sendo na direção negativa do eixo z, como é indicado na fig. 3-1, e a magnitude é a constante $F_0 > 0$, então o campo de força é dado por

$$\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k} \qquad (1)$$

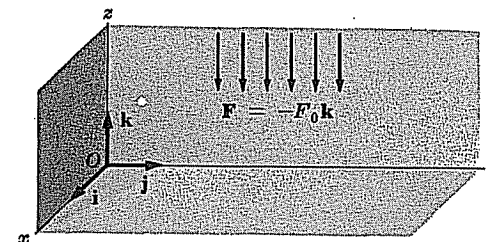



Fig. 3-1

MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Se uma partícula de massa constante m move-se em um campo de força uniforme, então sua aceleração é uniforme ou constante. O movimento é, então, descrito como sendo um *movimento uniformemente acelerado*. Usando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ em (1), a aceleração de uma partícula de massa m, movendo-se no campo de força uniforme (1), é dada por

$$\mathbf{a} = -\frac{F_0}{m}\mathbf{k} \qquad (2)$$

PESO E ACELERAÇÃO DEVIDO À GRAVIDADE

Acha-se experimentalmente que, perto da superfície terrestre, os objetos em queda têm uma aceleração vertical constante, negligenciando-se a resistência do ar. Esta aceleração é representada por g e é chamada de *aceleração devida à gravidade* ou de *aceleração gravitacional*. A magnitude aproximada de g é 980 cm/s², 9,80 m/s²

no sistema de unidades C G S ou M K S, respectivamente. Este valor varia para lugares diferentes da superfície terrestre, aumentando ligeiramente quando se vai do equador para os pólos.

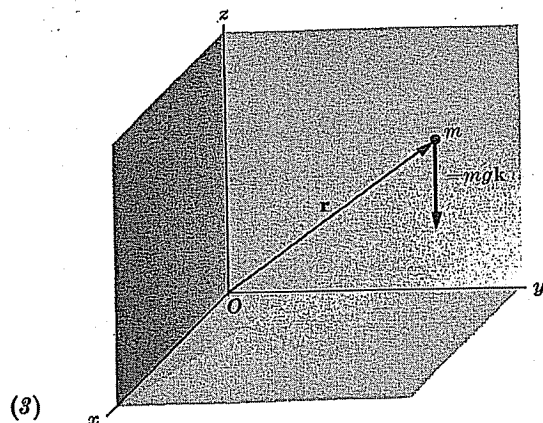



Fig. 3-2

Supondo que a superfície da Terra é representada pelo plano xy da fig. 3-2, a força atuante sobre uma partícula de massa m é dada por

$$\mathbf{W} = -mg\,\mathbf{k} \tag{3}$$

Esta força que é chamada de *peso* de uma partícula, tem magnitude $W = mg$.

SISTEMA GRAVITACIONAL DE UNIDADES

Como $W = mg$; segue que $m = W/g$. Este fato levou muitos cientistas e engenheiros, que mantêm um grande contato com a mecânica na superfície terrestre, a reescrever as equações do movimento com a quantidade de massa fundamental m reposta pela quantidade de peso W. Assim, por exemplo, a segunda lei de Newton é reescrita como

$$\mathbf{F} = \frac{W}{g}\mathbf{a} \tag{4}$$

Nesta equação W e g podem ambos variar, enquanto $m = W/g$ é constante. Um dos sistemas de unidades usado em (4) é o *gravitacional* ou *sistema da engenharia* onde a unidade de **F** ou W é o *quilograma-força* (kgf), enquanto o comprimento é em metros e o tempo em segundos. Outros sistemas são também possíveis. Por exemplo, o sistema de engenharia inglês, onde se toma **F** ou W em libra peso (lbf) com comprimento em pés e tempo em segundos. Este sistema, porém, está sendo substituído pelo sistema de engenharia métrico anterior.

HIPÓTESE DE UMA TERRA PLANA

A equação (3) indica que a força atuante sobre uma massa m tem uma magnitude constante mg e é, em cada ponto, dirigida perpendicularmente à superfície terrestre representada pelo plano xy. Na realidade, esta hipótese, chamada de *hipótese da terra plana*, não é correta, em primeiro lugar, porque a terra não é plana e, em segundo, porque a força atuante sobre a massa m realmente varia com a distância do centro da Terra, como é mostrado no cap. 5.

Na prática, a hipótese da Terra plana é razoavelmente acurada para descrever movimentos de objetos próximos à superfície terrestre e assim ela será utilizada neste capítulo. Entretanto, para descrever o movimento de objetos longe da superfície terrestre, os métodos do cap. 5 devem ser utilizados.

QUEDA LIVRE DE CORPOS

Se um objeto se move de modo que a única força atuante seja o próprio peso ou a força devida à gravidade, então o objeto é dito um *objeto em queda livre*. Se **r** é o vetor posição e m é a massa do corpo, então, utilizando a segunda lei de Newton, a equação diferencial do movimento visto na equação (3) é

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} \tag{5}$$

Como esta equação não envolve a massa m, o movimento de um corpo em queda livre é independente de sua massa.

PROJÉTEIS

Um objeto disparado de uma arma ou solto de um avião em movimento é, geralmente, chamado de *projétil*. Se a resistência do ar for negligenciável, um objeto pode ser considerado como um corpo em queda livre tal que seu movimento pode ser achado pela equação (5), com as condições iniciais apropriadas. Se a resistência do ar é negligenciável, a trajetória é um arco de parábola (ou uma linha reta que pode ser considerada como uma parábola degenerada). Veja o probl. 3.6.

POTENCIAL E ENERGIA POTENCIAL EM UM CAMPO DE FORÇA UNIFORME

O potencial de um campo de força uniforme ou energia potencial de uma partícula neste campo é dado por

$$V = F_0(z - z_0) \tag{6}$$

onde z_0 é uma constante arbitrária tal que, quando $z = z_0$, $V = 0$. Chama-se $z = z_0$ de *nível de referência*.

Em particular, para um campo gravitacional constante, $F_0 = mg$ e a energia potencial da partícula é

$$V = mg(z - z_0) \tag{7}$$

Isto leva ao

Teorema 3.1. A energia potencial de uma partícula em um campo gravitacional constante é achada pela multiplicação da magnitude de seu peso pela altura acima de um nível de referência prescrito. Note-se que a energia potencial é o trabalho realizado pelo peso, ao mover-se de uma distância $z - z_0$.

MOVIMENTO EM UM MEIO RESISTENTE

Na prática, um objeto sofre a ação não somente de seu peso como também de outras forças. Uma classe importante de forças são aquelas que tendem a se opor ao movimento de um objeto. Tais forças, que aparecem devido a ser o movimento realizado em um meio como o ar ou a água, são, geralmente, chamadas de forças *resistivas*, *amortecedoras* ou *dissipativas* e o meio correspondente é dito ser um meio *resistivo*, *amortecedor* ou *dissipativo*.

É visto experimentalmente que, para baixas velocidades, a força resistiva é em magnitude proporcional à velocidade. Em outros casos, ela pode ser proporcional ao quadrado [ou alguma outra potência] da velocidade. Se a força resistiva é $\mathbf{R}$, então o movimento de uma partícula de massa m em um campo de força uniforme (gravitacional) é dado por

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = mg\mathbf{k} - \mathbf{R} \tag{8}$$

Se $\mathbf{R} = 0$ isto se reduz à equação (5).

ISOLAMENTO DO SISTEMA

Ao se estudar a dinâmica ou estática de uma partícula ou de um sistema de partículas, como se verá mais tarde, é extremamente importante levar em conta todas aquelas forças que agem *sobre* a partícula ou sobre o sistema de partículas. Este processo é, geralmente, chamado de *isolamento do sistema*.

MOVIMENTO RESTRINGIDO

Em alguns casos, uma partícula P deve mover-se ao longo de uma trajetória ou superfície especificada como, por exemplo, o plano inclinado da fig. 3-3 ou a superfície interna de uma bacia hemisférica da fig. 3-4. Tal curva ou superfície sobre a qual a partícula deve mover-se é chamada de *restrição* e o movimento resultante é chamado de *movimento restringido*.

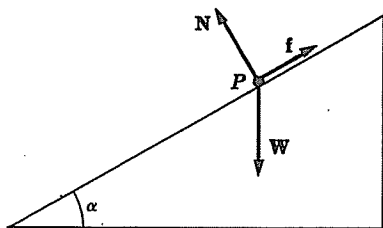



Fig. 3-3

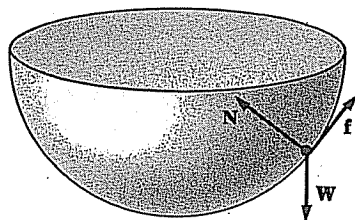



Fig. 3-4

Como a partícula exerce uma força sobre a restrição, haverá, pela terceira lei de Newton, uma *força de reação* da restrição sobre a partícula. Esta força de reação é, geralmente, descrita dando as suas componentes N e f, normal e paralela à direção do movimento, respectivamente. Na maior parte dos casos que aparecem na prática, f é a força devido à fricção e é tomada na direção oposta à do movimento.

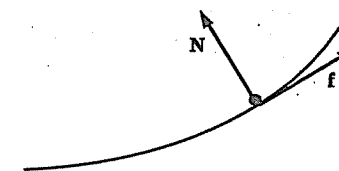
Problemas envolvendo movimento constrangido podem ser solucionados pelo uso da segunda lei de Newton, para chegar às equações diferenciais do movimento e, então, resolver estas equações sujeitas às condições iniciais.

FRICÇÃO

No movimento restringido de partículas, uma das forças resistentes ao movimento mais importante é aquela devido ao *atrito*. Referindo à fig. 3-5, seja N a magnitude da componente normal da reação da restrição sobre a partícula m. Então, é achado experimentalmente que a magnitude da força $\mathbf{f}$ devida à fricção é dada por

Fig. 3-5

$$f = \mu N \tag{9}$$

onde μ é o chamado *coeficiente de fricção*. A direção de $\mathbf{f}$ é sempre oposta à direção do movimento. O coeficiente de fricção, que depende do material tanto da partícula como da restrição, é tomado como uma constante na prática.

ESTÁTICA EM UM CAMPO GRAVITACIONAL CONSTANTE

Como foi indicado no cap. 2, uma partícula está em equilíbrio sob influência de um sistema de forças, se, e somente se, a resultante das forças atuantes sobre ela for $\mathbf{F} = 0$.

Problemas Resolvidos

CAMPOS DE FORÇAS UNIFORMES E MOVIMENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

3.1. Uma partícula de massa m move-se ao longo de uma linha reta sob influência de uma força constante de magnitude F. Se a sua velocidade inicial é v_0, ache (*a*) a velocidade em módulo, (*b*) a velocidade e (*c*) a distância percorrida após o tempo t.

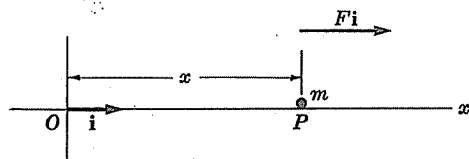



Fig. 3-6

(a) Suponha que a linha reta ao longo da qual a partícula P se move é o eixo x, como é mostrado na fig. 3-6. Admita que, no instante t, a partícula esteja a uma distância x da origem O. Se $\mathbf{i}$ é um vetor unitário na direção OP e v é a velocidade em módulo, no instante t, então a velocidade é $v\mathbf{i}$. Pela segunda lei de Newton, tem-se

$$\frac{d}{dt}(mv\mathbf{i}) = F\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad m\frac{dv}{dt} = F \tag{1}$$

Assim, $$dv = \frac{F}{m}dt \quad \text{ou} \quad \int dv = \int \frac{F}{m}dt$$

i.e., $$v = \frac{F}{m}t + c_1 \tag{2}$$

onde c_1 é uma constante de integração. Para achar c_1, nota-se a condição inicial $v = v_0$ em $t = 0$, assim de (2), $c_1 = v_0$ e

$$v = \frac{F}{m}t + v_0 \quad \text{ou} \quad v = v_0 + \frac{F}{m}t \tag{3}$$

(b) De (3) a velocidade no instante t é

$$v\mathbf{i} = v_0\mathbf{i} + \frac{F}{m}t\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{F}}{m}t$$

onde $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ e $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$.

(c) Como $v = dx/dt$, tem-se, de (3),

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{F}{m}t \quad \text{ou} \quad dx = \left(v_0 + \frac{F}{m}t\right)dt$$

Então, por integração, admitindo que c seja uma constante de integração, tem-se

$$x = v_0 t + \left(\frac{F}{2m}\right)t^2 + c_2$$

Como $x = 0$ em $t = 0$, acha-se $c_2 = 0$. Assim,

$$x = v_0 t + \left(\frac{F}{2m}\right)t^2 \tag{4}$$

3.2. Referindo-se ao probl. 3.1, mostre que a velocidade em módulo de uma partícula, em uma posição qualquer x, é dada por $v = \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

Método 1.

De (3) do probl. 3.1, tem-se $t = m(v - v_0)/F$. Substituindo em (4) e simplificando, acha-se $x = (m/2F)(v^2 - v_0^2)$. Resolvendo para v, obtém-se o resultado desejado.

Método 2.

De (1) do probl. 3.1, tem-se

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}$$

ou como $v = dx/dt$,

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m}, \quad \text{i.e.} \quad v\,dv = \frac{F}{m}dx$$

Integrando, $$\frac{v^2}{2} = \frac{F}{m}x + c_3$$

Como $v = v_0$ quando $x = 0$, acha-se $c_3 = v_0^2/2$ e, assim, $v = \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

Método 3.

A variação de energia cinética, de $t = 0$ para um tempo qualquer t, = trabalho realizado em mover-se a partícula de $x = 0$ para uma posição qualquer x ou $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F(x - 0)$. Então, $v = \sqrt{v_0^2 + (2F/m)x}$.

MOVIMENTO LINEAR DE CORPOS EM QUEDA LIVRE.

3.3. Um objeto de massa m é atirado verticalmente para cima da superfície terrestre com velocidade v_0. Ache (a) a posição em um instante qualquer, (b) o tempo para alcançar o ponto mais alto da trajetória e (c) a máxima altura alcançada.

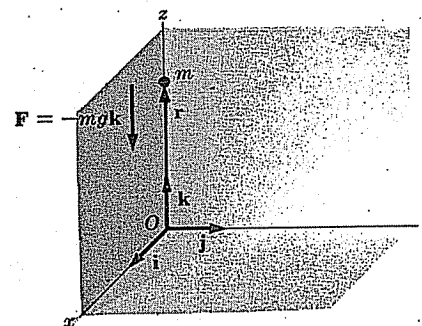



Fig. 3-7

(*a*) Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição de m em um instante qualquer. Considere que o objeto comece o movimento em $\mathbf{r} = 0$ quando $t = 0$. Como a força atuante sobre o objeto é $-mg\mathbf{k}$, tem-se pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -mg\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k} \qquad (1)$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade no instante t. Integrando (1) obtém-se

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \qquad (2)$$

Como a velocidade em $t = 0$ [i.e. a velocidade inicial] é $v_0\mathbf{k}$, tem-se de (2), $\mathbf{c}_1 = v_0\mathbf{k}$ tal que

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + v_0\mathbf{k} = (v_0 - gt)\mathbf{k} \qquad (3)$$

ou

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (v_0 - gt)\mathbf{k} \qquad (4)$$

Integrando (4) obtém-se

$$\mathbf{r} = (v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2 \qquad (5)$$

Então como $\mathbf{r} = 0$ quando $t = 0$, $\mathbf{c}_2 = 0$. Assim o vetor posição é

$$\mathbf{r} = (v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}$$

ou, equivalentemente, $x = 0$, $y = 0$, $z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

(*b*) O ponto mais alto é alcançado quando $\mathbf{v} = (v_0 - gt)\mathbf{k} = \mathbf{0}$, i.e. no instante $t = v_0/g$.

(*c*) No instante $t = v_0/g$ a máxima altura alcançada é, $z = v_0^2/2g$.

Outro método.

Se for considerado, como é evidente fisicamente, que o objeto deve sempre estar sobre o eixo z, pode-se evitar os vetores, escrevendo a lei de Newton equivalente como [veja a equação (1) acima e coloque $\mathbf{r} = z\mathbf{k}$]

$$d^2z/dt^2 = -g$$

de onde, usando-se $z = 0$, $dz/dt = v_0$ em $t = 0$, acha-se $z = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ como acima. As respostas de (*b*) e (*c*) são então obtidas como antes.

3.4. Ache a velocidade em módulo da partícula do probl. 3.3 em termos de sua distância à origem O.

Método 1. Do probl. 3.3, equações (3) e (7), tem-se

$$v = v_0 - gt, \qquad z = v_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Resolvendo a primeira equação em t e substituindo na segunda equação, acha-se

$$z = v_0\left(\frac{v_0 - v}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 - v}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad \text{ou} \quad v^2 = v_0^2 - 2gz$$

Método 2. Da equação (1) do probl. 3.3 tem-se, como $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$ e $v = dz/dt$,

$$\frac{dv}{dt} = -g, \quad \text{i.e.} \quad \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = -g \quad \text{ou} \quad v\frac{dv}{dz} = -g$$

Então por integração $v^2/2 = -gz + c_3$. Como $v = v_0$ em $z = 0$, $c_3 = v_0^2/2$ e assim $v^2 = v_0^2 - 2gz$.

Método 3. Veja o probl. 3.9 para um método usando o princípio da conservação de energia.

MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

3.5. Um projétil é lançado com velocidade inicial v_0 e um ângulo α com a horizontal. Ache (*a*) o vetor posição em um instante qualquer, (*b*) o tempo para alcançar o mais alto ponto, (*c*) a máxima altura alcançada, (*d*) o tempo de volta à terra e (*e*) o alcance.

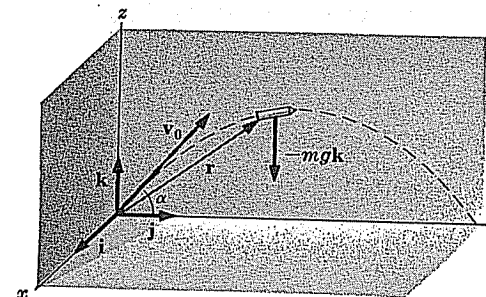



Fig. 3-8

(*a*) Seja $\mathbf{r}$ o vetor posição do projétil e $\mathbf{v}$ a velocidade em um instante qualquer t. Então pela segunda lei de Newton

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} \qquad (1)$$

i.e.,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g\mathbf{k} \qquad (2)$$

Por integração obtém-se

$$\mathbf{v} = -gt\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \qquad (3)$$

Considere que a velocidade inicial do projétil esteja no plano yz tal que a velocidade inicial seja dada por

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} \qquad (4)$$

Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ em $t = 0$, acha-se de (3),

$$\mathbf{v} = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + (v_0\,\text{sen}\,\alpha - gt)\mathbf{k} \qquad (5)$$

Repondo $\mathbf{v}$ por $d\mathbf{r}/dt$ em (5) e integrando, obtém-se

$$\mathbf{r} = (v_0 \cos\alpha)t\,\mathbf{j} + \{(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2\}\mathbf{k} \tag{6}$$

ou, equivalentemente, $x = 0,\ y = (v_0 \cos\alpha)t,\ z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$ (7)

Segue daí que o projétil permanece no plano yz.

(*b*) No ponto mais alto da trajetória a componente da velocidade $\mathbf{v}$ na direção $\mathbf{k}$ é zero. Assim

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 0 \quad \text{e} \quad t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \tag{8}$$

é o tempo pedido.

(*c*) Usando o valor de t obtido em (*b*), acha-se de (7) que

$$\text{A máxima altura alcançada} = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g} \tag{9}$$

(*d*) O tempo de retôrno à terra é o tempo em que $z = 0$, i.e. quando

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = t[(v_0 \operatorname{sen}\alpha) - \tfrac{1}{2}gt] = 0$$

ou como $t \neq 0$,

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} \tag{10}$$

Note que este tempo é o dobro do tempo de (*b*).

(*e*) O alcance é o valor de y no instante dado por (10) i.e.,

$$\text{Alcance} = (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

3.6. Mostre que a trajetória do projétil do probl. 3.5 é uma parábola.

Da segunda equação de (7) do probl. 3.5, tem-se $t = y/(v_0 \cos\alpha)$. Substituindo isto na terceira equação de (7) do probl. 3.5, acha-se

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)(y/v_0\cos\alpha) - \tfrac{1}{2}g(y/v_0\cos\alpha)^2 \quad \text{ou} \quad z = y \operatorname{tag}\alpha - (g/2v_0^2)\,y^2 \sec^2\alpha$$

que é uma parábola no plano yz.

3.7. Prove que o alcance do projétil do probl. 3.5 é máximo quando for lançado de um ângulo de $\alpha = 45°$.

Pelo probl. 3.5(*e*) o alcance é $(v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha)/g$. Isto é máximo quando $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$, i.e., $2\alpha = 90°$ ou $\alpha = 45°$.

O POTENCIAL E A ENERGIA POTENCIAL EM UM CAMPO DE FORÇA UNIFORME.

3.8. (*a*) Prove que um campo de força uniforme é conservativo, (*b*) ache o potencial correspondente a este campo e (*c*) deduza a energia potencial de uma partícula de massa m em um campo de força gravitacional.

(*a*) Se o campo de força é como o indicado na fig. 3-1, então $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k}$. Tem-se

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & -F_0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Assim, o campo de força é conservativo.

(*b*) $\mathbf{F} = -F_0\mathbf{k} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$. Então, $\frac{\partial V}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial z} = F_0$ de onde $V = F_0 z + c$. Se $V = 0$ para $z = z_0$, então, $c = -F_0 z_0$ e, assim, $V = F_0(z - z_0)$.

(*c*) Para um campo de força uniforme gravitacional, $\mathbf{F} = -mg\mathbf{k}$ [veja a fig. 3-2] e corresponde a $F_0 = mg$. Então, pela parte (*b*), a energia potencial é $V = mg(z - z_0)$.

3.9. Faça o probl. 3.4 usando o princípio da conservação de energia.

De acordo com o princípio de conservação de energia, tem-se

(E.P. em $z = 0$)	+	(E.C. em $z = 0$)	=	(E.P. em z)	+	(E.C. em z)
0	+	$\frac{1}{2}mv_0^2$	=	mgz	+	$\frac{1}{2}mv^2$

Então, $v^2 = v_0^2 - 2gz$.

MOVIMENTO EM UM MEIO RESISTENTE

3.10. No instante $t = 0$ um pára-quedista [fig. 3-9] tendo um peso de magnitude mg está localizado em $z = 0$ e está caindo verticalmente com velocidade v_0. Se a força ou resistência do ar atuante no pára-quedas é proporcional à sua velocidade instantânea, ache (*a*) a velocidade em módulo, (*b*) a distância percorrida e (*c*) a aceleração em um instante $t > 0$.

(*a*) Considere que o pára-quedista (considerado como uma partícula de massa m) esteja localizado a uma distância z da origem O. Se $\mathbf{k}$ é um vetor unitário na direção vertical com sentido para baixo, então o pêso é $mg\,\mathbf{k}$ enquanto a força de resistência do ar é $-\beta v\mathbf{k}$ tal que a força resultante seja $(mg - \beta v)\mathbf{k}$. Assim, pela lei de Newton,

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{k} = (mg - \beta v)\mathbf{k} \tag{1}$$

i.e., $$m\frac{dv}{dt} = mg - \beta v \quad \text{ou} \quad \frac{m\,dv}{mg - \beta v} = dt$$

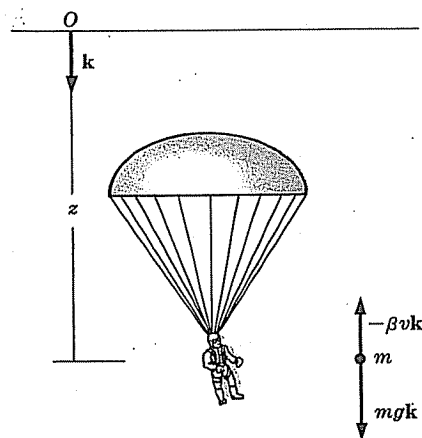



Fig. 3-9

Integrando, $$-\frac{m}{\beta}\ln(mg-\beta v) = t + c_1 \tag{2}$$

Como $v = v_0$ em $t = 0$, $c_1 = -\dfrac{m}{\beta}\ln(mg-\beta v_0)$. Então, de (2),

$$t = \frac{m}{\beta}\ln(mg-\beta v_0) - \frac{m}{\beta}\ln(mg-\beta v) = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{mg-\beta v_0}{mg-\beta v}\right)$$

Assim, $$\frac{mg-\beta v_0}{mg-\beta v} = e^{\beta t/m} \quad \text{ou} \quad v = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} \tag{3}$$

(*b*) De (3), $dz/dt = mg/\beta + (v_0 - mg/\beta)e^{-\beta t/m}$. Então, por integração,

$$z = \frac{mgt}{\beta} - \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} + c_2$$

Como $z = 0$ em $t = 0$, $c_2 = (m/\beta)(v_0 - mg/\beta)$ e assim

$$z = \frac{mgt}{\beta} + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)(1 - e^{-\beta t/m}) \tag{4}$$

(*c*) De (3), a aceleração é dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\beta t/m} = \left(g - \frac{\beta v_0}{m}\right)e^{-\beta t/m} \tag{5}$$

3.11. Mostre que o pára-quedista do probl. 3.10 atinge uma velocidade limite dada por mg/β.

Método 1.

Da equação (3) do probl. 3.10, $v = mg/\beta + (v_0 - mg/\beta)e^{-\beta t/m}$. Então enquanto t aumenta, v aproxima-se de mg/β tal que após pouco tempo o pára-quedista está caindo com uma velocidade que é praticamente constante.

Método 2.

Se o pára-quedista aproxima-se de uma velocidade limite a aceleração limite é nula. Assim, da equação (1) do probl. 3.10 tem-se $mg - \beta v_{\text{lim}} = 0$ ou $v_{\text{lim}} = mg/\beta$.

3.12. Uma partícula de massa m está percorrendo o eixo x tal que em $t = 0$ ela está localizada em $x = 0$ e tem velocidade v_0. A partícula sofre a ação de uma força que se opõe ao movimento e tem magnitude proporcional ao quadrado da velocidade instantânea. Ache (*a*) a velocidade em módulo, (*b*) a posição e (*c*) a aceleração da partícula em um instante qualquer $t > 0$.

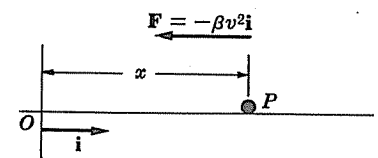



Fig. 3-10

(*a*) Considere que a partícula P esteja a uma distância x de O em $t = 0$ e tem velocidade v [veja a fig. 3-10]. Então a força $\mathbf{F} = -\beta v^2\mathbf{i}$ onde $\beta > 0$ é uma constante de proporcionalidade. Pela lei de Newton,

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = -\beta v^2\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{\beta}{m}dt \tag{1}$$

Integrando, $-1/v = -\beta t/m + c_1$. Como $v = v_0$ quando $t = 0$, tem-se $c_1 = -1/v_0$. Assim

$$-\frac{1}{v} = -\frac{\beta t}{m} - \frac{1}{v_0} \quad \text{ou} \quad v = \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m} \tag{2}$$

que é a velocidade pedida.

(*b*) De (2), $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{mv_0}{\beta v_0 t + m}$. Então $\displaystyle\int dx = \int \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m}dt = \frac{mv_0}{\beta v_0}\int \frac{dt}{t + m/\beta v_0}$

ou

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(t + \frac{m}{\beta v_0}\right) + c_2$$

Como $x = 0$ em $t = 0$, $c_2 = -\frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m}{\beta v_0}\right)$. Assim,

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(t + \frac{m}{\beta v_0}\right) - \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{m}{\beta v_0}\right) = \frac{m}{\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta v_0 t}{m}\right) \quad (3)$$

(c) De (a),

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_0}{\beta v_0 t + m}\right) = -\frac{\beta m v_0^2}{(\beta v_0 t + m)^2} \quad (4)$$

Note que, embora a velocidade em módulo da partícula decresça continuamente, ela nunca alcança o repouso.

3.13. Determine (a) a velocidade em módulo e (b) a aceleração da partícula do probl. 3.12 como uma função da distância x de O.

Método 1. Dos itens (a) e (b) do probl. 3.12,

$$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{\beta v_0 t + m}{m}\right), \quad \text{e} \quad v = \frac{mv_0}{\beta v_0 t + m} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta v_0 t + m}{m} = \frac{v_0}{v}$$

Então, $$x = \frac{m}{\beta}\ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \quad \text{ou} \quad v = v_0 e^{-\beta x/m}$$

e a aceleração é dada em magnitude por

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\beta v_0}{m}e^{-\beta x/m}\frac{dx}{dt} = -\frac{\beta v_0^2}{m}e^{-2\beta x/m}$$

que pode ser também obtida da equação (4) do probl. 3.12.

Método 2. Da equação (1) do probl. 3.12 tem-se

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\frac{dv}{dx} = -\beta v^2$$

ou como $v \neq 0$, $m\frac{dv}{dx} = -\beta v$ e $\frac{dv}{v} = -\frac{\beta}{m}x$. Integrando, $\ln v = -\beta x/m + c_3$. Como $v = v_0$ quando $x = 0$, $c_3 = \ln v_0$. Assim, $\ln(v/v_0) = -\beta x/m$ ou $v = v_0 e^{-\beta x/m}$.

3.14. Suponha que, no probl. 3.5, seja admitido que o projétil esteja sob a ação de uma força devido à resistência do ar igual a $-\beta\mathbf{v}$, onde β é uma constante positiva e $\mathbf{v}$ é a velocidade instantânea. Ache (a) a velocidade e (b) o vetor-posição em um instante qualquer.

(a) A equação do movimento, neste caso, é

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v} \quad \text{ou} \quad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \beta\mathbf{v} = -mg\mathbf{k} \quad (1)$$

Dividindo por m e multiplicando pelo fator de integração $e^{\int \beta/m\, dt} = e^{\beta t/m}$, a equação pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\{e^{\beta t/m}\mathbf{v}\} = -ge^{\beta t/m}\mathbf{k}$$

Integrando-se, obtém-se

$$e^{\beta t/m}\mathbf{v} = -\frac{mg}{\beta}e^{\beta t/m}\mathbf{k} + \mathbf{c}_1 \quad (2)$$

A velocidade inicial ou a velocidade em $t = 0$ é

$$\mathbf{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} \quad (3)$$

Usando isto em (2), acha-se

$$\mathbf{c}_1 = v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k} + \frac{mg}{\beta}\mathbf{k}$$

Assim, (2) fica ao redividir por $e^{\beta t/m}$,

$$\mathbf{v} = (v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k})e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}(1 - e^{-\beta t/m})\mathbf{k} \quad (4)$$

(b) Trocando $\mathbf{v}$ por $d\mathbf{r}/dt$ em (4) e integrando, acha-se

$$\mathbf{r} = -\frac{m}{\beta}(v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k})e^{-\beta t/m} - \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\beta t/m}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}_2 \quad (5)$$

Como $\mathbf{r} = 0$ em $t = 0$,

$$\mathbf{c}_2 = \frac{m}{\beta}(v_0\cos\alpha\,\mathbf{j} + v_0\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k}) + \frac{m^2 g}{\beta^2}\mathbf{k} \quad (6)$$

Usando (6) em (5), acha-se

$$\mathbf{r} = \frac{mv_0}{\beta}(\cos\alpha\,\mathbf{j} + \text{sen}\,\alpha\,\mathbf{k})(1 - e^{-\beta t/m}) - \frac{mg}{\beta}\left(t + \frac{m}{\beta}e^{-\beta t/m} - \frac{m}{\beta}\right)\mathbf{k} \quad (7)$$

3.15. Prove que o projétil do probl. 3.14 atinge uma velocidade limite e ache o seu valor.

Método 1.

Referindo à equação (4) do probl. 3.14. Conforme t cresce, $e^{-\beta t/m}$ aproxima-se de zero. Assim a velocidade aproxima-se do valor limite igual a $\mathbf{v}_{\lim} = -(mg/\beta)\mathbf{k}$.

Método 2.

Se o projétil aproxima-se de uma velocidade limite, sua aceleração limite deve ser nula. Assim da equação (1) do probl. 3.14. $-mg\mathbf{k} - \beta\mathbf{v}_{\text{lim}} = 0$ ou $\mathbf{v}_{\text{lim}} = -(mg/\beta)\mathbf{k}$.

MOVIMENTO RESTRINGIDO

3.16. Uma partícula P de massa m desliza sem rolar por um plano AB inclinado de um ângulo α, fig. 3-11. Se ela parte do repouso no topo do plano inclinado em A, ache (*a*) a aceleração, (*b*) a velocidade e (*c*) a distância percorrida após um intervalo de tempo t.

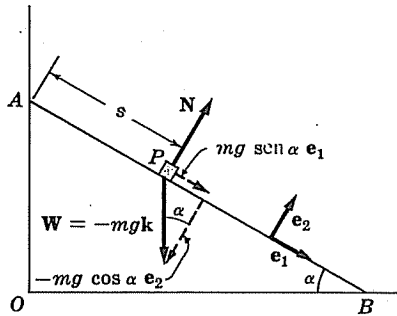



Fig. 3-11

(*a*) Como não há fricção, as únicas forças atuantes sobre P são o peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$ e a força de reação do plano inclinado, que é dada pela força normal $\mathbf{N}$.

Sejam $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ os vetores unitários paralelo e perpendicular ao plano inclinado, respectivamente. Se chamarmos de s a magnitude do deslocamento, a partir do topo do plano inclinado A, tem-se, pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d^2}{dt^2}(s\mathbf{e}_1) = \mathbf{W} + \mathbf{N} = mg \operatorname{sen} \alpha \, \mathbf{e}_1 \tag{1}$$

Como a resultante igual a $\mathbf{W} + \mathbf{N}$ é $mg \operatorname{sen} \alpha \mathbf{e}_1$, como é indicado na fig. 3.11. De (1) tem-se

$$d^2 s/dt^2 = g \operatorname{sen} \alpha \tag{2}$$

Assim, a aceleração no instante t é uma constante igual a $g \operatorname{sen} \alpha$.

(*b*) Como $v = ds/dt$ é a velocidade em módulo, (2) pode ser escrita

$$dv/dt = g \operatorname{sen} \alpha \quad \text{ou} \quad v = (g \operatorname{sen} \alpha)t + c_1$$

integrando-se. Usando a condição inicial $v = 0$, em $t = 0$, tem-se $c_1 = 0$, tal que a velocidade em módulo em um instante qualquer t é

$$v = (g \operatorname{sen} \alpha)t \tag{3}$$

A velocidade é $v\mathbf{e}_1 = (g \operatorname{sen} \alpha)t\mathbf{e}_1$ que tem a magnitude $(g \operatorname{sen} \alpha)t$ na direção $\mathbf{e}_1$

(*c*) Como $v = ds/dt$, (3) pode ser escrito

$$ds/dt = (g \operatorname{sen} \alpha)t \quad \text{ou} \quad s = \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen} \alpha)t^2 + c_2$$

integrando-se. Usando a condição inicial $s = 0$ em $t = 0$, acha-se $c_2 = 0$, tal que a distância percorrida pedida é

$$s = \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen} \alpha)t^2 \tag{4}$$

3.17. Se o comprimento AB do plano inclinado no probl. 3.16 é 1, ache (*a*) o tempo τ gasto pela partícula para alcançar a parte inferior do plano inclinado B e (*b*) a velocidade em módulo em B.

(*a*) Como $s = 1$ em B, o tempo τ, para alcançar a parte inferior da equação (4) do probl. 3.16, é dada por

$$l = \tfrac{1}{2}(g \operatorname{sen} \alpha)\tau^2 \quad \text{ou} \quad \tau = \sqrt{2l/(g \operatorname{sen} \alpha)}.$$

(*b*) A velocidade em módulo em B é dada por (3) do probl. 3.16 por

$$v = (g \operatorname{sen} \alpha)\tau = \sqrt{2gl \operatorname{sen} \alpha}.$$

MOVIMENTO ENVOLVENDO A FRICÇÃO

3.18. Faça o probl. 3.16, se o plano inclinado tiver um coeficiente de fricção μ.

(*a*) Neste caso há em adição às forças $\mathbf{W}$ e $\mathbf{N}$, atuantes sobre P, uma força $\mathbf{f}$[veja a fig. 3-12] dirigida para o bordo superior do plano inclinado [em direção oposta ao movimento] e com magnitude

Fig. 3-12

$$\mu N = \mu mg \cos \alpha \tag{1}$$

i.e.,

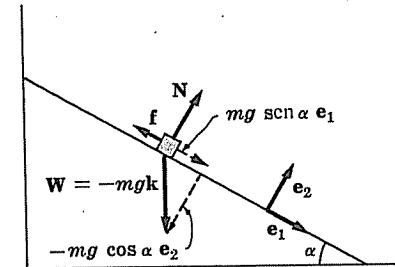
$$\mathbf{f} = -\mu mg \cos \alpha \, \mathbf{e}_1 \tag{2}$$

Então, a equação (1) do probl. 3.16 é trocada por

$$m\frac{d^2(s\mathbf{e}_1)}{dt^2} = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} = mg \operatorname{sen} \alpha_1 \mathbf{e}_1 - \mu mg \cos \alpha \, \mathbf{e}_1 \tag{3}$$

ou

$$d^2 s/dt^2 = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) \tag{4}$$

Assim, a aceleração, descendo o plano inclinado, tem uma magnitude constante $g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$, desde que $\operatorname{sen} \alpha > \mu \cos \alpha$ ou $\operatorname{tg} \alpha > \mu$ [senão a força devido à fricção seria tão grande que a partícula não se moveria].

Trocando d^2s/dt^2 por dv/dt em (4) e integrando como no item (b) do probl. 3.16, acha-se que a velocidade em módulo em um instante qualquer t é

$$v = g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)\,t \qquad (5)$$

(c) Trocando por ds/dt em (5) e integrando como na parte (c) do probl. 3.16, acha-se

$$s = \tfrac{1}{2}g(\operatorname{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)\,t^2 \qquad (6)$$

3.19. Um objeto desliza sobre uma superfície de gelo, ao longo de uma linha horizontal OA [fig. 3-13]. Em um certo ponto de sua trajetória, a velocidade em módulo é v_0 e o objeto alcança o repouso após percorrer a distância x_0. Prove que o coeficiente de fricção é $v^2/2gx_0$.

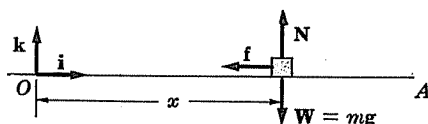



Fig. 3-13

Seja x a distância instantânea do objeto de massa m de O e considere que no instante $t = 0$, $x = 0$ e $dx/dt = v_0$.

Três forças agem sobre o objeto, numerando-as (1) o peso $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, (2) a força normal $\mathbf{N}$ da superfície do gelo sobre o objeto e (3) a força de atrito $\mathbf{f}$.

Pela segunda lei de Newton, tem-se, se v é a velocidade instantânea

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} \qquad (1)$$

Mas, como $\mathbf{N} = -\mathbf{W}$ e a magnitude de $\mathbf{f}$ é $f = \mu N = \mu mg$, tal que $\mathbf{f} = -\mu mg\mathbf{i}$, (1) fica

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{i} = -\mu mg\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -\mu g \qquad (2)$$

Método 1. Escreva (2) na forma

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\mu g \quad \text{ou} \quad v\frac{dv}{dx} = -\mu g \qquad (3)$$

Então,
$$v\,dv = -\mu g\,dx$$

Integrando e usando o fato de que $v = v_0$ em $x = 0$, acha-se.

$$v^2/2 = -\mu gx + v_0^2/2 \qquad (4)$$

Então, como $v = 0$ quando $x = x_0$ (4), fica

$$-\mu gx_0 + v_0^2/2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = v_0^2/2gx_0 \qquad (5)$$

Método 2. De (2) tem-se, por integração e usando o fato de que $v = v_0$ em $t = 0$,

$$v = v_0 - \mu gt \quad \text{ou} \quad dx/dt = v_0 - \mu gt \qquad (6)$$

Integrando novamente e usando o fato de que $x = 0$ em $t = 0$, acha-se

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2}\mu gt^2 \qquad (7)$$

De (7) vê-se que o objeto atinge o repouso (i.e., $v = 0$), quando

$$v_0 - \mu gt = 0 \quad \text{ou} \quad t = v_0/\mu g$$

Substituindo isto em (7) e notando que $x = x_0$, obtém-se o resultado pedido.

ESTÁTICA EM UM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

3.20. Uma partícula de massa m está suspensa em equilíbrio por dois fios inelásticos de comprimentos a e b dos pontos A e B, que distam entre si de c. Ache a tensão em cada fio.

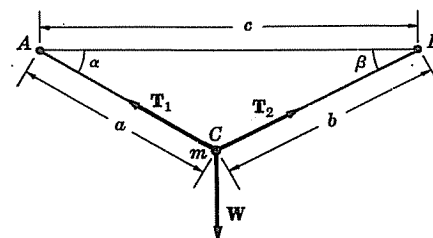
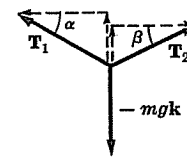



Fig. 3-14 **Fig. 3-15**

Seja $\mathbf{W}$ o peso da partícula e $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ tensões respectivas dos fios de comprimentos a e b, como é indicado na fig. 3-14. Estas forças são também indicadas na fig. 3-15 e é admitido que elas estejam no plano dos vetores unitários j e k. Projetando $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ na horizontal e vertical, achando-se suas componentes e é claro que

$$\mathbf{T}_1 = T_1\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} - T_1\cos\alpha\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{T}_2 = T_2\operatorname{sen}\beta\,\mathbf{k} + T_2\cos\beta\,\mathbf{j}$$

onde T_1 e T_2 são as magnitudes de $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ respectivamente e onde α e β são os respectivos ângulos de A e B. Tem-se também que

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{k}$$

Como a partícula está em equilíbrio, se, e somente se, a força resultante atuante sobre ela for nula, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \mathbf{W}\\ &= T_1\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} - T_1\cos\alpha\,\mathbf{j} + T_2\operatorname{sen}\beta\,\mathbf{k} + T_2\cos\beta\,\mathbf{j} - mg\mathbf{k}\\ &= (T_2\cos\beta - T_1\cos\alpha)\mathbf{j} + (T_1\operatorname{sen}\alpha + T_2\operatorname{sen}\beta - mg)\mathbf{k}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Deve-se ter daí

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0, \qquad T_1 \operatorname{sen}\alpha + T_2 \operatorname{sen}\beta - mg = 0$$

E, resolvendo simultaneamente, acha-se

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}, \qquad T_2 = \frac{mg\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$$

Onde os ângulos α e β podem ser determinados da lei dos co-senos como

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right), \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

Daí podem-se achar as tensões em termos de a, b e c.

PROBLEMAS DIVERSOS

3.21. Um plano inclinado [fig. 3-16] faz um ângulo α com a horizontal. Um projétil é lançado da parte inferior A do plano inclinado com uma velocidade em módulo v_0 e em uma direção que faz um ângulo β com a horizontal.

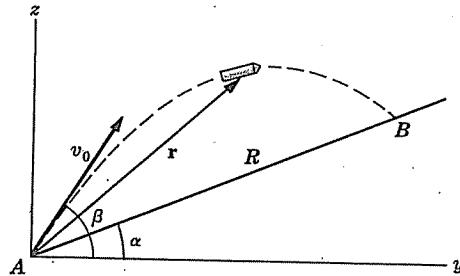



Fig. 3-16

(*a*) Prove que o alcance, para cima, no plano inclinado é dado por

$$R = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

(*b*) Prove que o alcance máximo, para cima, no plano inclinado é dado por

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

e é obtido quando

$$\beta = \pi/4 + \alpha/2.$$

(*a*) Como no probl. 3.5, equação (6), o vetor-posição do projétil em um tempo qualquer t é

$$\mathbf{r} = (v_0\cos\beta)t\mathbf{j} + \{(v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2\}\mathbf{k} \tag{1}$$

ou

$$y = (v_0\cos\beta)t, \qquad z = (v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

A equação do plano inclinado [que é uma linha no plano yz] é

$$z = y\operatorname{tg}\alpha \tag{3}$$

Usando as equações (2) em (3), vê-se que a trajetória dos projéteis e o plano inclinado se interseccionam para os valores de t onde

$$(v_0\operatorname{sen}\beta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = [(v_0\cos\beta)t]\operatorname{tg}\alpha$$

i.e. $\quad t = 0 \quad$ e $\quad t = \dfrac{2v_0(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \cos\beta\operatorname{sen}\alpha)}{g\cos\alpha} = \dfrac{2v_0\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}$

O valor $t = 0$ dá a intersecção no ponto A. O segundo valor de t dá o ponto pedido B. Usando este segundo valor de t na primeira equação de (2), acha-se que o alcance pedido R para cima no plano inclinado é

$$R = y\sec\alpha = (v_0\cos\beta)\left\{\frac{2v_0\operatorname{sen}(\beta-\alpha)}{g\cos\alpha}\right\}\sec\alpha = \frac{2v_0^2\operatorname{sen}(\beta-\alpha)\cos\beta}{g\cos^2\alpha}$$

(*b*) *Método* 1. O alcance R pode ser escrito pelo uso da identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}A\cos B = \tfrac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\}$$

como

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}\{\operatorname{sen}(2\beta-\alpha) - \operatorname{sen}\alpha\}$$

Isto é um máximo, quando $\operatorname{sen}(2\beta-\alpha) = 1$, i.e. $2\beta-\alpha = \pi/2$ ou $\beta = \alpha/2 + \pi/4$, e o valor deste máximo é

$$R = \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}(1-\operatorname{sen}\alpha) = \frac{v_0^2}{g(1-\operatorname{sen}^2\alpha)}(1-\operatorname{sen}\alpha) = \frac{v_0^2}{g(1+\operatorname{sen}\alpha)}$$

Método 2.

O resultado pedido pode ser também obtido pelos métodos do cálculo diferencial para achar o máximo e mínimo.

3.22. Duas partículas de massas m_1 e m_2 são conectadas por um fio inextensível de massa negligenciável, como é mostrado na fig. 3-17. Descreva o movimento, achando (*a*) a aceleração das partículas e (*b*) a tensão no fio.

Isole-se, em primeiro lugar, a massa m_1. Há duas forças agindo sobre ela: (1) seu peso $m_1\mathbf{g} = m_1 g\mathbf{k}$, e (2) a força devida ao fio que está sob tensão $\mathbf{T} = -T\mathbf{k}$. Se chamar-se $\mathbf{a} = a\mathbf{k}$ a aceleração, então, pela lei de Newton,

$$m_1 a\mathbf{k} = m_1 g\mathbf{k} - T\mathbf{k} \tag{1}$$

Isole-se, em segundo lugar, a massa m_2. Há também duas forças atuantes sobre ela: (1) seu peso $m_2\mathbf{g} = m_2 g\mathbf{k}$, e (2) a tensão $\mathbf{T} = -T\mathbf{k}$ [a tensão é a mes-

ma em todo o fio, desde que a massa do fio seja suposta como sendo desprezível e que o fio seja considerado inextensível]. Como o fio é inextensível, a aceleração de m_2 é $-\mathbf{a} = -a\mathbf{k}$. Então, pela lei de Newton,

$$-m_2 a\mathbf{k} = m_2 g\mathbf{k} - T\mathbf{k} \tag{2}$$

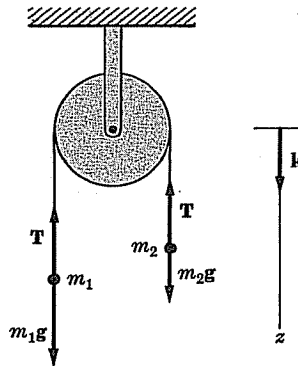



Fig. 3-17

De (1) e (2), tem-se

$$m_1 a = m_1 g - T, \quad -m_2 a = m_2 g - T$$

Resolvendo-as simultaneamente, acha-se

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Assim, as partículas movem-se com aceleração constante, uma partícula subindo e a outra caindo.

Neste sistema de polia, algumas vezes chamado de *máquina de Atwood*, a polia pode girar. Entretanto, como ela é sem atrito e não tem massa ou massa negligenciável, o efeito é o mesmo como se o fio passasse por um olhal, em vez de por uma polia. No caso da massa da polia não ser desprezível, os efeitos rotacionais devem ser levados em conta e serão considerados no cap. 9.

3.23. Uma partícula P de massa m repousa no topo A de uma esfera fixa, sem atrito, de raio b. A partícula é deslocada ligeiramente e, assim, ela desliza (sem rolar) caindo da esfera. (*a*) Em que posição ela deixará a esfera e (*b*) qual será a sua velocidade em módulo nesta posição?

A partícula escorregará por um arco de círculo de raio a, que foi escolhido como pertencente ao plano xy, como é indicado na fig. 3-18. As fôrças atuantes sobre a partícula são: (1) seu peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{j}$, e (2) a força de reação $\mathbf{N}$ da esfera sobre a partícula normalmente à esfera.

Método 1.

(*a*) Seja a posição da partícula sobre o círculo medida pelo ângulo θ e sejam

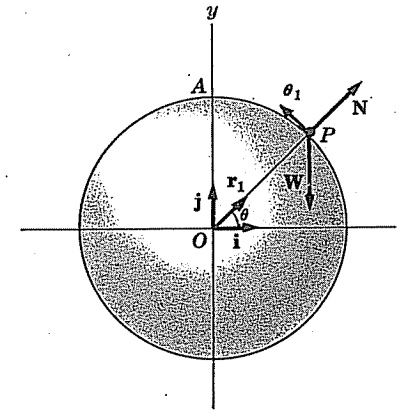



Fig. 3-18

$\mathbf{r}_1$ e $\boldsymbol{\theta}_1$ os vetores unitários. Separando $\mathbf{W}$ em componentes nas direções $\mathbf{r}_1$ e $\boldsymbol{\theta}_1$, como foi feito no probl. 1.43,

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= (\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (\mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1 \\ &= (-mg\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (-mg\mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\theta}_1)\boldsymbol{\theta}_1 = -mg \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\, \boldsymbol{\theta}_1\end{aligned}$$

Também $\qquad \mathbf{N} = N\mathbf{r}_1$

Usando a segunda lei de Newton e o resultado do probl. 1.49, tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= m\mathbf{a} = m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1] \\ &= \mathbf{W} + \mathbf{N} = (N - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1 \qquad (1)\end{aligned}$$

Assim, $\quad m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\operatorname{sen}\theta, \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = -mg\cos\theta \qquad (2)$

Enquanto a partícula está sobre o círculo (ou esfera), tem-se $r = b$. Substituindo isto em (2),

$$-mb\dot{\theta}^2 = N - mg\operatorname{sen}\theta, \quad b\ddot{\theta} = -g\cos\theta \tag{3}$$

Multiplicando a segunda equação por $\dot{\theta}$, vê-se que ela pode ser escrita como

$$b\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = -g\frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\theta)$$

Integrando, $b\dot{\theta}^2/2 = -g\operatorname{sen}\theta + c_1$. Quando $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ tal que $c_1 = g$ e

$$b\dot{\theta}^2 = 2g(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{4}$$

Substituindo (4) na primeira equação de (3), acha-se

$$N = mg(3\operatorname{sen}\theta - 2) \tag{5}$$

Assim, desde que $N > 0$, a partícula permanece em contato com a esfera; mas, quando $N = 0$, a partícula estará deixando a esfera. Assim, o ângulo pedido é dado por $3 \operatorname{sen}\theta - 2 = 0$, i.e.,

$$\operatorname{sen}\theta = 2/3 \quad \text{ou} \quad \theta = \operatorname{sen}^{-1} 2/3 \tag{6}$$

(*b*) Pondo $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}$ em (4), acha-se

$$\dot{\theta}^2 = 2g/3b \tag{7}$$

Então, se v é a velocidade em módulo, tem-se $v = b\dot{\theta}$ tal que (7) leva a $v^2 = \frac{2}{3}bg$ ou $v = \sqrt{\frac{2}{3}bg}$.

Método 2. Pela conservação de energia, usando o eixo como nível de energia, tem-se

$$\text{E.P. em } A + \text{E.C. em } A = \text{E.P. em } P + \text{E.C. em } P$$

$$mgb \quad + \quad 0 \quad = mgb \operatorname{sen}\theta \quad + \quad \tfrac{1}{2}mv^2$$

ou

$$v^2 = 2gb(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{8}$$

Usando o resultado do probl. 1.35, junto com a segunda lei de Newton, tem-se, como o raio de curvatura é b,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \left(\frac{v^2}{b}\mathbf{r}_1 - \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\theta}_1\right) = \mathbf{W} + \mathbf{N}$$

$$= (N - mg \operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\boldsymbol{\theta}_1$$

Usando somente a componente $\mathbf{r}_1$, tem-se

$$v^2/b = N - mg \operatorname{sen}\theta \tag{9}$$

De (8) e (9) acha-se $N = mg(3 \operatorname{sen}\theta - 2)$, que dá o ângulo pedido $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3})$ como no método 1. A velocidade em módulo é, então, achada de (8).

Problemas Propostos

CAMPOS DE FORÇA UNIFORME E MOVIMENTO LINEAR DE CORPOS EM QUEDA LIVRE

3.24. Um objeto de massa m é solto de uma altura H acima da superfície terrestre. Prove que, se a resistência do ar é negligenciável, então ele alcançará o chão (*a*) em um tempo $\sqrt{2H/g}$ e (*b*) com velocidade em módulo $\sqrt{2gH}$.

3.25. Faça o probl. 3.24, se o objeto for atirado verticalmente para baixo, com uma velocidade inicial de magnitude v_0.
Resp. (*a*) $(\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0)/g$, (*b*) $\sqrt{v_0^2 + 2gH}$

3.26. Prove que o objeto do probl. 3.3 volta à superfície da Terra (*a*) com a mesma velocidade em módulo que a velocidade inicial e (*b*) em um tempo que é duas vezes o que se leva para alcançar a máxima altura.

3.27. Uma bola que é atirada para cima alcança a máxima altura de 30,5 m e, então, retorna ao ponto inicial. (*a*) Com que velocidade ela é atirada? (*b*) Quanto tempo ela demora para voltar?
Resp. (*a*) 24,38 m/s, (*b*) 5 s.

3.28. Uma bola que é atirada verticalmente alcança uma altura dada H, em um instante τ_1 quando sobe e em um instante τ_2 quando desce. Prove que (*a*) a velocidade inicial com que a bola é atirada tem uma magnitude $\frac{1}{2}g(\tau_1 + \tau_2)$ e (*b*) a altura $H = \frac{1}{2}g\tau_1\tau_2$.

3.29. No probl. 3.28, qual é a máxima altura alcançada?
Resp. $\frac{1}{8}g(\tau_1 + \tau_2)^2$

3.30. Dois objetos são soltos de um penhasco de altura H. O segundo é solto quando o primeiro já percorreu uma distância D. Prove que, no instante em que o primeiro objeto alcança o chão, o segundo objeto está a uma distância acima de $2\sqrt{DH} - D$.

3.31. Um elevador parte do repouso e atinge uma velocidade em módulo de 4,87 m/s em 2 s. Ache o peso de um homem de 72,5 kg no elevador, se ele estiver (*a*) subindo e (*b*) descendo.
Resp. (*a*) 91 kg, (*b*) 54,3 kg.

3.32. Uma partícula de massa de 3 kg, movendo-se em linha reta, desacelera uniformemente de uma velocidade de 40 m/s para 20 m/s em uma distância de 300 m. (*a*) Ache a magnitude da desaceleração. (*b*) Quanto ainda a partícula percorrerá, antes de parar e quanto tempo levará?
Resp. (*a*) 2 m/s², (*b*) 100 m; 10 s.

3.33. No probl. 3.32, qual é o trabalho total feito para se trazer a partícula ao repouso, da velocidade de 40 m/s?
Resp. 2400 newtons metros (ou joules).

MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

3.34. Um projétil é lançado com uma velocidade de 290 km/h, na boca do canhão, em um ângulo de 60° com a horizontal e caindo no mesmo plano de lançamento. Ache (*a*) a máxima altura alcançada, (*b*) o tempo para alcançar a máxima altura, (*c*) o tempo total de vôo, (*d*) o alcance, (*e*) a velocidade em módulo, após um minuto de vôo, (*f*) a velocidade em módulo em uma altura de 9.750 m.
Resp. (*a*) 24,9 km, (*b*) 71,4 s, (*c*) 142,8 s, (*d*) 57,5 km
(*e*) 1500 km/h, (*f*) 2 500 km/h.

3.35. (*a*) Qual é o máximo alcance possível para um projétil lançado por um ca-

nhão, tendo, na bôca deste, uma velocidade de 1,60 km/s e (*b*) qual é a altura alcançada neste caso?
Resp. (*a*) 265 km, (*b*) 66,3 km.

3.36. Um canhão tem seu máximo alcance dado por $R_{máx}$. Prove que (*a*) a altura alcançada em tal caso é $\frac{1}{4}R_{máx}$ e (*b*) o tempo de vôo é $\sqrt{R_{máx}/2g}$.

3.37. Deseja-se lançar um projétil da superfície terrestre de modo que ele atinja um dado ponto dessa superfície que está a uma distância menor que o alcance máximo. Prove que há dois ângulos possíveis para o lançamento, um dos quais menor que 45° de uma certa diferença e outro maior que 45° da mesma diferença.

3.38. Um projétil, tendo um alcance horizontal R, alcança a máxima altura H. Prove que ele deve ser lançado com (*a*) uma velocidade inicial em módulo igual a $\sqrt{g(R^2 + 16H^2)/8H}$ e (*b*) a um ângulo com a horizontal dado por $\text{sen}^{-1}(4H/\sqrt{R^2 + 16H^2})$.

3.39. Um projétil é lançado a um ângulo α de um penhasco de altura H acima do nível do mar. Se ele cair no mar a uma distância D da base do penhasco, prove que sua máxima altura acima do nível do mar é

$$H + \frac{D^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{4(H + D \operatorname{tg} \alpha)}$$

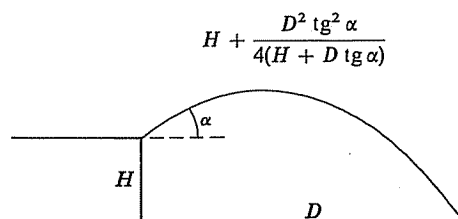



Fig. 3-19

MOVIMENTO EM UM MEIO RESISTENTE

3.40. Um objeto de peso W é atirado verticalmente para cima, com uma velocidade em módulo v_0. Supondo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade instantânea e que a constante de proporcionalidade seja κ, prove que (*a*) o objeto alcançará a máxima altura de

$$\frac{W\kappa v_0}{\kappa^2 g} - \frac{W^2}{\kappa^2 g} \ln\left(1 + \frac{\kappa v_0}{W}\right)$$

e que (*b*) o tempo gasto para alcançar a máxima altura é

$$\frac{W}{\kappa g} \ln\left(1 + \frac{\kappa v_0}{W}\right)$$

3.41. Um homem com pára-quedas desce partindo do repouso e adquire uma velocidade limite de 24 km/h. Supondo que a resistência do ar seja proporcional a sua velocidade instantânea em módulo, determine quanto tempo levará para alcançar a velocidade de 22,5 km/h.
Resp. 1,86 s.

3.42. Uma massa m move-se ao longo de uma linha reta, sob a influência de uma força constante F. Admitindo que haja uma força resistente numericamente igual a kv^2 onde v é a velocidade instantânea em módulo e k é uma constante, prove que a distância percorrida, ao ir da velocidade em módulo v_1 para a v_2, é

$$\frac{m}{2\kappa} \ln\left(\frac{F - \kappa v_1^2}{F - \kappa v_2^2}\right).$$

3.43. Uma partícula de massa m move-se em uma linha reta sob a ação de uma força resistiva constante de magnitude F. Se ela parte do repouso com a velocidade em módulo v_0, (*a*) quanto tempo ela levará para alcançar o repouso e (*b*) qual será a distância percorrida neste tempo?
Resp. (*a*) mv_0/F, (*b*) $mv_0^2/2F$

3.44. Pode o probl. 3.43 ser feito por considerações de energia? Explique.

3.45. Uma locomotiva de massa m corre com uma velocidade em módulo constante v_0 ao longo do trilho. (*a*) Quanto tempo ela levará para parar, após ser desligada, se a resistência ao movimento é dada por $\alpha + \beta v^2$, onde v é a velocidade instantânea e α e β são constantes? (*b*) Qual é a distância percorrida?
Resp. (*a*) $\sqrt{m/\beta}\operatorname{tg}^{-1}(v_0\sqrt{\beta/\alpha})$, (*b*) $(m/2\beta)\ln(1 + \beta v_0^2 \alpha)$

3.46. Uma partícula move-se ao longo do eixo x sob a ação de uma só força resistiva, que é proporcional ao cubo da velocidade em módulo instantânea. Se a velocidade em módulo inicial é v_0 e após o tempo τ a velocidade em módulo é $\frac{1}{2}v_0$, prove que a velocidade em módulo será $\frac{1}{4}v_0$ no instante 5τ.

3.47. Ache a distância total percorrida por uma partícula do probl. 3.46, ao alcançar as velocidades em módulo (*a*) $\frac{1}{2}v_0$, (*b*) $\frac{1}{4}v_0$.
Resp. (*a*) $\frac{2}{3}v_0\tau$, (*b*) $v_0\tau$

3.48. Prove que, para o projétil do probl. 3.14, (*a*) o tempo para alcançar o mais alto ponto é

$$\frac{m}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0 \operatorname{sen} \alpha}{mg}\right),$$

(*b*) a máxima altura é $$\frac{mv_0 \operatorname{sen}\alpha}{\beta} - \frac{m^2 g}{\beta^2} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0 \operatorname{sen} \alpha}{mg}\right).$$

MOVIMENTO VINCULADO E FRICÇÃO

3.49. Um peso de 45,4 kg desliza a partir do repouso por um plano inclinado de 60° e de comprimento 61 m, partindo do topo do plano inclinado. Negligen-

ciando a fricção, (*a*) quanto tempo levará ele para alcançar a parte inferior do plano inclinado e (*b*) qual é a velocidade em módulo com que alcança a parte inferior?
Resp. (*a*) 3,80 s, (*b*) 32.2 m/s.

3.50. Faça o probl. 3.49, se o coeficiente de fricção for 0,3.
Resp. (*a*) 4,18 s. (*b*) 29,2 m/s.

3.51. (*a*) Com que velocidade em módulo deve um objeto ser atirado sobre um plano inclinado liso de ângulo α e comprimento 1, partindo da parte inferior, de modo que ele alcance a parte superior e (*b*) qual o tempo gasto?
Resp. (*a*) $\sqrt{2gl \operatorname{sen} \alpha}$, (*b*) $\sqrt{2l/(g \operatorname{sen} \alpha)}$

3.52. Se for gasto um tempo τ para que um objeto, partindo com a velocidade em módulo v_0, sôbre uma superfície de gelo, venha a parar, prove que o coeficiente de fricção é $v_0/g\tau$.

3.53. Qual é a força necessária para fazer subir um caminhão de 10 t., com uma velocidade em módulo uniforme, por um plano inclinado de 30°, se o coeficiente de fricção for 0,1?
Resp. 5,87 t.

3.54. Uma massa m repousa sobre um pedaço de madeira horizontal. A madeira é inclinada até que a massa inicie a se movimentar. Se o ângulo que a madeira faz com a horizontal naquele instante é α, prove que o coeficiente de fricção é $\mu = \operatorname{tg} \alpha$.

3.55. Uma massa de 400 kg sobre um plano inclinado de 30° está sob a ação de uma força de 4.800 newtons, que faz um ângulo de 30° com o plano inclinado, como é mostrado na fig. 3-20. Ache a aceleração da massa, se o plano inclinado (*a*) for sem atrito, ou (*b*) tiver um coeficiente de atrito 0,2.
Resp. (*a*) 5,5 m/s², (*b*) 5,0 m/s².

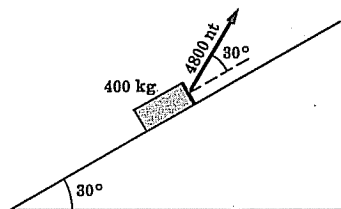



Fig. 3-20

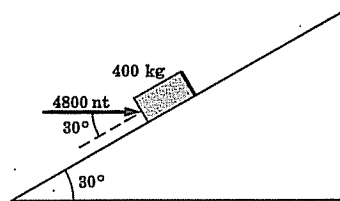



Fig. 3-21

3.56. Faça o probl. 3.55, se a força de 4.800 newtons for atuante como na fig. 3-21.
Resp. (*a*) 5,5 m/s², (*b*) 2,6 m/s².

ESTÁTICA E UM CAMPO GRAVITACIONAL UNIFORME

3.57. Um peso de 100 kg é suspenso verticalmente pelo centro com uma corda, como é mostrado na fig. 3-22. Determine a tensão T na corda.
Resp. T = 100 kgf = 980 newtons

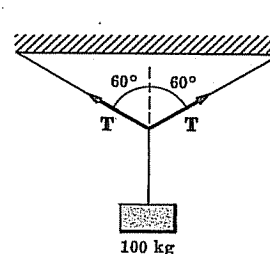
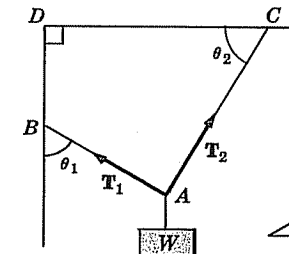
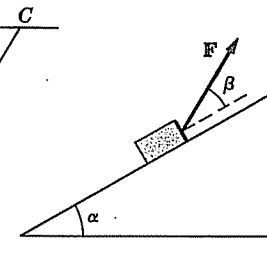



Fig. 3-22 Fig. 3-23 Fig. 3-24

3.58. Na fig. 3-23, AB e AC são cordas amarradas ao teto CD e à parede BD em C e B, respectivamente. Um peso W é suspenso por A. Se as cordas AB e AC fazem um ângulo θ_1 e θ_2 com a parede e o teto, respectivamente, ache as tensões T_1 e T_2 nas cordas.

Resp. $T_1 = \dfrac{W \cos \theta_2}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$, $T_2 = \dfrac{W \operatorname{sen} \theta_1}{\cos(\theta_1 - \theta_2)}$

3.59. Ache a magnitude da força $\mathbf{F}$ necessária para manter a massa m em equilíbrio sôbre o plano inclinado da fig. 3-24, se (*a*) o plano for liso, (*b*) o plano tiver coeficiente de fricção μ.

Resp. (*a*) $F = \dfrac{mg \operatorname{sen} \alpha}{\cos \beta}$, (*b*) $F = \dfrac{mg(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)}{\cos \beta}$

3.60. Que fôrça é necessária para acelerar um trem pesando 290 t do repouso à velocidade de 24,1 km/h em 20 segundos, se o coeficiente de fricção for 0,02 e se (*a*) o trilho for horizontal, (*b*) o trilho for inclinado de um ângulo de 10° com a horizontal e com o trem subindo? Use sen 10° = 0,1737, cos 10° = 0,9848.
Resp. (*a*) 15,7 t, (*b*) 117,5 t.

3.61. Faça o probl. 3.60 (*b*) se o trem estiver descendo o plano inclinado.
Resp. 3,26 t.

3.62. Um trem de massa m está deslizando para baixo por um plano inclinado de ângulo α e coeficiente de fricção μ, com uma velocidade em módulo v_0 constante. Prove que a fôrça necessária para parar o trem no tempo τ é dada por

$$mg(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha) + mv_0/\tau.$$

PROBLEMAS DIVERSOS

3.63. Uma pedra é deixada cair em um poço e o som da sua queda na superfície da água é ouvido após um tempo τ. Supondo que a velocidade em módulo do som é c, prove que a profundidade da superfície da água no poço é

$$(\sqrt{c^2 + 2gc\tau} - c)^2/2g.$$

3.64. Um projétil é lançado para baixo do topo de um plano inclinado de um ângulo α, em uma direção que faz o ângulo γ com o plano inclinado. Admitindo que o projétil bata no plano inclinado, prove que (*a*) o alcance é dado por $R = \dfrac{2v_0^2 \operatorname{sen} \gamma \cos(\gamma - \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$ e que (*b*) o máximo alcance é dado por

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{g(1 - \operatorname{sen} \alpha)}.$$

3.65. Um canhão está localizado em uma colina que tem a forma de um plano inclinado de ângulo α com a horizontal. Um projétil é disparado deste canhão na direção da parte superior da colina, fazendo um ângulo β com ela. Prove que, para o projétil bater na colina horizontalmente, deve-se ter

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{2 \operatorname{sen} 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha}\right).$$

3.66. Considere que dois projéteis sejam lançados de ângulos α e β com a horizontal do mesmo lugar, ao mesmo tempo, no mesmo plano vertical e com a mesma velocidade em módulo inicial. Prove que, durante o curso do movimento, a linha ligando os projéteis faz um ângulo constante com a vertical dado por $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

3.67. É possível resolver a equação (1), da introdução do segundo capítulo, pelo método da separação das variáveis? Explique.

3.68. Quando lançado em um ângulo θ_1 com a horizontal, um projétil cai a uma distância D_1 antes do alvo, enquanto, lançado em um ângulo θ_2, ele cai a uma distância D_2 depois do alvo. Ache o ângulo em que deve ser lançado o projétil, para que ele atinja o alvo.

3.69. Um objeto é atirado verticalmente para baixo. Durante o décimo segundo, ele cai o dobro do que durante o quinto segundo. Com que velocidade ele é atirado?
Resp. 4,88 m/s.

3.70. Um canhão, que dá a um projétil uma velocidade em módulo v_0 na sua boca, está situado a uma altura h acima de um plano horizontal. Prove que o ângulo no qual ele deve ser atirado para que tenha o maior alcance no plano é dado por

$$\theta = \tfrac{1}{2} \cos^{-1} gh/(v_0^2 + gh).$$

3.71. Na fig. 3-25, AB é uma mesa lisa e as massas m_1 e m_2 são conectadas por um fio sobre um suporte liso B. Ache (*a*) a aceleração de massa m_2 e (*b*) a tensão no fio.

Resp. (*a*) $\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$, $m_2 > m_1$

(*b*) $\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

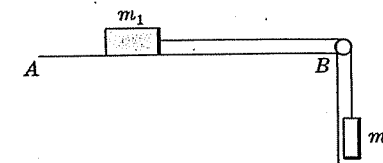



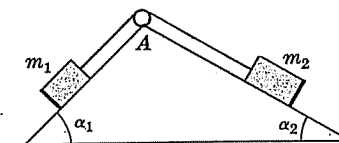
Fig. 3-25

3.72. Faça o probl. 3.71, considerando que a mesa tenha um coeficiente de fricção μ.

3.73. O máximo alcance de um projétil, quando atirado para a parte inferior de um plano inclinado, é o dobro do máximo quando atirado para a parte superior do plano inclinado. Ache o ângulo do plano inclinado com a horizontal.
Resp. $\operatorname{sen}^{-1} 1/3$

3.74. As massas m_1 e m_2 estão localizadas em planos inclinados lisos de ângulos α_1 e α_2, respectivamente e são conectadas por um fio inextensível de massa negligenciável, que passa por um suporte liso em A [fig. 3-26]. Ache as acelerações das massas.
Resp. As acelerações têm magnitudes iguais a

Fig. 3-26

$$\frac{m_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - m_2 \operatorname{sen} \alpha_2}{m_1 + m_2} g$$

3.75. Faça o probl. 3.74, considerando que o coeficiente de fricção entre as massas e o plano inclinado seja μ.

Resp. $\dfrac{m_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - m_2 \operatorname{sen} \alpha_2 - \mu m_1 \cos \alpha_1 - \mu m_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2} g$

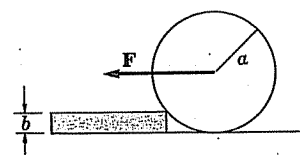



Fig. 3-27

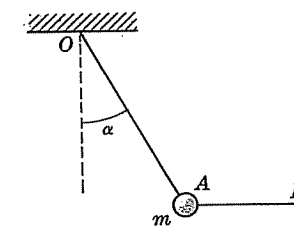



Fig. 3-28

3.76. Prove que a menor força horizontal **F** necessária para puxar um cilindro de raio a e peso W sobre um obstáculo de altura b [veja a fig. 3-27] é dada em magnitude por $W\sqrt{b(2a - b)}/(a - b)$.

3.77. Explique, matematicamente, porque um projétil, atirado de um canhão A no topo de um penhasco de altura H acima da Terra, pode alcançar um canhão B, localizado na superfície, enquanto um projétil atirado de um canhão B, com a mesma velocidade na boca do canhão, não é capaz de atingir o canhão A.

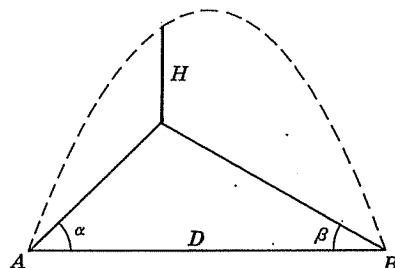



Fig. 3-29

3.78. Na fig. 3-28 a massa m oscila presa a um fio inextensível OA. Se ela for puxada para o lado com um fio na horizontal AB, tal que OA faz um ângulo α com a vertical, ache a tensão em cada fio.

Resp. Tensão em $AB = mg \operatorname{tg} \alpha$
Tensão em $OA = mg \sec \alpha$

3.79. Uma partícula, movendo-se ao longo do eixo x, está submetida à ação de uma força resistiva tal que o tempo t para que ela percorra uma distância x é dado por $t = Ax^2 + Bx + C$, onde A, B e C são constantes. Prove que a magnitude das forças resistivas é proporcional ao cubo da velocidade instantânea em módulo.

3.80. Um projétil é lançado de modo que vá de A para B, que estão respectivamente nas bases de dois planos inclinados de ângulos α e β como é mostrado na fig. 3-29 e ultrapasse ligeiramente o obstáculo de altura H. Se a distância entre A e B é D, ache o ângulo de tiro com a horizontal.

3.81. Uma partícula de massa m move-se sobre um plano inclinado, sem atrito, de um ângulo α e comprimento l. Se a partícula parte do repouso, no topo do plano inclinado, qual será sua velocidade em módulo na parte inferior, supondo que a resistência do ar é igual a kv onde v é a velocidade instantânea e k é uma constante?

3.82. Considere que no probl. 3.23 a partícula P tenha uma velocidade inicial v_0 no topo do círculo (ou esfera). (*a*) Prove que, se $v_0 \leqq \sqrt{gb}$, o ângulo θ, no qual a partícula deixa o círculo, é dado por $\operatorname{sen}^{-1}(\frac{2}{3} + v_0^2/3gb)$. (*b*) Discuta o que acontece, se $v_0 > \sqrt{gb}$.

3.83. Um canhão está situado no topo de um penhasco na vertical com face para o mar e de altura H sobre o nível do mar. Qual deve ser a mínima velocidade na boca do canhão, de maneira que um projétil, lançado dele, alcance um navio, a uma distância D do pé do penhasco?

3.84. No probl. 3.83, (*a*) quanto tempo levará para que o projétil atinja o navio e (*b*) qual é a sua velocidade, ao alcançar o navio?

3.85. Uma corrente uniforme de comprimento total a tem uma porção $0 < b < a$ caindo pela borda de uma mesa lisa AB [veja a fig. 3-30]. Prove que o tempo para que a corrente deslize toda da mesa, se ela parte do repouso, é $\sqrt{a/g}\ln(a + \sqrt{a^2 - b^2})/b$.

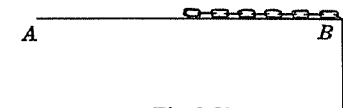



Fig. 3-30

3.86. Se a mesa no probl. 3.85 tem uma coeficiente de fricção μ, prove que o tempo gasto é

$$\sqrt{\frac{a}{(1+\mu)g}}\ln\left\{\frac{a + \sqrt{a^2 - [b(1+\mu) - a\mu]^2}}{b(1+\mu) - a\mu}\right\}$$

3.87. Um peso W_1 está dependurado de um lado de uma polia fixa e lisa de massa negligenciável [veja a fig. 3-31]. Um homem de peso W_2 sobe pela corda do outro lado da polia, tal que sua acleeração relativamente à polia é a. Prove que o peso W_1 move-se para cima, com uma aceleração dada por

$$[g(W_2 - W_1) - W_2 a]/W_1 \cdot$$

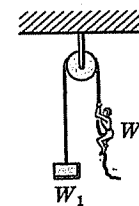



Fig. 3-31

3.88. Dois macacos de pesos iguais estão dependurados nos lados opostos de uma corda que passa por uma polia fixa e lisa de massa negligenciável. O primeiro macaco começa a subir pela corda a uma velocidade de 0,30 m/s enquanto o outro permanece parado em relação à corda. Descreva o movimento do segundo macaco.
Resp. O segundo macaco move-se a uma razão de 0,30 m/s.

3.89. Prove que a partícula do probl. 3.23 cairá a uma distância da base da esfera de $(4\sqrt{290} + 19\sqrt{5})b/81$.

3.90. Prove que, se o atrito for negligenciável, o tempo gasto para que uma partícula deslize para baixo por qualquer corda de um círculo vertical partindo do repouso no topo do círculo, é o mesmo independente da corda escolhida.

3.91. Dada uma linha AB da fig. 3-32 e um ponto qualquer P, onde AB e P estão no mesmo plano vertical. Ache um ponto Q sobre AB tal que uma partícula, partindo do repouso do ponto P, alcançará Q no menor tempo possível.
Sugestão: Use o probl. 3.90.

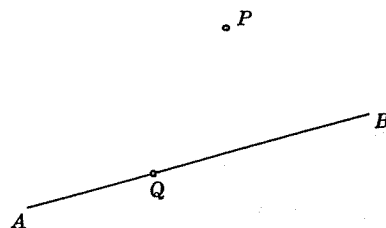



Fig. 3-32

3.92. Mostre como fazer o probl. 3.91, se a linha AB for reposta por uma curva plana. Ele pode ser feito para uma curva especial? Explique.

3.93. Ache o trabalho realizado ao se mover a massa do topo do plano inclinado, do probl. 3.18, ao extremo da parte inferior.
Resp. $mgl(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$.

3.94. A força sobre uma partícula, tendo uma carga elétrica q e que está se movendo em um campo magnético **B**, é dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ onde **v** é a velocidade instantânea. Prove que, se à partícula é dada uma velocidade inicial em módulo igual a v_0 em um plano perpendicular ao campo magnético **B** constante, então ela (*a*) anda com uma velocidade em módulo v_0 constante e (*b*) percorrerá uma trajetória circular e raio mv_0/qB. Suponha que a força gravitacional é desprezível.

3.95. Prove que o *período*, i.e., o tempo para uma vibração completa da partícula do probl. 3.94 é independente da velocidade em módulo da partícula e ache o seu valor.
Resp. $2\pi m/qB$

3.96. Faça o probl. 3.94, se **B** for constante e a partícula tiver uma velocidade inicial em módulo v_0 em um plano que não seja necessariamente perpendicular ao campo magnético. Pode-se definir o período neste caso? Explique.

3.97. Se uma partícula de carga elétrica q e massa m move-se com velocidade **v** em um campo eletromagnético tendo uma intensidade elétrica **E** e uma intensidade magnética **B** a força atuante sobre ela, chamada de *fôrça de Lorentz* é dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Considere que **B** e **E** sejam constantes e nas direções negativa do eixo y e positiva do eixo x, respectivamente. Prove que, se a partícula parte do repouso na origem, então ela descreverá uma ciclóide no plano yz, cuja equação é

$$y = b(\theta - \operatorname{sen} \theta), \qquad z = b(1 - \cos \theta)$$

onde $\theta = qBt/m$, $b = mE/qB^2$ e t é o tempo.

3.98. Um astronauta, de 80 kg, em terra, parte verticalmente em uma nave espacial que alcança a velocidade em módulo de 2.000 km/h em 2 minutos. Assumindo que a aceleração seja constante, qual é o seu peso aparente, durante este período?
Resp. 117 kg.

3.99. No probl. 3.82, a partícula cairá a que distância da base da esfera?

3.100. Na fig. 3-33, o peso W_1 está em cima do peso W_2 que, por sua vez, está em cima de um plano horizontal. O coeficiente de fricção entre W_1 e W_2 é μ, enquanto que, entre W_2 e o plano, é μ_2. Considere que a força F inclinada de um ângulo α com a horizontal seja aplicada ao peso W_1. Prove que, se $\operatorname{cotg} \alpha \geqq \mu_1 > \mu_2$, então uma condição necessária e suficiente para que W_2 se mova em relação ao plano, enquanto W_1 não se move em relação a W_2, é que

$$\frac{\mu_2(W_1 + W_2)}{\cos \alpha - \mu_2 \operatorname{sen} \alpha} < F \leqq \frac{\mu_1 W_1}{\cos \alpha - \mu_1 \operatorname{sen} \alpha}$$

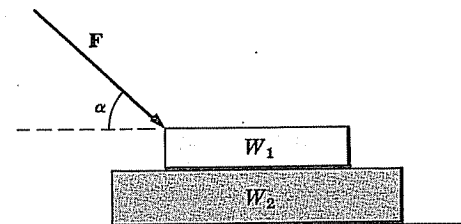



Fig. 3-33

3.101. Discuta os resultados do probl. 3.100, se qualquer uma das condições não for satisfeita.

3.102. Generalize o probl. 3.100.

3.103. Descreva o movimento da partícula do probl. 3.97, se **E** e **B** forem constantes e tiverem a mesma direção.

3.104. Um glóbulo de massa m está localizado em um fio parabólico com seu eixo na vertical e vértice apontado para baixo, como na fig. 3-34 e cuja equação é $cz = x^2$. Se o coeficiente de fricção é μ, ache a distância mais alta acima do eixo x em que a partícula ficará em equilíbrio.
Resp. $\frac{1}{4}\mu^2 c$

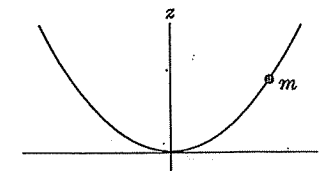



Fig. 3-34

3.105. Faça o probl. 3.104, se a parábola for reposta por um círculo vertical de raio b e que é tangente ao eixo x.

3.106. Um peso W é suspenso por três fios de igual comprimento l que são fixos a 3 vértices de um triângulo equilátero horizontal de lado s. Ache as tensões nos fios.
Resp. $Wl/\sqrt{9l^2-3s^2}$

3.107. Faça o probl. 3.106, considerando haver n fios iguais presos aos n vértices de um polígono regular de n lados.

3.108. Uma corda passa por uma polia fixa da fig. 3.35. Em um lado da corda, uma massa M_1 é presa. Do outro lado da corda, há uma polia de massa M_2, sobre a qual passa uma outra corda com massas m_1 e m_2, presas a ela. Prove que a aceleração da massa m_1 é dada por

$$\frac{3m_2 M_2 - m_1 M_1 - m_1 M_2 - m_2 M_1 - 4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(M_1 + M_2) + 4m_1 m_2} g$$

Fig. 3-35

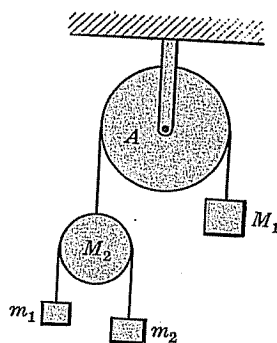
3.109. Um automóvel de peso W com um motor tendo uma potência instantânea e constante $\mathscr{P}$, sobe um plano inclinado de um ângulo α. Supondo que as forças de resistência são v por unidade de peso, prove que a máxima velocidade em módulo que pode ser mantida subindo o plano inclinado é

$$\frac{\mathscr{P}}{W(r + \operatorname{sen} \alpha)}.$$

3.110. Um automóvel de peso W sobe um plano inclinado de um ângulo α, impelido por um motor que tenha uma potência instantânea constante $\mathscr{P}$. Admitindo que a resistência ao movimento seja igual a κv por unidade de peso onde v é a velocidade em módulo instantânea e κ é uma constante, prove que a máxima velocidade em módulo que é possível sôbre o plano inclinado é

$$(\sqrt{W^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 4\kappa W \mathscr{P}} - W \operatorname{sen} \alpha)/2\kappa W.$$

3.111. Uma corrente está dependurada em um suporte com um comprimento a de um lado e um comprimento b, onde $0 < b < a$, do outro lado. Prove que o tempo para que a corrente deslize para fora do suporte é dado por

$$\sqrt{\frac{a+b}{2g}} \ln\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)$$

3.112. Prove que o glóbulo P, que é colocado em um lugar qualquer de um fio sem atrito na vertical [veja fig. 3-36] na forma de uma ciclóide

$$x = b(\theta + \operatorname{sen} \theta), \quad y = b(1 - \cos \theta),$$

alcançará o fundo no mesmo tempo independentemente do ponto de partida e ache este tempo.
Resp. $\pi\sqrt{b/g}$

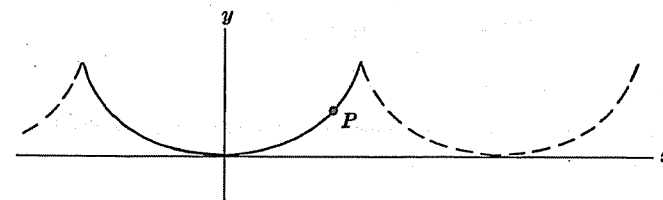



Fig. 3-36

Capítulo 4

O Oscilador Harmônico Simples e o Pêndulo Simples

O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Na fig. 4-1(*a*), a massa *m* está sobre uma mesa horizontal sem atrito indicada pelo eixo *x*. A massa está fixa em uma extremidade de uma mola de massa negligenciável com um comprimento *l* quando não está tracionada e com a outra extremidade fixa em *E*.

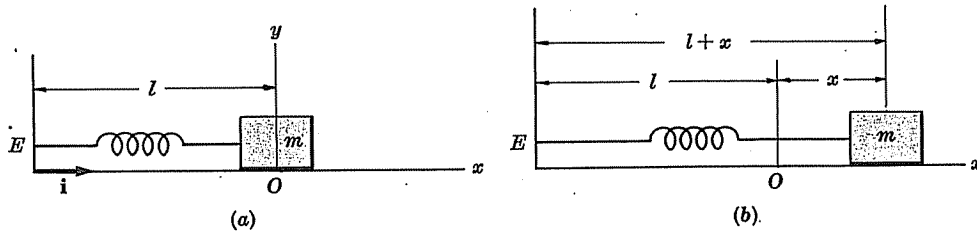



Fig. 4-1

Se for dada a *m* um deslocamento ao longo de eixo *x* [veja fig. 4-1(*b*)] e solta, ela vibrará ou oscilará para diante e para trás, em torno da *posição de equilíbrio O*.

Para determinar a equação do movimento, note que, em um instante, quando a mola tiver um comprimento $l + x$ [fig. 4-1(*b*)] há uma força tendendo a trazer *m* à sua posição de equilíbrio. De acôrdo com a *lei de Hooke*, esta fôrça, chamada de *força de restauração*, é proporcional à distensão *x* e é dada por

$$\mathbf{F}_R = -\kappa x \mathbf{i} \tag{1}$$

onde o subscrito *R* indica "Força de restauração" e onde κ é a constante de proporcionalidade, geralmente chamada de *constante de mola, constante elástica, fator de rigidez ou módulo de elasticidade* e *i* é o vetor unitário com a direção positiva do eixo *x*. Pela segunda lei de Newton, tem-se

$$m\frac{d^2(x\mathbf{i})}{dt^2} = -\kappa x\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad m\ddot{x} + \kappa x = 0. \tag{2}$$

Este sistema vibratório é chamado de *oscilador harmônico simples ou oscilador harmônico linear*. Este tipo de movimento é chamado, geralmente, de *movimento harmônico simples*.

AMPLITUDE, PERÍODO E FREQUÊNCIA DE MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Se se resolver a equação diferencial (2) sujeita às condições iniciais $x = A$ e $dx/dt = 0$ em $t = 0$, acha-se que

$$x = A\cos\omega t, \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m}. \tag{3}$$

Para o caso em que $A = 20$, $m = 2$ e $\kappa = 8$, veja o probl. 4.1.

Como cos ωt varia de valor entre -1 e $+1$, a massa oscila entre $x = -A$ e $x = A$. Um gráfico de *x* versus *t* é mostrado na fig. 4-2.

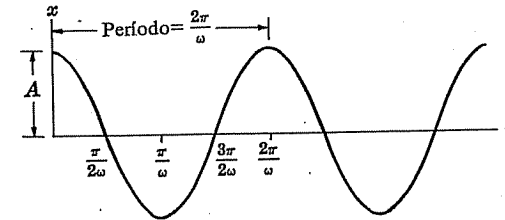



Fig. 4-2

A *amplitude* do movimento é a distância *A* e é a maior distância do ponto de equilíbrio.

O *período* do movimento é o tempo para uma oscilação ou vibração completa [algumas vezes, chamada de um *ciclo*] tal que, por exemplo, *x* varie de $x = A$ a $x = -A$ e de volta a $x = A$ de novo. Se o período fôr chamado de *P*, então

$$P = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/\kappa}. \tag{4}$$

A *frequência* do movimento, chamada de *f*, é o número de oscilações ou ciclos completados por unidade de tempo. Tem-se

$$f = \frac{1}{P} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}. \tag{5}$$

No caso geral, a solução de (2) é

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t, \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m} \tag{6}$$

onde *A* e *B* são determinados pelas condições iniciais. Como foi visto no probl. 4-2, pode-se escrever (6) na forma

$$x = C\cos(\omega t - \phi), \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\kappa/m} \tag{7}$$

e onde

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{e} \quad \phi = \text{tg}^{-1}(B/A) \tag{8}$$

A amplitude neste caso é *C*, enquanto que o período e a frequência permanecem o mesmo como em (4) e (5), isto é, êles não são afetados pelas condições iniciais. O ângulo ϕ é chamado de *ângulo de fase* tal que $0 \le \phi \le \pi$. Se $\phi = 0$, (7) reduz a (3).

ENERGIA DE UM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Se T é a energia cinética, V a energia potencial e $E = T + V$ a energia total de um oscilador harmônico simples, então tem-se

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2, \quad V = \tfrac{1}{2}\kappa x^2 \tag{9}$$

e

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x^2. \tag{10}$$

Veja o probl. 4.17.

O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Na prática, várias fôrças podem ocorrer em um oscilador harmônico, tendendo a reduzir a magnitude das oscilações sucessivas em tôrno da posição de equilíbrio. Tais fôrças são chamadas de *fôrças de amortecimento.* Uma aproximação útil da fôrça de amortecimento é aquela que é proporcional à velocidade e é dada por

$$\mathbf{F}_D = -\beta\mathbf{v} = -\beta v\mathbf{i} = -\beta\frac{dx}{dt}\mathbf{i} \tag{11}$$

onde o subscrito D é para fôrça de amortecimento e onde β é uma constante positiva chamada de *coeficiente de amortecimento.* Note que $\mathbf{F}_D$ e $\mathbf{v}$ são de direções opostas.

Se, em adição à fôrça de restauração, admitimos a fôrça de amortecimento (11), a equação do movimento do oscilador harmônico, agora chamado de *oscilador harmônico amortecido*, é dada por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x - \beta\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \kappa x = 0 \tag{12}$$

aplicando-se a segunda lei de Newton. Dividindo por m e chamando

$$\beta/m = 2\gamma, \quad \kappa/m = \omega^2 \tag{13}$$

esta equação pode ser escrita como

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{14}$$

onde os pontos significam, como é usual, diferenciação com respeito a t.

MOVIMENTO SUPERAMORTECIDO, AMORTECIDO CRITICAMENTE E SUBAMORTECIDO

As soluções obtidas da equação diferencial (14) classificam-se em três casos:

Caso 1. *Movimento Superamortecido*, $\gamma^2 > \omega^2$, i.e., $\beta^2 > 4\kappa m$.
Neste caso, (14) têm a solução geral

$$x = e^{-\gamma t}(Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}), \quad \text{onde} \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{15}$$

e onde as constantes arbitrárias A e B podem ser achadas nas condições iniciais.

Caso 2, *Movimento Amortecido Criticamente*, $\gamma^2 = \omega^2$. i.e., $\beta^2 = 4\kappa m$.
Neste caso, (14) tem a solução geral

$$x = e^{-\gamma t}(A + Bt) \tag{16}$$

onde A e B são achados das condições iniciais.

Caso 3, *Movimento Subamortecido ou Oscilatório Amortecido* $\gamma^2 < \omega^2$, i.e., $\beta^2 < 4\kappa m$.
Neste caso, (14) tem a solução geral

$$\begin{aligned} x &= e^{-\gamma t}(A \operatorname{sen} \lambda t + B\cos\lambda t) \\ &= Ce^{-\gamma t}\cos(\lambda t - \phi), \quad \text{onde} \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{aligned} \tag{17}$$

e onde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, é chamada de *amplitude* e ϕ é chamado de *ângulo de fase*, sendo determinados das condições iniciais.

Nos casos 1 e 2, o amortecimento é suficientemente grande para que não ocorra oscilação e a massa m simplesmente retorna gradualmente à posição de equilíbrio $x = 0$. Isto é indicado pela fig. 4-3, onde é suposto que as condições iniciais $x = x_0$ e $dx/dt = 0$. Note que no caso de amortecimento crítico, a massa m retorna à posição de equilíbrio mais rápida que no caso de superamortecido.

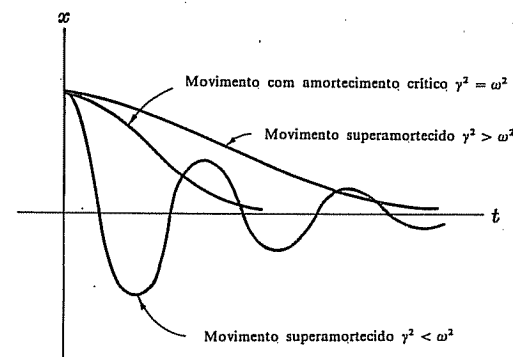



Fig. 4-3

No caso 3, o amortecimento é suficientemente reduzido para que existam oscilações em torno da posição de equilíbrio, embora a magnitude destas oscilações tenda a decrescer com o tempo, como é indicado na fig. 4-3. A diferença de tempo entre dois máximos sucessivos (ou mínimos) no movimento subamortecido (ou oscilação amortecida) da fig. 4-3 é chamada de *período* do movimento e é dada por

$$P = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}} \tag{18}$$

e a frequência, que é o recíproco do período, é dada por

$$f = \frac{1}{P} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}{4\pi m}. \tag{19}$$

Note que, se $\beta = 0$, (18) e (19) reduzem-se a (4) e (5), respectivamente. O período e frequência correspondentes a $\beta = 0$ são, algumas vezes, chamados de *período natural* e *frequência natural*, respectivamente.

O período P dado por (18) é também igual para dois valores sucessivos de t, para os quais $\cos(\lambda t - \phi) = 1$ [ou $\cos(\lambda t - \phi) = 1$] como é dado na equação (17). Suponha

que os valores de x correspondentes a dois valores sucessivos t_n e $t_{n+1} = t_n + P$ são x_n e x_{n+1}, respectivamente. Então,

$$x_n/x_{n+1} = e^{-\gamma t_n}/e^{-\gamma(t_n+P)} = e^{\gamma P} \tag{20}$$

A quantidade

$$\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = \gamma P \tag{21}$$

é uma constante e é chamada de *decremento logarítmico.*

VIBRAÇÕES FORÇADAS

Suponha que, em adição à força de restauração $-\kappa x\mathbf{i}$ e à força de amortecimento $-\beta v\mathbf{i}$, imprima-se uma força $F(t)\mathbf{i}$ sobre a massa m, onde

$$F(t) = F_0 \cos \alpha t. \tag{22}$$

Então, a equação diferencial do movimento é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x - \beta\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \alpha t \tag{23}$$

ou

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t \tag{24}$$

onde

$$\gamma = \beta/2m, \quad \omega^2 = \kappa/m, \quad f_0 = F_0/m. \tag{25}$$

A solução geral de (24) é achada pela adição da solução geral de

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{26}$$

[a qual já foi achada e é dada por (15), (16) ou (17)] a uma das soluções particulares de (24). Uma solução particular de (24) é dado por [veja probl. 4.18]

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t - \phi) \tag{27}$$

onde

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2-\omega^2} \qquad 0 \leqq \phi \leqq \pi. \tag{28}$$

Agora, como pode ser visto, a solução geral de (26) aproxima de zero em um curto tempo e, assim, chama-se esta solução de *solução transiente.* Após este tempo ser ultrapassado, o movimento da massa m é essencialmente dado por (27), o qual é, geralmente, chamado de *solução permanente.* As vibrações ou oscilações que ocorrem são, geralmente, chamadas de *vibrações forçadas* ou *oscilações forçadas,* tendo uma frequência que é igual à da força atuante mas atrasada, com uma fase ϕ.

RESSONÂNCIA

A amplitude da oscilação permanente (27) é dada por

$$\mathscr{A} = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}. \tag{29}$$

supondo $\gamma \neq 0$, i.e., $\beta \neq 0$, assim o amortecimento é suposto presente. O valor máximo de $\mathscr{A}$, neste caso, ocorre quando a freqüência $\alpha/2\pi$ da força atuante é tal que

$$\alpha^2 = \alpha_R^2 = \omega^2 - 2\gamma^2 \tag{30}$$

admitindo que $\gamma^2 < \frac{1}{2}\omega^2$ [veja o probl. 4.19]. Perto dessa frequência, grandes oscilacões podem ocorrer, algumas vezes causando danos ao sistema. O fenômeno é chamado de ***ressonância*** **e a frequencia** $\alpha_R/2\pi$ **é chamada de** ***frequência de ressonância*** **ou** ***frequência ressonante.***

O valor da amplitude máxima na frequência ressonante é

$$\mathscr{A}_{max} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega^2-\gamma^2}}. \tag{31}$$

A amplitude (29) pode ser escrita em têrmos de α_R como

$$\mathscr{A} = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2-\alpha_R^2)^2 + 4\gamma^2(\omega^2-\gamma^2)}}. \tag{32}$$

Um gráfico de $\mathscr{A}$ versus α^2 é mostrado na fig. 4.4. Note que o gráfico é simétrico em relação à frequência de ressonância e que a frequência ressonante, frequência com amortecimento e frequência natural (sem amortecimento) são diferentes entre si. No caso em que não tenha amortecimento, i.e., $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$, tôdas estas frequências são idênticas. Em tal caso, a ressonância ocorre quando a frequência da fôrça atuante fôr igual à freqüência natural de oscilação. A solução geral para este caso é

$$x = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t + \frac{f_0 t}{2\omega}\operatorname{sen}\omega t. \tag{33}$$

Do último têrmo de (33) pode ser visto que as oscilações crescem com o tempo até que, finalmente, a mola se quebre. Veja o probl. 4.20.

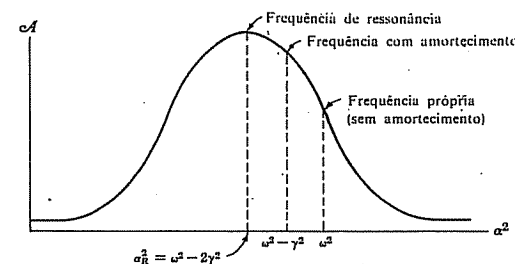



Fig. 4-4

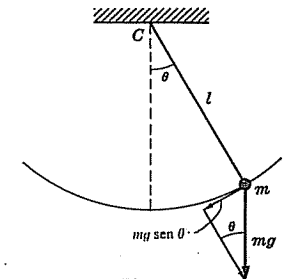



Fig. 4-5

O PÊNDULO SIMPLES

Um *pêndulo simples* consiste em uma massa m [fig. 4.5] na extremidade de uma haste sem peso e de comprimento l [a qual permanece sempre reta, i.e., rígida]. Se a massa m, algumas vezes chamada de *bulbo do pêndulo*, fôr puxada lateralmente e solta, o movimento resultante será oscilatório.

Chamando de θ o ângulo instantâneo que a barra faz com a vertical, a equação diferencial do movimento é [veja probl. 4.23]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{34}$$

supondo desprezíveis as forças de amortecimento ou outras forças externas.

Para ângulos pequenos [i.e., menor que 5°, com a vertical], sen θ é bem próximo de θ, onde θ é dado em radianos, e a equação (34) fica, com um alto grau de aproximação,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta. \tag{35}$$

Esta equação tem a solução geral

$$\theta = A\cos\sqrt{g/lt} + B\operatorname{sen}\sqrt{g/lt} \tag{36}$$

onde A e B são determinados das condições iniciais. Por exemplo, se $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ em $t = 0$, então,

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t. \tag{37}$$

Em tal caso, o movimento do bulbo do pêndulo é o movimento harmônico simples. O período é dado por

$$P = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{38}$$

e a frequência é dada por

$$f = \frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l}. \tag{39}$$

Se os ângulos não são necessariamente pequenos, pode-se mostrar [veja probls. 4.29 e 4.30] que o período é igual a

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}} \tag{40}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

onde $\kappa = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$. Para ângulos pequenos isto reduz-se a (38).

Para os casos onde o amortecimento e outras forças externas são consideradas, veja os probls. 4.25 e 4.114.

O OSCILADOR HARMÔNICO BI E TRIDIMENSIONAL

Considere que uma partícula de massa m mova-se no plano xy sob a influência de um campo de força F dado por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} \tag{41}$$

onde κ_1 e κ_2 são constantes positivas.

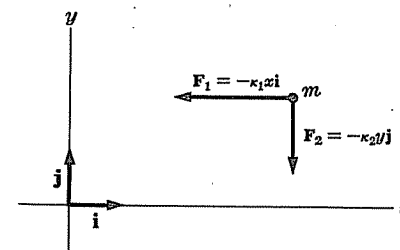



Fig. 4-6

Neste caso, as equações do movimento de m são dadas por

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa_1 x, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa_2 y \tag{42}$$

e têm as soluções

$$x = A_1\cos\sqrt{\kappa_1/m}\,t + B_1\operatorname{sen}\sqrt{\kappa_1/m}\,t, \quad y = A_2\cos\sqrt{\kappa_2/m}\,t + B_2\operatorname{sen}\sqrt{\kappa_2/m}\,t \tag{43}$$

onde A_1, B_1, A_2, B_2 são constantes a determinar das condições iniciais. A massa m sujeita ao campo de fôrça (41) é geralmente chamada como um *oscilador bidimensional harmônico*. As várias trajetórias que m descreve durante o seu movimento são, geralmente, chamadas de *curvas ou figuras de Lissajous.*

Estas idéias são, facilmente, extensíveis a um oscilador harmônico tridimensional de massa m, a qual está sujeita a um campo de força dado por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} - \kappa_3 z\mathbf{k} \tag{44}$$

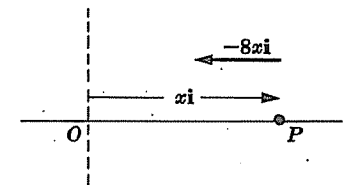
onde κ_1, κ_2 e κ_3 são constantes positivas.

Problemas Resolvidos

O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

4.1. Uma partícula P de massa 2 move-se ao longo do eixo x atraída em direção à origem O por uma força cuja magnitude é numericamente igual a $8x$ [veja fig. 4-7]. Se ela estiver inicialmente em repouso em $x = 20$, ache (*a*) a equação diferencial e as condições iniciais descrevendo o movimento, (*b*) a posição da partícula em um instante qualquer, (*c*) o módulo da velocidade e a velocidade vetorial da partícula em um instante qualquer e (*d*) a amplitude, período e frequência de vibração.

Fig. 4-7

(*a*) Seja $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ o vetor posição de P. A aceleração de P é

$$\frac{d^2}{dt^2}(x\mathbf{i}) = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}.$$

A força resultante sôbre P é $-8x\mathbf{i}$. Então, pela segunda lei de Newton,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -8x\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \tag{1}$$

que é a equação diferencial do movimento. As condições iniciais são

$$x = 20, \quad dx/dt = 0 \quad \text{em} \quad t = 0. \tag{2}$$

(*b*) A solução geral de (1) é

$$x = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t. \tag{3}$$

Quando $t = 0$, $x = 20$ tal que $A = 20$. Assim

$$x = 20\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t. \tag{4}$$

Então

$$dx/dt = -40\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t \tag{5}$$

e pondo em $t = 0$, $dx/dt = 0$, acha-se $B = 0$. Assim, (3) fica

$$x = 20\cos 2t \tag{6}$$

a qual dá a posição em um instante qualquer.

(*c*) De (6) $dx/dt = -40\,\text{sen}\,2t$, o que dá o módulo da velocidade em qualquer instante. A velocidade é dada por

$$\frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -40\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{i}$$

(*d*) Amplitude = 20. Período = $2\pi/2 = \pi$. Frequência = 1/período = $1/\pi$.

4.2. (*a*) Mostre que a função $A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t$ pode ser escrita como $C\cos(\omega t - \phi)$, onde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\phi = \text{tg}^{-1}(B/A)$. (*b*) ache a amplitude, período e frequência da função em (*a*).

(*a*) $$A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,\text{sen}\,\omega t\right)$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos\phi\cos\omega t + \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\omega t)$$
$$= \sqrt{A^2+B^2}\,\cos(\omega t - \phi) = C\cos(\omega t - \phi)$$

onde $\cos\phi = A/\sqrt{A^2+B^2}$ e $\text{sen}\,\phi = B/\sqrt{A^2+B^2}$, i.e., $\text{tg}\,\phi = B/A$ ou $\phi = \text{tg}^{-1}B/A$, e $C = \sqrt{A^2+B^2}$. Geralmente, acha-se o valor de ϕ que situa-se entre 0° e 180°, i.e., $0 \leq \phi \leq \pi$.

(*b*) Amplitude = valor máximo = $C = \sqrt{A^2+B^2}$. Período = $2\pi/\omega$. Frequência = $\omega/2\pi$.

4.3. Faça o probl. 4.1 com P inicialmente em $x = 20$, mas movendo (*a*) para a direita, com o módulo da velocidade igual a 30, (*b*) para a esquerda, com o módulo da velocidade igual a 30. Ache a amplitude, período e frequência em cada caso.

(*a*) a única diferença aqui é que a condição $dx/dt = 0$ em $t = 0$ do probl. 4.1 foi reposta por $dx/dt = 30$ em $t = 0$. Então, de (5), do probl. 4.1, acha-se $B = 15$, e de (3), do probl. 4.1, fica

$$x = 20\cos 2t + 15\,\text{sen}\,2t. \tag{1}$$

o que dá a posição de P em qualquer instante. Isto pode ser escrito [veja o probl. 4.2] como

$$x = \sqrt{(20)^2+(15)^2}\left\{\frac{20}{\sqrt{(20)^2+(15)^2}}\cos 2t + \frac{15}{\sqrt{(20)^2+(15)^2}}\,\text{sen}\,2t\right\}$$
$$= 25\{\tfrac{4}{5}\cos 2t + \tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,2t\} = 25\cos(2t-\phi) \tag{2}$$

onde $\cos\phi = \frac{4}{5}$, $\text{sen}\,\phi = \frac{3}{5}$.

O ângulo ϕ que pode ser achado de (2) é geralmente chamado de *ângulo de fase*.

Como o co-seno varia entre -1 e $+1$, a amplitude = 25. O período e freqüência são os mesmos que antes, i.e., período = $2\pi/2 = \pi$ e freqüência = $2/2\pi = 1/\pi$.

(*b*) Neste caso, a condição $dx/dt = 0$ em $t = 0$ do probl. 4.1 foi reposta por $dx/dt = -30$ em $t = 0$. Então, $B = -15$ e a posição é dada por

$$x = 20\cos 2t - 15\,\text{sen}\,2t$$

que, no item (*a*), pode ser escrita

$$x = 25\{\tfrac{4}{5}\cos 2t - \tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,2t\}$$
$$= 25\{\cos\psi\cos 2t + \text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,2t\} = 25\cos(2t-\psi)$$

onde $\cos\psi = \frac{4}{5}$, $\text{sen}\,\psi = -\frac{3}{5}$.

A amplitude, período e freqüência são os mesmos do item (*a*). A única diferença está no ângulo de fase. A relação entre ψ e ϕ é $\psi = \phi + \pi$. Descreve-se isto dizendo que os dois movimentos são *defasados* de 180° entre si.

4.4. Uma mola de massa negligenciável, suspensa verticalmente por uma de suas extremidades, é tracionada deformando-se 20 cm quando então uma massa de 5 g é presa na outra extremidade. A mola e a massa são colocadas em uma mesa horizontal sem atrito como na fig. 4.1(*a*), com o ponto de fixação em E. A massa é puxada de uma distância de 20 cm, além do ponto de equilíbrio O e sôlta. Ache (*a*) a equação diferencial e as condições iniciais descrevendo o movimento, (*b*) a posição em um instante t qualquer, e (*c*) a amplitude, período e freqüência das vibrações.

(*a*) A fôrça gravitacional sôbre uma massa de 5 g [i.e., o peso de uma massa de 5 g] é $5g = 5\,(980)$ dinas = 4.900 dinas. Então, como 4.900 dinas esticam a mola de 20 cm, a constante da mola é de $\kappa = 4.900/20 = 245$ dinas/cm. Assim, quando a mola é esticada de uma distância x além da posição de equilíbrio, a fôrça de restauração é de $-245x\mathbf{i}$. Então, pela segunda lei de Newton, têm-se, se $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$ é o vetor posição da massa,

$$5\frac{d^2(x\mathbf{i})}{dt^2} = -245x\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 49x = 0. \tag{1}$$

As condições iniciais são

$$x = 20, \quad dx/dt = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \tag{2}$$

(*b*) A solução geral de (1) é

$$x = A\cos 7t + B\,\text{sen}\,7t. \tag{3}$$

Usando as condições (2), acha-se $A = 20$, $B = 0$, tal que $x = 20\cos 7t$.

(*c*) De $x = 20\cos 7t$, vê-se que: amplitude = 20 cm; período = $2\pi/7$ seg; freqüência = $7/2\pi$ vib./s ou $7/2\pi$ ciclos/s.

4.5. Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x, atraída em direção a um ponto fixo O por uma fôrça proporcional à sua distância de O. Inicialmente, a partícula está a uma distância de x_0 de O e com uma velocidade v_0 de direção oposta à de O. Determine (*a*) a posição em um instante qualquer, (*b*) a velocidade em um instante qualquer e (*c*) a amplitude, período, frequência e máximo módulo da velocidade.

(*a*) A fôrça de atração em direção a O é de $-\kappa x\mathbf{i}$, onde κ é uma constante positiva de proporcionalidade. Então, pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -\kappa x\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \frac{\kappa x}{m} = 0. \tag{1}$$

Resolvendo (1), acha-se

$$x = A\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t. \tag{2}$$

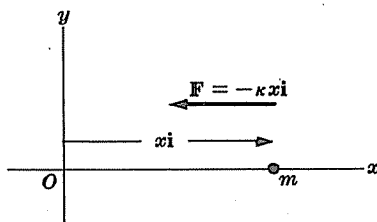



Fig. 4-8

Também tem-se as condições iniciais

$$x = x_0, \quad dx/dt = v_0 \quad \text{em} \quad t = 0. \tag{3}$$

De $x = x_0$ em $t = 0$, acha-se, usando (2), que $A = x_0$. Assim,

$$x = x_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t \tag{4}$$

tal que

$$dx/dt = -x_0\sqrt{\kappa/m}\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t + B\sqrt{\kappa/m}\cos\sqrt{\kappa/m}\,t. \tag{5}$$

De $dx/dt = v_0$ em $t = 0$, acha-se, usando (5), que $B = v_0\sqrt{m/\kappa}$. Assim, fica

$$x = x_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + v_0\sqrt{m/\kappa}\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t. \tag{6}$$

Usando o probl. 4.2, pode ser escrito

$$x = \sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}\,\cos(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi) \tag{7}$$

onde

$$\phi = \text{tg}^{-1}(v_0/x_0)\sqrt{m/\kappa}. \tag{8}$$

(*b*) A velocidade é, usando (6) ou (7),

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} &= (-x_0\sqrt{\kappa/m}\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t + v_0\cos\sqrt{\kappa/m}\,t)\,\mathbf{i}\\ &= -\sqrt{\kappa/m}\sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}\,\text{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi)\,\mathbf{i}\\ &= -\sqrt{v_0^2 + \kappa x_0^2/m}\,\text{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi)\,\mathbf{i}\end{aligned} \tag{9}$$

(*c*) A amplitude é dada de (7) por $\sqrt{x_0^2 + mv_0^2/\kappa}$.

De (7), o período é $P = 2\pi\sqrt{\kappa/m}$. A freqüência é $f = 1/P = 2\pi\sqrt{m/\kappa}$.
De (9), o módulo da velocidade tem um máximo quando

$$\text{sen}(\sqrt{\kappa/m}\,t - \phi) = \pm 1;$$

esta velocidade é de $\sqrt{v_0^2 + \kappa x_0^2/m}$.

4.6. Um objeto de massa 20 kg tem um movimento harmônico simples sôbre o eixo x. Inicialmente ($t = 0$), êle está localizado a uma distância de 4 metros da origem $x = 0$, e tem uma velocidade de 15 m/s e aceleração de 100 m/s² dirigidas para a origem $x = 0$. Ache (*a*) a posição em um instante qualquer, (*b*) a amplitude, período e frequência das oscilações e (*c*) a fôrça sobre o objeto, quando $t = \pi/10$ s.

(*a*) Se x é a posição do objeto no instante t, então as condições iniciais são

$$x = 4, \; dx/dt = -15, \; d^2x/dt^2 = -100 \quad \text{em} \quad t = 0. \tag{1}$$

Para um movimento harmônico simples

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t. \tag{2}$$

Diferenciando, acha-se

$$dx/dt = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{3}$$

$$d^2x/dt^2 = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\,\text{sen}\,\omega t \tag{4}$$

Usando as condições (1) em (2), (3) e (4), acha-se $4 = A$, $-15 = B\omega - 100 = -A\omega^2$. Resolvendo simultaneamente, acha-se $A = 4$, $\omega = 5$, $B = -3$, tal que

$$x = 4\cos 5t - 3\,\text{sen}\,5t \tag{5}$$

que pode ser escrito

$$x = 5\cos(5t - \phi), \quad \text{onde} \quad \cos\phi = \tfrac{4}{5}, \; \text{sen}\,\phi = -\tfrac{3}{5}. \tag{6}$$

(b) De (6) vê-se que: amplitude $= 5$ m, período $= 2\pi/5$ s, freqüência $= 5/2\pi$ vib./s.

(c) Magnitude da aceleração $= d^2x/dt^2 = -100 \cos 5t + 75 \operatorname{sen} 5t = 75 \text{ m/s}^2$ em $t = \pi/10$.

Fôrça sôbre o objeto = (massa)(aceleração) = (20 kg)(75 m/s²) = 1500 newtons.

4.7. Um objeto de peso 19,6 kgf é suspenso pela extremidade inferior de uma mola vertical de massa negligenciável e esticada de 0,20 m. (a) Determine a posição do objeto em um instante qualquer se fôr esticada inicialmente de 0,10 m para baixo e então solta. (b) Ache a amplitude, período e frequência do movimento.

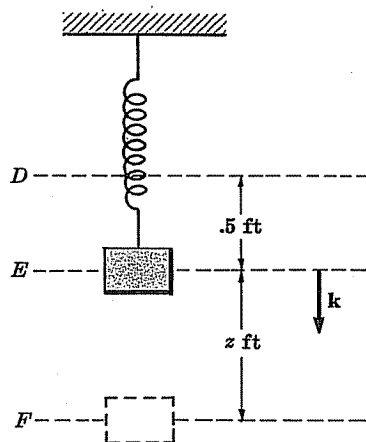



Fig. 4-9

(a) Seja D e E [fig. 4.9], os pontos representantes de posição da extremidade da mola antes e depois de que o objeto seja pendurado na mola. A posição E é a posição de equilíbrio do objeto.

Escolha um sistema de coordenadas como é mostrado na fig. 4.9, tal que o eixo x positivo esteja apontando para baixo e com a origem na posição de equilíbrio.

Pela lei de Hooke, como 19,6 kgf estica a mola de 0,20 m, então 98(0,20 m + z) kgf estica-a de (0,20 + z) m. Assim, quando o objeto está na posição E, há uma força para cima atuando sobre ele de magnitude 98(0,2 + z) kgf e uma força para baixo, devido o seu pêso, de magnitude 19,6 kgf. Pela segunda lei de Newton, têm-se

$$\frac{19{,}6}{9{,}8} \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = 19{,}6\,\mathbf{k} - 98(0{,}20 + z)\,\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dt^2} + 49z = 0.$$

Resolvendo, $$z = A \cos 7 + B \operatorname{sen} 7t \qquad (1)$$

Agora, em $t = 0$, $z = 0{,}10$ m e $dz/dt = 0$; assim $A = 0{,}10$, $B = 0$ e

$$z = 0{,}10 \cos 7t. \qquad (2)$$

(b) De (2): a amplitude $= 0{,}10$ m, período $= 2\pi/7 = \pi/2{,}5$ s, freqüência $= 2{,}5/\pi$ vib./s.

4.8. Faça o probl. 4.7 considerando inicialmente o objeto puxado para baixo de 0,20 m (em vez de 0,10 m) e com uma velocidade inicial de 1,40 m/s para baixo.

Neste caso, a solução (1) do probl. 4.7 mantém-se, mas as condições iniciais são: em $t = 0$, $z = 0{,}20$ e $dz/dt = 1{,}40$. Disto acha-se $A = 0{,}20$ e $B = 0{,}20$, tal que

$$z = 0{,}20 \cos 7t + 0{,}20 \operatorname{sen} 7t = \sqrt{2}/5\,(7t - \pi/4).$$

Assim, a amplitude $= \sqrt{2}/5$ m, período $= 2\pi/7 = \pi/2{,}5$ s, frequência $= 2{,}5/\pi$ vib/s. Note que o período e freqüência não são afetados pela mudança das condições iniciais.

4.9. Uma partícula move-se com o módulo da velocidade angular ω sôbre um círculo de raio b. Prove que sua projeção sôbre um diâmetro têm um movimento harmônico simples de período $2\pi/\omega$ em tôrno do centro.

Escolha o círculo no plano xy com centro na origem O como na fig. 4.10 abaixo. Seja Q a projeção da partícula P sôbre o diâmetro AB escolhido ao longo do eixo x.

Se a partícula está inicialmente em B, então no instante t observa-se $\angle BOP = \theta = \omega t$. Logo, a posição de P no instante t é

$$\mathbf{r} = b \cos \omega t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{j}. \qquad (1)$$

A projeção Q de P sobre o eixo x está a uma distância da origem de

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{i} = x = b \cos \omega t \qquad (2)$$

no instante t. De (2) vê-se que a projeção Q oscila com um movimento harmônico simples de período $2\pi/\omega$ em torno do centro Q.

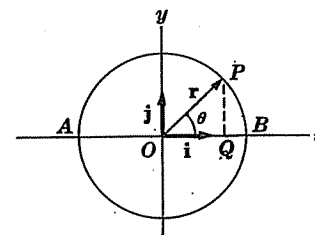



Fig. 4-10

O OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

4.10. Suponha que no probl. 4.1 a partícula P tenha também uma força de amortecimento cuja magnitude seja igual a 8 vêzes o módulo da velocidade instantânea. Ache (a) a posição e (b) a velocidade da partícula em um instante qualquer. (c) Apresente graficamente a posição da partícula como função do tempo t.

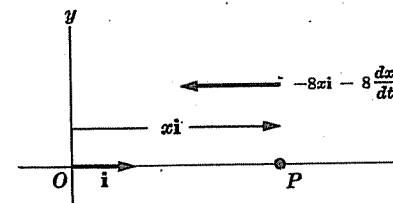



Fig. 4-11

(*a*) Neste caso, a fôrça resultante atuante sôbre P é [veja fig. 4.11] $-8x\mathbf{i}-8\dfrac{dx}{dt}\mathbf{i}$. Então, pela segunda lei de Newton,

$$2\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -8x\mathbf{i}-8\frac{dx}{dt}\mathbf{i}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=0$$

que tem uma solução do tipo [veja Apêndice, probl. C.14] $x = e^{-2t}(A+Bt)$. Quando $t=0$, $x=20$ e $dx/dt=0$; assim, $A=20$, $B=40$, e $x=20e^{-2t}(1+2t)$ dá a posição em um instante t qualquer.

(*b*) A velocidade é dada por

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} = -80te^{-2t}\mathbf{i}.$$

(*c*) O gráfico de x versus t é mostrado na fig. 4.12, onde pode ser visto que o movimento não é oscilatório. A partícula aproxima-se lentamente da origem O, mas nunca a alcança. Este é um exemplo em que o movimento tem um *amortecimento crítico*.

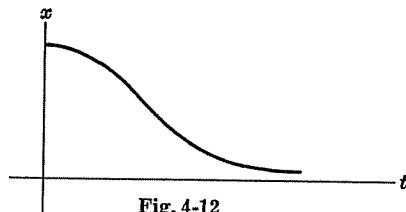



Fig. 4-12

4.11. Uma partícula de massa de 5 g move-se ao longo do eixo x, sob influência de duas fôrças: (i) uma fôrça de atração em direção à origem O, a qual, em dinas, é numericamente igual a 40 vezes a distância instantânea de O, e (ii) uma fôrça de amortecimento proporcional ao módulo da velocidade instantânea tal que quando o módulo da velocidade instantânea fôr de 10 cm/s, a fôrça de amortecimento é de 200 dinas. Admitindo que a partícula inicie o movimento do repouso a uma distância de 20 cm de O, (*a*) determine a equação diferencial e as condições, descrevendo o movimento, (*b*) ache a posição da partícula em um instante qualquer, (*c*) determine a amplitude, período e frequência das oscilações amortecidas e (*d*) faça um gráfico do movimento.

(*a*) Seja o vetor posição da partícula P representado por $\mathbf{r} = x\mathbf{i}$, como é indicado na fig. 4.13. Então, a fôrça de atração (dirigida para O), é

$$-40x\mathbf{i}. \qquad (1)$$

A magnitude da fôrça de amortecimento f é proporcional ao módulo da velocidade tal que $f = \beta\, dx/dt$, onde β é constante. Então, como $f = 200$, quando $dx/dt = 10$, tem-se $\beta = 20$ e $f = 20\, dx/dt$.

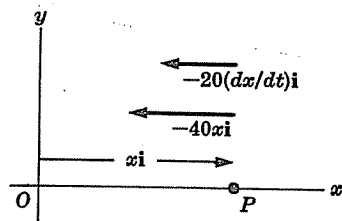



Fig. 4-13

Para achar $\mathbf{f}$, note que, quando $dx/dt > 0$ e $x > 0$, a partícula está no semi-eixo x positivo e move-se para a direita. Assim, a fôrça de resistência deve ser dirigida para a esquerda. Isto pode ser obtido se

$$\mathbf{f} = -20\frac{dx}{dt}\mathbf{i}. \qquad (2)$$

Esta mesma forma de $\mathbf{f}$ é facilmente demonstrável ser correta para $x > 0$, $dx/dt < 0$; $x < 0$, $dx/dt > 0$ e $x > 0$, $dx/dt < 0$ [veja o probl. 4.45].

Então, pela segunda lei de Newton, tem-se

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -20\frac{dx}{dt}\mathbf{i}-40x\mathbf{i} \qquad (3)$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+8x=0. \qquad (4)$$

Como a partícula parte do repouso a 20 cm de O, tem-se

$$x = 20,\ dx/dt = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \qquad (5)$$

onde é suposto que a partícula inicia o movimento sôbre o lado positivo de eixo x [pode-se muito bem supor que a partícula parta do lado negativo, onde $x = -20$].

(*b*) $x = e^{\alpha t}$ é a solução de (4) se

$$\alpha^2+4\alpha+8=0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(-4 \pm \sqrt{16-32}) = -2 \pm 2i.$$

Então, a solução geral é

$$x = e^{-2t}(A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t). \qquad (6)$$

Como $x = 20$ em $t = 0$, acha-se, de (6), que $A = 20$, i.e.,

$$x = e^{-2t}(20\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t). \qquad (7)$$

Assim, por diferenciação,

$$dx/dt = (e^{-2t})(-40\,\text{sen}\,2t + 2B\cos 2t) + (-2e^{-2t})(20\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t). \qquad (8)$$

Como $dx/dt = 0$ em $t = 0$, tem-se, de (8). $B = 20$. Assim, de (7) obtém-se

$$x = 20e^{-2t}(\cos 2t + \text{sen}\,2t) = 20\sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t-\pi/4) \qquad (9)$$

usando o probl. 4.2.

(*c*) De (9): amplitude $= 20\sqrt{2}e^{-2t}$ cm, período $= 2\pi/2 = \pi$s, frequência $= 1/\pi$ vib./s.

(*d*) O gráfico é mostrado na fig. 4.14. Note que as amplitudes de oscilação diminuem, tendendo para zero enquanto o tempo t aumenta.

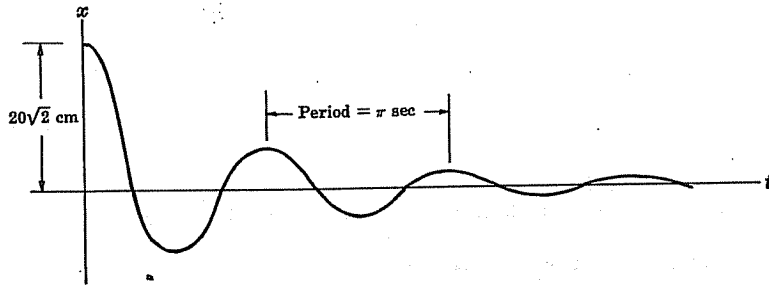



Fig. 4-14

4.12. Ache o decremento logarítmico no probl. 4.11.

Método 1. Os máximos (ou mínimos) de x ocorrem onde $dx/dt = 0$. De (9), do probl. 4.11,

$$dx/dt = -80e^{-2t}\operatorname{sen} 2t = 0$$

quando $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, 5\pi/2, \ldots$; os máximos ocorrem quando $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$; os mínimos ocorrem quando $t = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ A razão de dois máximos sucessivos é $e^{-2(0)}/e^{-2(\pi)}$ ou $e^{-2(\pi)}/e^{-2(2\pi)}$ etc., i.e., $e^{2\pi}$. Então, o decremento logarítmico é $\delta = \ln(e^{2\pi}) = 2\pi$.

Método 2. De (9), do probl. 4.11, a diferença entre dois valôres sucessivos de t, representados por t_n e t_{n+1}, para os quais $\cos(2t - \pi/4) = 1$ (ou -1) é π, que é o período. Então,

$$\delta = \ln(x_n/x_{n+1}) = 2\pi \quad \text{e} \quad \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{20\sqrt{2}\,e^{-2t_n}}{20\sqrt{2}\,e^{-2t_{n+1}}} = e^{2\pi}.$$

Método 3. De (13), (18) e (21), tem-se

$$\delta = \gamma P = \left(\frac{\beta}{2m}\right)\left(\frac{4\pi m}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}\right) = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{4\kappa m - \beta^2}}.$$

Então, como $m = 5$, $\beta = 20$, $\kappa = 40$ [probl. 4.11, equação (3)], $\delta = 2\pi$.

4.13. Determine o período natural e frequência da partícula do probl. 4.11.

O período natural é o período quando não houver amortecimento. Em tal caso, o movimento é obtido da equação (3) ou (4), omitidos os termos em dx/dt do probl. 4.11. Assim,

$$d^2x/dt^2 + 8x = 0 \quad \text{ou} \quad x = A\cos 2\sqrt{2}\,t + B\operatorname{sen}^2\sqrt{2}\,t$$

Então: período natural $= 2\pi/2\sqrt{2}$ s $= \pi/\sqrt{2}$ s; freqüência natural $= \sqrt{2}/\pi$ vib./s.

4.14. Para que gama de valôres de amortecimento constante, no probl. 4.11, o movimento será (*a*) superamortecido, (*b*) subamortecido ou oscilação amortecida, (*c*) amortecido criticamente?

Chame a constante de amortecimento de β, a equação (3) do probl. 4.11 é reposta por

$$5\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} = -\beta\frac{dx}{dt}\mathbf{i} - 40x\mathbf{i} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{5}\cdot\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

Então, o movimento é:

(*a*) Superamortecido se $(\beta/5)^2 > 32$, i.e., $\beta > 20\sqrt{2}$.

(*b*) Subamortecido se $(\beta/5)^2 < 32$, i.e., $\beta < 20\sqrt{2}$.
(Note que êste é o caso do probl. 4.11, onde $\beta = 20$.)

(*c*) Amortecido criticamente se $(\beta/5)^2 = 32$, i.e., $20\sqrt{2}$.

4.15. Resolva o probl. 4.7, levando em conta uma força de amortecimento externa **dada numericamente em quilogramas-força por βv, onde v é o módulo da velo**cidade instantânea em m/s e (*a*) $\beta = 19{,}6$, (*b*) $\beta = 28$, (*c*) $\beta = 32$.

A equação do movimento é

$$\frac{19{,}6}{9{,}8}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} = 19{,}6\,\mathbf{k} - 98(0{,}20 + z)\,\mathbf{k} - \beta\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad \text{ou}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 0{,}5\beta\frac{dz}{dt} + 49z = 0.$$

(*a*) Se $\beta = 20$, então $d^2z/dt^2 + 10dz/dt + 49z = 0$. A solução é

$$z = e^{-5t}(A\cos 4{,}9t + B\operatorname{sen} 4{,}9t).$$

Usando as condições $z = 0{,}10$ e $dz/dt = 0$ em $t = 0$, acha-se $A = 0{,}10$ e $B = 1{,}02$. Assim,

$$z = 1/10e^{-5t}(\cos 4{,}9t + 10{,}2\operatorname{sen} 4{,}9t) = 1{,}05e^{-5t}\cos(4{,}9t - 84°35').$$

O movimento é *oscilatório amortecido* com período $2\pi/49 = /2{,}45$ s.

(*b*) Se $\beta = 28$, então $d^2z/dt^2 + 14dz/dt + 49z = 0$. A solução é do tipo

$$z = e^{-7t}(A + Bt).$$

Resolvendo e considerando as condições iniciais dadas por $A = 0{,}10$ e $B = 0{,}70$; então $z = 0{,}10\ e^{-7t}(1 + 7t)$.

O movimento é *amortecido criticamente*, pois qualquer decréscimo de β produzirá um movimento oscilatório.

(*c*) Se $\beta = 32$ então $d^2z/dt^2 + 16dz/dt + 49z = 0$. A solução é

$$z = e^{-8t}(Ae^{+\sqrt{15}t} + Be^{\sqrt{15}t}) = Ae^{-4{,}12} + Be^{-11{,}88t}.$$

Resolvendo com as condições iniciais dadas $A = 1\,53{,}10^{-1}$, $B = -5{,}3\ 10^{-2}$; $z = 1{,}53\ 10^{-1}e^{-4.12t} - 5{,}3\ 10^{-2}e^{-11.88t}$.

O movimento é superamortecido.

ENERGIA DE UM OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

4.16. (*a*) Prove que a fôrça $\mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i}$, atuante sôbre um oscilador harmônico simples, é conservativa. (*b*) Ache a energia potencial de um oscilador harmônico simples

(*a*) Tem-se $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\kappa x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$; assim, $\mathbf{F}$ é conservativo.

(*b*) O potencial ou a energia potencial é dada por V, onde $\mathbf{F} = -\nabla V$ ou

$$-\kappa x\mathbf{i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

Então, $\partial V/\partial x = \kappa x$, $\partial V/\partial y = 0$, $\partial V/\partial x = 0$, de onde $V = \frac{1}{2}\kappa x^2 + c$. Supondo $V = 0$ correspondendo a $x = 0$, acha-se $c = 0$ e assim $V = \frac{1}{2}\kappa x^2$.

4.17. Expresse em símbolos o princípio de conservação da energia para um oscilador harmônico simples.

Pelo probl. 4.16(*b*), tem-se

Energia cinética + energia potencial = energia total

ou

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x^2 = E$$

o que pode ser escrito, $v = dx/dt$, como $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2 = E$.

Outro Método. A equação diferencial para o movimento de um oscilador harmônico simples é

$$m\, d^2x/dt^2 = -\kappa x.$$

Como $dx/dt = v$, isto pode ser escrito como

$$m\frac{dv}{dt} = -\kappa x \quad \text{ou} \quad m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = -\kappa x, \quad \text{i.e.} \quad mv\frac{dv}{dx} = -\kappa x.$$

E integrando

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x^2 = E.$$

VIBRAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

4.18. Ache a solução permanente (27) correspondente à equação diferencial (24).

A equação diferencial é

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \alpha t. \tag{1}$$

Considere a solução particular tendo a fôrma

$$x = c_1 \cos \alpha t + c_2 \operatorname{sen} \alpha t \tag{2}$$

onde c_1 e c_2 são a determinar. Substituindo (2) em (1), acha-se

$$(-\alpha^2 c_1 + 2\gamma\alpha c_2 + \omega^2 c_1)\cos \alpha t + (-\alpha^2 c_2 - 2\gamma\alpha c_1 + \omega^2 c_2)\operatorname{sen}\alpha t = f_0 \cos \alpha t$$

de onde

$$\alpha^2 c_1 + 2\gamma\alpha c_2 + \omega^2 c_1 = f_0, \quad -\alpha^2 c_2 - 2\gamma\alpha c_1 + \omega^2 c_2 = 0 \tag{3}$$

ou

$$(\alpha^2 - \omega^2)c_1 - 2\gamma\alpha c_2 = -f_0, \quad 2\gamma\alpha c_1 + (\alpha^2 - \omega^2)c_2 = 0 \tag{4}$$

Resolvendo simultaneamente, acha-se

$$c_1 = \frac{f_0(\omega^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}, \quad c_2 = \frac{2f_0\gamma\omega}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}. \tag{5}$$

Assim, (2) fica

$$x = \frac{f_0[(\omega^2 - \alpha^2)\cos \alpha t + 2\gamma\alpha \operatorname{sen} \alpha t]}{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}. \tag{6}$$

E, pelo probl. 4.2,

$$(\omega^2 - \alpha^2)\cos \alpha t + 2\gamma\alpha \operatorname{sen} \alpha t = \sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}\cos(\alpha t - \phi). \tag{7}$$

Onde $\operatorname{tg}\phi = 2\gamma\alpha/(\alpha^2 - \omega^2)$, $0 \leqq \phi \leqq \pi$. Usando (7) em (6), acha-se, como foi pedido,

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}}\cos(\alpha t - \phi).$$

4.19. Prove (*a*) que a amplitude no probl. 4.18 é máxima, quando a frequência de ressonância for determinada de $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ e (*b*) que o valor desta máxima amplitude é $f_0/(2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2})$.

Método 1. A amplitude no probl. 4.18 é

$$f_0/\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2}. \tag{1}$$

Ela é um máximo quando o denominador [ou o quadrado do denominador] é mínimo. Para achar este mínimo, escreva

$$\begin{aligned}(\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2 &= \alpha^4 - 2(\omega^2 - 2\gamma^2)\alpha^2 + \omega^4 \\ &= \alpha^4 - 2(\omega^2 - 2\gamma^2)\alpha^2 + (\omega^2 - 2\gamma^2)^2 + \omega^4 - (\omega^2 - 2\gamma^2)^2 \\ &= [\alpha^2 - (\omega^2 - 2\gamma^2)]^2 + 4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2).\end{aligned}$$

Isto é um mínimo quando o primeiro termo da última linha for zero, quer dizer, quando $\alpha^2 = \omega^2 - 2\gamma^2$ e o valor é, então, $4\gamma^2(\omega^2 - \gamma^2)$. Assim, o valor da máxima amplitude é dado de (1) por $f_0/2\gamma\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$.

Método 2. A função $U = (\alpha^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2$ tem um mínimo ou máximo quando

$$\frac{dU}{d\alpha} = 2(\alpha^2 - \omega^2)2\alpha + 8\gamma^2\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha(\alpha^2 - \omega^2 + 2\gamma^2) = 0$$

i.e., $\alpha = 0$, $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$, onde $\gamma^2 < \frac{1}{2}\omega^2$. Agora,

$$d^2U/d\alpha^2 = 12\alpha^2 - 4\omega^2 + 8\gamma^2.$$

Para $\alpha = 0$, $d^2U/d\alpha^2 = -4(\omega^2 - 2\gamma^2) < 0$. Para $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$, $d^2U/d\alpha^2 = 8(\omega^2 - 2\gamma^2) > 0$. Assim, $\alpha = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2}$ dá o mínimo valor.

4.20. (*a*) Obtenha a solução (33) para o caso onde não haja amortecimento e a frequência imposta seja igual à frequência natural de oscilação. (*b*) Dê uma interpretação física.

(*a*) O caso a ser considerado é obtido pondo $\gamma = 0$ ou $\beta = 0$ e $\alpha = \omega$ nas equações (23) ou (24).

Assim, deve-se resolver a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos \omega t. \tag{1}$$

Para achar a solução geral desta equação, adiciona-se a solução geral de

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{2}$$

à solução particular de (1).

A solução de (2) é

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t. \tag{3}$$

Para achar a solução particular de (1) não seria bom admitir uma solução particular da forma

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t \tag{4}$$

pois, quando se substitui (4) [que tem uma forma idêntica à de (3)] no lado esquerdo de (1), obter-se-ia zero. Deve-se, então, modificar a forma da solução particular escolhida (4). Como é visto no apêndice *c*, a solução particular escolhida tem a forma

$$x = t(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t). \tag{5}$$

Para ver que ela produz a solução particular pedida, diferencie (5), para obter

$$\dot{x} = t(-\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega c_2 \cos \omega t) + (c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \tag{6}$$

$$\ddot{x} = t(-\omega^2 c_1 \cos \omega t - \omega^2 c_2 \operatorname{sen} \omega t) + 2(-\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + \omega c_2 \cos \omega t) \tag{7}$$

Substituindo (5), (6) e (7) em (1), acha-se, após simplificação,

$$-2\omega c_1 \operatorname{sen} \omega t + 2\omega c_2 \cos \omega t = f_0 \cos \omega t$$

de onde se tira $c_1 = 0$ e $c_2 = f_0/2$. Assim, a solução particular pedida (5) é $x = (f_0/2\omega)t \operatorname{sen} \omega t$. A solução geral de um (1) é

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t + (f_0/2\omega)t \operatorname{sen} \omega t. \tag{8}$$

(*b*) As constantes A e B em (8) são determinadas das condições iniciais. A não ser no caso com amortecimento, os termos em A e B não diminuem de valor com o tempo. Entretanto, o último termo em t aumenta de valor com o tempo, até que a mola, finalmente, se quebre. Um gráfico do último termo mostrado na fig. 4.15 indica como as magnitudes crescem com o tempo.

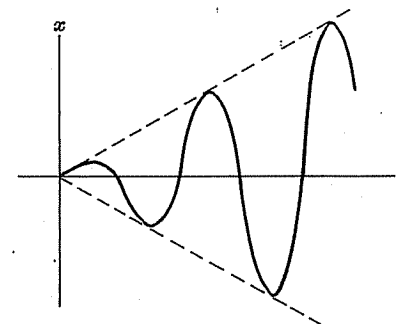



Fig. 4-15

4.21. Uma mola vertical tem um fator de rigidez igual a 18 kgf/m. Em $t = 0$, uma força, dada em kgf por $F(t) = 36 \operatorname{sen} 6t$ com $t > 0$, é aplicada a um objeto de 49 kgf de peso que estava em equilíbrio na extremidade da mola. Negligenciando o amortecimento, ache a posição do objeto, em um instante qualquer t.

Usando o método do probl. 4.7, tem-se, pela segunda lei de Newton,

$$\frac{4{,}9}{9{,}8}\frac{d^2z}{dt^2} = -18z + 36 \operatorname{sen} 6t$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 36z = 72 \operatorname{sen} 6t. \tag{1}$$

Resolvendo, $z = A \cos 6t + B \operatorname{sen} 6t - 6t \cos 6t$.

Quando $t = 0$, $z = 0$ e $dz/dt = 0$, então, $A = 0$ e $B = 1$ e

$$z = \operatorname{sen} 6t - 6t \cos 6t. \tag{2}$$

Conforme t cresce, o termo $-6t \cos 6t$ aumenta de valor numericamente sem limite, e fisicamente a mola acabará quebrando-se. O exemplo ilustra o fenômeno da ressonância. Note que a frequência natural da mola ($6/2\pi = 3\pi$) é igual à da frequência da força imposta.

4.22. Faça o probl. 4.21 com $F(t) = 45 \cos 9t$, $t > 0$.

Neste caso, a equação (1) do probl. 4.21 fica

$$d^2z/dt^2 + 36z = 90 \cos 9t \tag{1}$$

e as condições iniciais são

$$z = 0, \quad dz/dt = 0 \quad \text{em} \quad t = 0. \tag{2}$$

A solução geral de (1) é

$$z = A \cos 6t + B \operatorname{sen} 6t - 2 \cos 9t. \tag{3}$$

Usando as condições (2) em (3), acha-se $A = 2$, $B = 0$ e

$$z = 2(\cos 6t - \cos 9t) = 2\{\cos(7{,}5t - 1{,}5t) - \cos(7{,}5t + 1{,}5t)\} = 4 \operatorname{sen} 1{,}5t \operatorname{sen} 7{,}5t$$

O gráfico de z versus t é mostrado pela curva cheia da fig. 4.16. As curvas tracejadas são as curvas de $z = \pm 4 \operatorname{sen} 1,5t$ obtidas colocando-se $\operatorname{sen} 7,5t = \pm 1$. Se considerar que $4 \operatorname{sen} 1,5t$ é a amplitude de $\operatorname{sen} 7,5t$, vê-se que a amplitude varia senoidalmente. O fenômeno é conhecido como *modulação da amplitude* e é importante no estudo de comunicações e eletrônica.

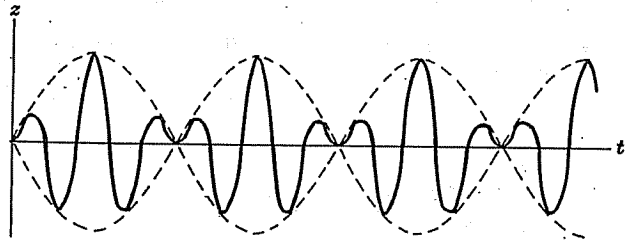



Fig. 4-16

O PÊNDULO SIMPLES

4.23. Determine o movimento de um pêndulo simples de comprimento l e massa m admitindo pequenos deslocamentos e nenhuma força resistência.

Seja a posição de m em um instante qualquer dada por s, o comprimento de arco da origem O a m [veja a fig. 4.17]. Seja θ o ângulo feito pela haste do pêndulo e a vertical.

Se $\mathbf{T}$ é o vetor unitário tangente à trajetória circular da massa m, então, pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} = -mg \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{T} \tag{1}$$

ou fazendo $s = l\theta$,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

Para pequenos deslocamentos pode-se trocar $\operatorname{sen}\theta$ por θ com um alto grau de acuracidade, e assim a equação (2) fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

que tem a solução

$$\theta = A\cos\sqrt{g/l}\,t + B\operatorname{sen}\sqrt{g/l}\,t.$$

Tomando as condições iniciais $\theta = \theta_0$, $d\theta/dt = 0$ em $t = 0$, acha-se $A = \theta_0$, $B = 0$, e, assim,

$$\theta = \theta_0\cos\sqrt{g/l}\,t.$$

Disto pode-se ver que o período do pêndulo é $2\pi\sqrt{l/g}$.

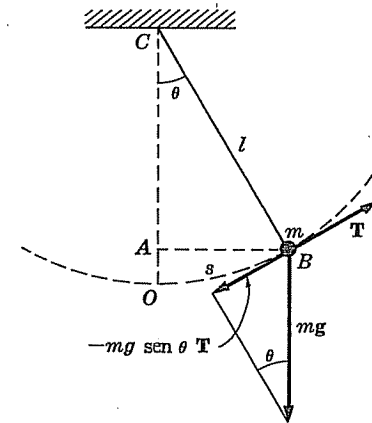



Fig. 4-17

4.24. Mostre como obter a equação (2) do pêndulo do probl. 4.23 usando o princípio da conservação de energia.

Vê-se da fig. 4.17 que $OA = OC - AC = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta)$. Então, pela conservação de energia [tomando como nível de referência de energia potencial o plano horizontal que passa por O] tem-se

Energia potencial em B + Energia cinética em B = Energia total = E = constante

$$mgl(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2 = E \tag{1}$$

Como $s = l\theta$, a equação fica

$$mgl(1-\cos\theta) + \tfrac{1}{2}ml^2(d\theta/dt)^2 = E \tag{2}$$

Diferenciando ambos os lados de (2) em relação a t, acha-se

$$mgl\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta + ml^2\dot\theta\ddot\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot\theta + (g/l)\operatorname{sen}\theta = 0$$

de acordo com a equação (2) do probl. 4.23.

4.25. Faça o probl. 4.23 considerando uma força de amortecimento proporcional à velocidade instantânea.

Neste caso, a equação do movimento (1) do probl. 4.23 é recolocada como

$$m\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} = -mg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{T} - \beta\frac{ds}{dt}\mathbf{T} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g\operatorname{sen}\theta - \frac{\beta}{m}\frac{ds}{dt}.$$

Usando $s = l\theta$ e trocando $\operatorname{sen}\theta$ por θ para pequenos deslocamentos, fica-se com

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Obtém-se três casos:

Caso 1.

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t) \qquad \text{onde} \qquad \omega = \sqrt{g/l - \beta^2/4m^2}$$

Este é o caso de *oscilações amortecidas* ou movimento subamortecido.

Caso 2:

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(A + Bt).$$

Este o caso de movimento de amortecimento crítico.

Caso 3:

$$\theta = e^{-\beta t/2m}(Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}) \qquad \text{onde} \qquad \lambda = \sqrt{\beta^2/4m^2 - g/l}$$

Este é o caso de movimento superamortecido.

Em todos os casos, as constantes A e B podem ser determinadas das condições iniciais. No Caso 1, há oscilações decrescentes com o tempo. Nos Casos 2 e 3, a massa m do pêndulo volta, gradualmente, à posição de equilíbrio sem oscilação.

O OSCILADOR HARMÔNICO BI E TRIDIMENSIONAL

4.26. Ache a energia potencial para (*a*) oscilador bidimensional e (*b*) tridimensional.

(*a*) Neste caso, a força é dada por

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j}.$$

Como $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, o campo de força é conservativo. Assim, existe potencial, i.e., existe uma função V tal que $\mathbf{F} = -\nabla V$. Assim, tem-se

$$\mathbf{F} = -\kappa_1 x\mathbf{i} - \kappa_2 y\mathbf{j} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}.$$

De onde $\partial V/\partial x = {}_1 x, \partial V/\partial y = {}_2 y, \partial V/\partial z = 0$ ou

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_2 y^2$$

escolhendo a constante aditiva arbitrária como sendo zero. Esta é a energia potencial pedida

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_2 y^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_3 z^2.$$

4.27. Uma partícula move-se no plano xy sob um campo de força dada por $\mathbf{F} = \kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j}$. Prove que, em geral, ela se moverá em uma trajetória elíptica.

Se a partícula tem massa m, sua equação de movimento é

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -\kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j} \tag{1}$$

ou como $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + m\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} = -\kappa x\mathbf{i} - \kappa y\mathbf{j}.$$

Então,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\kappa x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y. \tag{2}$$

Estas equações têm as soluções dadas, respectivamente, por

$$x = A_1\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + A_2\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t, \quad y = B_1\cos\sqrt{\kappa/m}\,t + B_2\,\text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,t. \tag{3}$$

Considere que em $t = 0$ a partícula esteja localizada no ponto em que o vetor posição é $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ e move-se com a velocidade $d\mathbf{r}/dt = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}$. Usando estas condições iniciais, acha-se $A_1 = a$, $B_1 = b$; $A_2 = v_1\sqrt{m/\kappa}$, $B_2 = v_2\sqrt{m/\kappa}$ e, assim,

$$x = a\cos\omega t + c\,\text{sen}\,\omega t, \qquad y = b\cos\omega t + d\,\text{sen}\,\omega t \tag{4}$$

onde $c = v_1\sqrt{m/\kappa}$, $d = v_2\sqrt{m/\kappa}$. E achando o valor de $\text{sen}\,\omega t$ e $\cos\omega t$ em (4) obtém-se, se $ad \neq bc$,

$$\cos\omega t = \frac{dx - cy}{ad - bc}, \qquad \text{sen}\,\omega t = \frac{ay - bx}{ad - bc}.$$

Elevando ao quadrado, somando e usando o fato de que $\text{sen}^2\,\omega t + \cos^2\omega t = 1$, acha-se

$$(dx - cy)^2 + (ay - bx)^2 = (ad - bc)^2$$

ou

$$(b^2 + d^2)x^2 - 2(cd + ab)xy + (a^2 + c^2)y^2 = (ad - bc)^2, \tag{5}$$

que é uma equação do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D, \qquad \text{onde} \qquad A > 0,\ C > 0,\ D > 0$$

e pode representar uma elipse se $B^2 - 4AC < 0$, uma parábola se $B^2 - 4AC = 0$, uma hipérbole se $B^2 - 4\,AC > 0$. Para determinar qual o tipo de curva de (5), vê-se que $A = b^2 + d^2$, $B = -2(cd + ab)$, $C = a^2 + c^2$ e, assim,

$$B^2 - 4AC = 4(cd + ab)^2 - 4(b^2 + d^2)(a^2 + c^2) = -4(ad - bc)^2 < 0$$

desde que $ad \neq bc$. Portanto, a trajetória é uma elipse em geral, e se $A = C$, ela é um círculo. Se $ad = bx$, a elipse reduz-se a uma linha reta $ay = bx$.

PROBLEMAS EM GERAL

4.28. Um cilindro com o eixo na vertical flutua sobre um líquido de densidade σ. Ele é puxado para baixo ligeiramente e solto. Ache o período de oscilação considerando que o cilindro pese W e que sua seção transversal tenha uma área A.

Seja RS a posição de equilíbrio do cilindro, distante z da superfície do líquido PQ em um instante t qualquer. Pelo *princípio de Arquimedes*, a força resultante do líquido sobre o cilindro é $(Az)\sigma$. Então, pela segunda lei de Newton,

$$\frac{W}{g}\frac{d^2z}{dt^2} = -Az\sigma$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gA\sigma}{W}z = 0$$

Resolvendo,

$$z = c_1 \cos \sqrt{gA\sigma/W}\,t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{gA\sigma/W}\,t$$

e o período de oscilação é $2\pi\sqrt{W/gA\sigma}$.

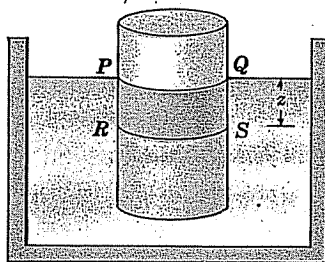



Fig. 4-18

4.29. Mostre que, se não é feita a hipótese de pequenos deslocamentos, então o período de um pêndulo simples é

$$4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}}, \qquad \text{onde} \qquad k = sen(\theta_0/2).$$

A equação do movimento de um pêndulo simples, se não forem admitidos pequenos deslocamentos é [equação (34)]

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta. \tag{1}$$

Seja $d\theta/dt = u$, Então,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = u\frac{du}{d\theta}$$

e (1) fica

$$u\frac{du}{d\theta} = -\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta. \tag{2}$$

Integrando (2), obtém-se

$$\frac{u^2}{2} = \frac{g}{l}\cos\theta + c. \tag{3}$$

Quando $\theta = \theta_0$, $u = 0$ e assim $c = -(g/l)\cos\theta_0$. Então, (3) pode ser escrita

$$u^2 = (2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad \text{ou} \qquad d\theta/dt = \pm\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}. \tag{4}$$

Se se restringir a observação à parte do movimento, quando a massa do pêndulo vai de $\theta = \theta_0$ a $\theta = 0$, que representa um tempo igual a um quanto do período, então deve-se usar o sinal menos em (4), que fica

$$d\theta/dt = -\sqrt{(2g/l)(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Separando-se as variáveis e integrando, tem-se

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

Desde que $t = 0$ em $\theta = \theta_0$ e $t = P/4$ em $\theta = 0$, onde P é o período,

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \tag{5}$$

Usando a identidade trigonométrica $\cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) - 1$, e com a troca de θ por θ_0, pode ser escrito

$$P = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta_0/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)}}. \tag{6}$$

Agora, faça

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \operatorname{sen}(\theta_0/2)\operatorname{sen}\phi \tag{7}$$

E, tomando a diferencial de ambos os lados,

$$\tfrac{1}{2}\cos(\theta/2)\,d\theta = \operatorname{sen}(\theta_0/2)\cos\phi\,d\phi$$

ou chamando $k = \operatorname{sen}(\theta_0/2)$,

$$d\theta = \frac{2\operatorname{sen}(\theta_0/2)\cos\phi\,d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}}.$$

Também de (7) pode-se ver que, quando $\theta = 0$, $\phi = 0$; e, quando $\theta = \theta_0$, $\phi = \pi/2$. Então (6) fica, como foi pedido,

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}}. \tag{8}$$

Note que, se as vibrações forem de pequena amplitude, i.e., se o valor de k for próximo de zero, então o período (8) fica

$$P = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9}$$

como já foi visto.

A integral em (8) é chamada de *integral elíptica* e não pode ser achada exatamente em têrmos de funções elementares. A equação de movimento do pêndulo pode ser resolvida para θ em têrmos de *funções elípticas* que são generalizações das funções trigonométricas.

4,30. Mostre que o período obtido no probl. 4.29 pode ser escrito como

$$P = 2\pi\sqrt{l/g}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right\}.$$

Pelo teorema binomial, se $|x| < 1$, tem-se

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2.1}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3.2.1}x^3 + \dots$$

Se $p = -1/2$, isto pode ser escrito

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$$

Seja $x = -k^2 \operatorname{sen}^2 \phi$ e integrando de 0 a $\pi/2$, acha-se

$$\begin{aligned} P &= 4\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\phi}} \\ &= 4\sqrt{l/g}\int_0^{\pi/2}\left\{1 + \frac{1}{2}k^2\operatorname{sen}^2\phi + \frac{1.3}{2.4}k^4\operatorname{sen}^4\phi + \dots\right\}d\phi \\ &= 2\pi\sqrt{l/g}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \dots\right\} \end{aligned}$$

A integração termo a termo é possível desde que $|x| < 1$.

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}\phi\, d\phi = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}\,\frac{\pi}{2}$$

4.31. Um anel de massa m é forçado a mover-se em um fio sem atrito na forma de um ciclóide [fig. 4.19 abaixo] cujas equações paramétricas são

$$x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi), \qquad y = a(1-\cos\phi) \tag{1}$$

onde x e y estão em um plano vertical. Se o anel parte do repouso no ponto O, (*a*) ache o módulo da velocidade no ponto inferior da trajetória e (*b*) mostre que o anel oscila com um período equivalente ao do pêndulo de comprimento $4a$.

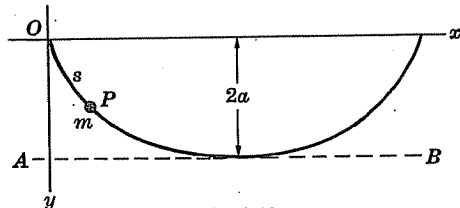



Fig. 4-19

(*a*) Seja P a posição do anel em um instante qualquer t e seja s o comprimento do arco ao longo do ciclóide medido a partir do ponto O.

Pela conservação de energia, medindo-se a energia potencial relativamente à linha AB que passa pelo ponto de mínimo da ciclóide, tem-se

E.P. em P + E.C. em P = E.P. em O + E.C. em O.

Assim,
$$mg(2a-y) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2 = mg(2a) + 0 \tag{2}$$

$$v^2 = (ds/dt)^2 = 2gy \qquad \text{ou} \qquad v = ds/dt = \sqrt{2gy}$$

No ponto mais baixo $y = 2a$, a velocidade é

$$v = \sqrt{2g(2a)} = 2\sqrt{ga}. \tag{3}$$

(*b*) Da parte (*a*), $(ds/dt)^2 = 2gy$. Mas

$$\begin{aligned}(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 &= a^2(1-\cos\phi)^2\dot\phi^2 + a^2\operatorname{sen}^2\phi\,\dot\phi^2 \\ &= 2a^2(1-\cos\phi)\dot\phi^2.\end{aligned}$$

Então, $2a^2(1-\cos\phi)\dot\phi^2 = 2ga(1-\cos\phi)$ ou $\dot\phi^2 = g/a$. Assim,

$$d\phi/dt = \sqrt{g/a} \qquad \text{e} \qquad \phi = \sqrt{g/a}\,t + c_1. \tag{4}$$

Quando $\phi = 0$, $t = 0$; quando $\phi = 2\pi$, $t = P/2$, onde P é o período. Portanto, da segunda equação de (4),

$$P = 4\pi\sqrt{a/g} = 2\pi\sqrt{4a/g}$$

e o período é o mesmo que o de um pêndulo simples de comprimento $l = 4a$.

Para algumas aplicações interessantes, veja os probls. 4.86-4.88.

4.32. Uma partícula de massa m é colocada na parte interna de uma superfície parabolóide de revolução, sem atrito e tendo a equação $cz = x^2 + y^2$ em um ponto P que está a uma altura H acima do plano xy horizontal. Assuma que a partícula parta do repouso, (*a*) ache a velocidade com a qual ela alcança o vértice O, (*b*) ache o tempo gasto τ e (*c*) ache o período para pequenos deslocamentos.

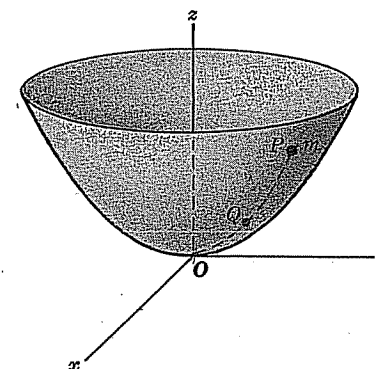



Fig. 4-20

É conveniente escolher o ponto P no plano yz tal que $x = 0$ e $cz = y$. Pelo princípio da conservação de energia e se Q for um ponto qualquer da trajetória, PQO, tem-se

E.P em P + E.C. em P = E.P. em Q + E.C. em Q,

onde s é o comprimento do arco ao longo de OPQ e medido a partir de O. Assim,

$$(ds/dt)^2 = 2g(H - z) \quad (1)$$

ou

$$ds/dt = -\sqrt{2g(H - z)} \quad (2)$$

usando o sinal negativo, pois s é decrescente com o tempo t.

$$(1 + 4y^2/c^2)(dy/dt)^2 = 2g(H - y^2/c).$$

(*a*) Pondo $z = 0$, vê-se que a velocidade em módulo é $\sqrt{2gH}$ no vértice.
(*b*) Como $x = 0$ e $cz = y^2$, tem-se

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{4y^2}{c^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(1 + \frac{4y^2}{c^2}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Assim, (1) pode ser escrito $(1 + 4y^2/c^2)(dy/dt)^2 = 2g(H - y^2/c)$. Então,

$$\frac{dy}{dt} = -\sqrt{2gc}\frac{\sqrt{cH - y^2}}{\sqrt{c^2 + 4y^2}} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{2gc}\,dt = \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}dy.$$

Integrando e usando o fato de que $z = H$ e, assim, $y = \sqrt{cH}$ em $t = 0$ enquanto em $t = \tau$, $y = 0$, tem-se

$$\int_0^\tau -\sqrt{2gc}\,dt = \int_{\sqrt{cH}}^0 \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}dy \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\sqrt{cH}} \frac{\sqrt{c^2 + 4y^2}}{\sqrt{cH - y^2}}dy.$$

Seja $y = \sqrt{cH}\cos\theta$, a integral pode ser escrita

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 + 4cH\cos^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{2gc}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{c^2 + 4cH - 4cH\,\text{sen}^2\,\theta}\,d\theta$$

e isto pode ser escrito

$$\tau = \sqrt{\frac{c + 4H}{2g}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\theta}\,d\theta \quad (3)$$

onde

$$k = \sqrt{4H/(c + 4H)} < 1. \quad (4)$$

A integral em (3) é uma *integral elíptica* e não pode ser avaliada em termos de funções elementares. Ela pode, entretanto, ser avaliada em termos de séries [veja o probl. 4.19].

(*c*) A partícula oscila para frente e para trás dentro da parabolóide com um período dado por

$$P = 4\tau = 4\sqrt{\frac{c + 4H}{2g}}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\theta}\,d\theta. \quad (5)$$

Para pequenos deslocamentos, o valor de k dado por (4) pode ser considerado muito próximo de zero para fins práticos. Assim, (5) fica

$$P = 2\pi\sqrt{(c + 4H)/2g}.$$

O comprimento do pêndulo simples equivalente é $l = \frac{1}{2}(c + 4H)$.

Problemas Propostos

O MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E O OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

4.33. Uma partícula de massa 12 g move-se ao longo do eixo x atraída em direção ao ponto O por uma força em dinas que é numericamente igual a 60 vezes sua distância instantânea x cm de O. Se a partícula parte do repouso em $x = 10$, ache (*a*) amplitude (*b*) o período e (*c*) a frequência do movimento.
Resp. (*a*) 10 cm, (*b*) $2\pi/\sqrt{5}$ s, (*c*) $\sqrt{5}/2\pi$ vib/s.

4.34. (*a*) Se a partícula do probl. 4.33 parte do repouso em $x = 10$ com uma velocidade em direção a O de 20 cm/seg, determine a amplitude, período e frequência de seu movimento. (*b*) Determine quando a partícula alcança O pela primeira vez.
Resp. (*a*) amplitude $= 6\sqrt{5}$ cm, período $= 2\pi/\sqrt{5}$/s, frequência $= \sqrt{5}/2$vib/s, (*b*) 0,33 s.

4.35. Uma partícula move-se sobre o eixo x atraída em direção à origem O com uma força proporcional à sua distância instantânea de O. Se ela parte do repouso em $x = 5$ cm e alcança $x = 2{,}5$ cm pela primeira vez após 2 s, ache (*a*) a posição em um instante qualquer t após sua partida, (*b*) a velocidade em $x = 0$ (*c*) a amplitude, o período e a frequência de vibração, (*d*) a máxima aceleração, (*e*) a máxima velocidade.
Resp. (*a*) $x = 5\cos(\pi t/6)$; (*b*) $5\pi/6$ cm/s, (*c*) 5 cm, 12 s, 1/12 vib/s, (*d*) $5\pi^2/36$ cm/s^2; (*e*) $5\pi/6$ cm/s.

4.36. Se a partícula se move com um movimento harmônico simples, ao longo do eixo x, prove que (*a*) a aceleração é máxima em módulo nas extremidades da trajetória, (*b*) a velocidade é máxima em módulo no meio da trajetória, (*c*) a aceleração é nula no meio da trajetória (*d*) a velocidade é nula nas extremidades da trajetória.

4.37. Uma partícula move-se com movimento harmônico simples sobre uma linha reta. Sua máxima velocidade é de 20 m/s e sua máxima aceleração é de 80 m/s. Ache o período e a frequência do movimento.
Resp. $\pi/2$s, $2/\pi$ vib/s.

4.38. Uma partícula move-se com um movimento harmônico simples. Se sua aceleração, a uma distância D da posição de equilíbrio, é A, prove que o período de movimento é $2\pi\sqrt{D/A}$.

4.39. Uma partícula, movendo-se com um movimento harmônico simples, tem velocidade de 3 cm/s e 4 cm/s, em distâncias de 8 cm e 6 cm, respectivamente, da posição de equilíbrio. Ache o período do movimento.
Resp. 4π s.

4.40. Um corpo de peso 8 kgf, preso a uma mola vertical, estica-a de 20 cm. O corpo é, então, puxado para baixo de uma distância de 40 cm e solto. (*a*) Ache a amplitude, o período e a frequência das oscilações.
Resp. (*a*) 40 cm, $2\pi/7$ s, $7/2\pi$ vib/s, (*b*) $x = 40\cos 7t$ cm, $V = 280\,\text{sen}\,7t$ cm/s.

4.41. Uma massa de 200 g colocada na extremidade inferior de uma mola vertical estica-a de 20 cm. Quando ela está em equilíbrio, a massa é golpeada e, devido a isto, vai a uma distância de 8 cm antes de voltar. Ache (*a*) a magnitude da velocidade imprimida à massa quando golpeada e (*b*) o período do movimento.
Resp. (*a*) 56 cm/s, (*b*) $2\pi/7$ s.

4.42. Uma massa de 5 kg na extremidade de uma mola move-se, com um movimento harmônico simples, ao longo de uma linha horizontal com um período de 3 s. e uma amplitude de 2 metros. (*a*) Determine a constante da mola. (*b*) Qual é a máxima força exercida sobre a mola?
Resp. (*a*) 1140 dinas/cm ou 1,14 newtons/m, (*b*) 2,28 $\times$ 10^5 dinas ou 2,28 newtons.

4.43. Quando uma massa M, pendurada na extremidade inferior de uma mola vertical, é posta em movimento, ela oscila com um período P. Prove que o período, quando for adicionado a uma massa m, é de $P\sqrt{1 + m/M}$.

O OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO

4.44. (*a*) Resolva a equação $d^2x/dt^2 + 2dx/dt + 5x = 0$ sujeito às condições $x = 5$, $dx/dt = -3$ em $t = 0$ e (*b*) dê uma interpretação física dos resultados.
Resp. (*a*) $x = \frac{1}{2}e^{-t}(10 \cos 2t - 5 \operatorname{sen} 2t)$

4.45. Verifique se a força de amortecimento dada pela equação (2) o probl. 4.11 é independente da posição e velocidade da partícula.

4.46. Um corpo, com um peso de 60 lb, é preso a uma mola vertical, esticando-a de 2 pés, O peso é puxado para baixo de 3 pés e sôlto (*a*) Ache a posição do peso em um instante qualquer, considerando uma força de amortecimento de valor igual a 15 vêzes o módulo da velocidade instântanea. (*b*) O movimento é oscilatório amortecido, superamortecido ou com amortecimento crítico?
Resp. (*a*) $x = 3e^{-4t}(4t + 1)$; (*b*) amortecimento crítico.

4.47. Faça o probl. 4.46, considerando a fôrça de amortecimento 18,75 vezes a velocidade instantânea.
Resp. (*a*) $x = 4e^{-2t} - e^{-8t}$, (*b*) amortecimento supercrítico.

4.48. No probl. 4.46, considere que a força de amortecimento seja numericamente 7,5 vezes a velocidade instantânea. (*a*) Prove que o movimento é oscilatório amortecido. (*b*) Ache a amplitude, período e frequência das oscilações. (*c*) Ache o decremento logarítmico.
Resp. (*b*) amplitude $= 2\sqrt{3}\, e^{-2t}$ pés; período $= \pi/\sqrt{3}$ s; frequência $= \sqrt{3}/\pi$ vib/s; (*c*) $2\pi/\sqrt{3}$.

4.49. Prove que o decremento logarítmico é o tempo necessário para que, durante uma oscilação, a máxima amplitude se reduza a $1/e$ de seu valor.

4.50. A frequência natural de uma massa vibrando sôbre uma mola é de 20 vib/s, enquanto sua frequência de movimento amortecido é de 16 vib/s. Ache o decremento logarítmico.
Resp. 3/4.

4.51. Prove que a diferença de tempo entre dois deslocamentos máximos sucessivos de um oscilador harmônico amortecido, com a equação dada por (12) do texto inicial do capítulo, é constante e igual a $4\pi m/\sqrt{4\kappa m - \beta^2}$.

4.52. A diferença de tempo entre dois deslocamentos mínimos sucessivos, de um oscilador harmônico amortecido, é a mesma que a do probl. 4.51? Justifique a resposta.

VIBRAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

4.53. A posição de uma partícula movendo-se ao longo do eixo x é determinada pela equação $d^2x/dt^2 + 4dx/dt + 8x = 20 \cos 2t$. Se a partícula parte do repouso em $x = 0$, ache (*a*) x como função de t, (*b*) a amplitude, período e frequência de oscilação após um longo tempo.
Resp. (*a*) $x = \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t - e^{-2t}$ $(\cos 2t + 3 \operatorname{sen} 2t)$ (*b*) amplitude $= \sqrt{5}$, período $= \pi$, frequência $1/\pi$.

4.54. (*a*) Dê uma interpretação física ao problema 4.53, envolvendo uma massa prêsa a uma extremidade de uma mola vertical. (*b*) Qual é a frequência natural do conjunto vibrante? (*c*) Qual é a frequência da fôrça exercida?
Resp. (*b*) $\sqrt{2}/\pi$, (*c*) $1/\pi$.

4.55. A massa presa a uma mola vertical é sujeita a vibrações forçadas de acôrdo com a equação $d^2x/dt^2 + 4x = 8 \operatorname{sen} \omega t$, onde x é o deslocamento da posição de equilíbrio e $\omega > 0$, $x = 0$ e $dx/dt = 0$. Ache (*a*) x como uma função de t, (*b*) o período da força externa para o qual a ressonância ocorre.
Resp. (*a*) $x = (8 \operatorname{sen} \omega t - 4\omega \operatorname{sen} 2t)/(4 - \omega^2)$ se $\omega \neq 2$; $x = \operatorname{sen} 2t - 2t \cos 2t$ se $\omega = 2$ (*b*) $\omega = 2$ ou período $= \pi$.

4.56. Uma mola vertical tendo uma constante 17 lbf por pé tem um peso de 32 lbf preso à sua extremidade inferior. Uma força externa dada em função do tempo t por $F(t) = 65 \operatorname{sen} 4t$, $t \geq 0$ é aplicada. Existe uma força de amortecimento dada numericamente em kgf por $2v$, onde v é a velocidade instantânea do pêso em m/s. Inicialmente, o pêso está em repouso na posição de equilíbrio. (*a*) Determine a posição do pêso em um instante qualquer. (*b*) Indique as soluções transiente e permanente, dando as interpretações físicas a cada uma (*c*) Ache a amplitude, período e frequência da solução permanente [Use $g = 32$ pés/s^2].
Resp. (*a*) $x = 4e^{-t} \cos 4t + \operatorname{sen} 4t - 4 \cos 4t$ (*b*) transiente, $4e^{-t} \cos 4t$; $\operatorname{sen} 4t - 4 \cos 4t$ estado permanente (*c*) amplitude $= 17$ pés, período $= \pi/2$ s, frequência $= 2/\pi$ vib/s.

4.57. Uma mola é esticada de 5 cm por uma força de 50 dinas. Uma massa de 10 g é colocada na extremidade inferior da mola; após o equilíbrio ser alcançado, a extremidade superior da mola é movida para baixo e para cima, de modo que a força externa atuante sobre a massa é dada por $F(t) = 20 \cos \omega t$, $t \geq 0$. (*a*) Ache a posição de equilíbrio. (*b*) Ache o valor de ω, para o qual a ressonância ocorre.
Resp. (*a*) $x = (20 \cos \omega t)/(1 - \omega^2) - 20 \cos t$, (*b*) $\omega = 1$

4.58. Uma força externa periódica atua sobre uma massa de 6 kg, suspensa pela extremidade inferior de uma mola vertical, que tem uma constante de 150 newtons/metro. A força de amortecimento é proporcional à velocidade instantânea da massa e é de 80 newtons, quando a velocidade for de 2 metros-segundo. Ache a frequência na qual a ressonância ocorre.
Resp. $5/6\pi$ vib/s.

O PÊNDULO SIMPLES

4.59. Ache o comprimento de um pêndulo simples, cujo período é de 1s, sendo que o pêndulo que marca segundos é chamado de *pêndulo de segundos.*
Resp. $-99{,}3$ m

4.60. Um pêndulo que marca segundos em uma localidade adianta ou atrasa, quando é removido para outra localidade, onde a aceleração devida à gravidade é maior? Explique.
Resp. Adianta.

4.61. Um pêndulo simples, cujo comprimento é de 2 metros, tem seu bulbo levantado para um dos lados, até a haste fazer 30° com a vertical. O bulbo é, então, solto. (*a*) Qual é o módulo da velocidade, quando ele passa pelo ponto extremo inferior de sua trajetória? (*b*) Qual é a velocidade angular no ponto mais baixo? (*c*) Qual é a máxima aceleração e onde ocorre?
Resp. (*a*) 2,9 m/s, (*b*) 1,46 rad/s., (*c*) 2 m/s.

4.62. Prove que a tensão na haste de um pêndulo simples de comprimento L e massa m é dada por $mg\cos\theta$, onde θ é o ângulo instantâneo, feito pela haste com a vertical.

4.63. Um pêndulo de segundos, que dá o tempo correto em uma certa localidade, é levado a uma outra localidade, onde atrasa t segundos por dia. Determine a aceleração gravitacional na segunda localidade.
Resp. $g(1 - T/86.400)^2$ onde g é a aceleração gravitacional na primeira localidade.

4.64. Qual é o comprimento de um pêndulo de segundos na superfície da Lua, onde a aceleração devida à gravidade é de, aproximadamente, 1/6 daquela da Terra.
Resp. 16,5 cm.

4.65. Um pêndulo simples de comprimento l e massa m é suspenso por um ponto fixo O. Ao bulbo é dada uma velocidade inicial horizontal e magnitude V_0. Prove que o arco que seu bulbo descreve em um período têm um comprimento dado por $4l\cos^{-1}(1 - v_0^2/2gl)$

4.66. Ache o valor mínimo de v_0 no probl. 4.65, de maneira que o bulbo realize um círculo vertical, com centro em O.
Resp. $2\sqrt{gl}$.

O OSCILADOR HARMÔNICO BI E TRIDIMENSIONAL

4.67. Uma partícula de massa 2 move-se em um plano xy, atraída para a origem com uma força dada por $\mathbf{F} = -18x\mathbf{i} - 50y\mathbf{j}$. Em $t = 0$, a partícula é colocada no ponto $(3, 4)$ e dá-se-lhe uma velocidade de magnitude 10, em uma direção perpendicular do eixo x. (*a*) Ache a posição e velocidade da partícula, em um instante qualquer. (*b*) Que trajetória a partícula descreve?
Resp. $\mathbf{r} = 3\cos 3t\mathbf{i} + [4\cos 5t + 2\,\text{sen}\,5t]\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -9\,\text{sen}\,3t\mathbf{i} + 10\cos 5t - 20$ sen.

4.68. Ache a energia total da partícula do probl. 4.67.
Resp. 581.

4.69. Um oscilador bidimensional de massa 2 tem uma energia potencial dada por $v = 8(x^2 + 4y^2)$. Se os vetores de posição e velocidade do oscilador no instante $t = 0$ são dados, respectivamente, por $\mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_0 = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. (*a*) Ache sua posição e velocidade em um instante qualquer $t > 0$ e (*b*) determine o período do movimento.
Resp. (*a*) $\mathbf{r} = (2\cos 4t + \text{sen}\,4t)\mathbf{i} + (\text{sen}\,8t - \cos 8t)\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = (4\cos 4t - 8\,\text{sen}\,4t)\mathbf{i} + (8\cos 8t + 8\,\text{sen}\,8t)\mathbf{j}$. (*b*) $\pi/8$.

4.70. Faça o probl. 4.69 com $V = 8(x^2 + 2y^2)$. Há um período definido para o movimento neste caso? Explique

4.71. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força tridimensional, cujo potencial é dado por $V = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + 4y^2 + 16z^2)$. (*a*) Prove que, se a partícula for colocada em um outro ponto arbitrário do espaço, que não a origem, então ela retornará ao ponto, após o mesmo período de tempo. Determine este tempo. (*b*) A velocidade de retorno ao ponto de partida é a mesma que a inicial? Explique.

4.72. Considere que, no probl. 4.71, o potencial é $V = \frac{1}{2}\kappa(x^2 + 2y^2 + 5z^2)$. A partícula voltará ao ponto de partida? Explique.

PROBLEMAS EM GERAL

4.73. Uma mola vertical de constante κ, tendo um comprimento livre l, é suportada por um ponto fixo A. Uma massa m é colocada na extremidade inferior da mola, a massa é levantada até uma distância h de A e solta. Prove que o ponto mais baixo alcançado estará a uma distância de A dada por

$$l + mg/\kappa + \sqrt{m^2g^2/\kappa^2 + 2mgh/\kappa}.$$

4.74. Faça o probl. 4.73, considerando um amortecimento proporcional à velocidade instantânea.

4.75. É dada a equação $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \kappa x = 0$ para oscilações amortecidas de um oscilador harmônico. Prove que, se $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2$, então $\dot{E} = -\beta\dot{x}^2$. Mostre, assim, que, se houver amortecimento, a energia total E diminui com o tempo. O que acontece com a energia perdida? Explique.

4.76. (*a*) Prove que $A_1\cos(\omega t - \phi_1) + A_2\cos(\omega t - \phi_2) = A\cos(\omega t - \phi)$, onde

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)},\quad \phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{A_1\,\text{sen}\,\phi_1 + A_2\,\text{sen}\,\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}\right)$$

(*b*) Use (*a*) para demonstrar que a soma de dois movimentos harmônicos simples, da mesma frequência e sobre uma mesma linha reta, é harmônico simples de mesma frequência.

4.77. Dê uma interpretação vetorial aos resultados do probl. 4.76.

4.78. Discuta o probl. 4.76, no caso de que as frequências dos dois movimentos harmônicos simples não sejam iguais. O movimento resultante é harmônico simples? Justifique a resposta.

4.79. Uma partícula oscila em um plano tal que suas distâncias x e y a dois eixos mutuamente perpendiculares são dadas como função do tempo por $x = A \cos(\omega t + \phi_1)$, $y = B \cos(\omega t + \phi_2)$. (*a*) Prove que a partícula move-se em uma elipse inscrita no retângulo definido por $x = \pm A$, $y = \pm B$. (*b*) Prove que o período da partícula na trajetória elíptica é $2\pi/\omega$.

4.80. Considere a partícula do probl. 4.70 movendo-se tal que onde ε é considerado uma constante positiva muito menor que ω. Prove que a partícula oscila em elipses que giram vagarosamente, inscritas no retângulo $x = \pm A$, $y = \pm B$.

4.81. Ilustre o probl. 4.80. falando gráfico do movimento da partícula que se move com a trajetória dada por

$$x = 3 \cos(2t + \pi/4), \qquad y = 4 \cos(2{,}4t)$$

4.82. Na fig. 4.21, uma massa m, que está em uma mesa e sem atrito, é conectada aos pontos fixos A e B por duas molas do mesmo comprimento livre, de massa negligenciável e de constante κ_1 e κ_2, respectivamente. A massa m é deslocada horizontalmente e, então, solta. Prove que o período de oscilação é dado por $P = 2\pi\sqrt{m/(\kappa_1 + \kappa^2)}$.

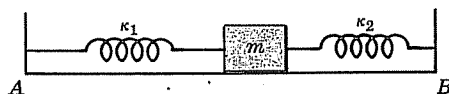



Fig. 4-21

4.83. Uma mola com constante κ e massa negligenciável tem uma extremidade fixa no ponto A, em um plano inclinado de α e uma massa m à outra extremidade, como indicada na fig. 4.22. Se a massa m for puxada para baixo de uma dis-

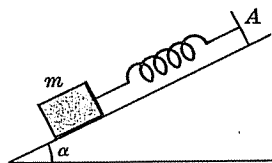



Fig. 4-22

tância x_0 abaixo da posição de equilíbrio e solta, ache o deslocamento da posição de equilíbrio em um instante qualquer t, (*a*) se o declive for sem atrito, (*b*) se o declive tiver um coeficiente de fricção μ.

4.84. Uma partícula move-se com um movimento harmônico simples, ao longo do eixo x. No instante T_0, $2T_0$ e $3T_0$ ela está em $x = a$, b e c, respectivamente. Prove que o período de oscilação é $\dfrac{4\pi t_0}{\cos^{-1}(a + c)/2b}$.

4.85. Um pêndulo de segundos, dando o tempo correto em uma localidade, é levado a uma outra, onde atrasa de 5 minutos por dia. De quanto deve ser a haste do pêndulo aumentada ou encurtada, de maneira que dê a hora certa?

4.86. Um pêndulo vertical, tendo um bulbo de massa m é suspenso por um ponto fixo O. Conforme o pêndulo oscile, a haste amolda-se às curvas ODA (ou OC), como é indicada na fig. 4.23. Prove que, se a trajetória ABC é uma ciclóide, então o período de oscilação será o mesmo, independentemente da amplitude de oscilações. O pêndulo neste caso é chamado de *pêndulo cicloidal*. A curva ODA e OC são *evolutas* do ciclóide. [Obs.: use o probl. 4.31].

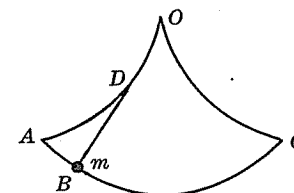



Fig. 4-23

4.87. Um anel desliza por um fio, sem atrito, pertencente a um plano vertical. Deseja-se achar a forma do fio tal que, independentemente de onde se coloca o anel, ele deslizará sob influência de gravidade até o ponto inferior do fio no mesmo tempo. Isto é chamado comumente de problema Tautócrono. Prove que o fio deve ter a forma de uma ciclóide. [Obs. Use o probl. 4.31].

4.88. Prove que as curvas ODA e OC do probl. 4.86 são ciclóides, tendo a mesma forma da ciclóide ABC.

4.89. Um pêndulo simples de comprimento l tem o seu ponto de suporte movendo-se para diante e para trás, sobre uma linha horizontal tal que sua distância a um ponto fixo da linha é de A sen ωt, $T > 0$. Ache a posição do bulbo do pêndulo em um instante qualquer t supondo que ele estava, quando $T = 0$, em repouso na posição de equilíbrio.

4.90. Faça o probl. 4.89, considerando o ponto de suporte mover-se verticalmente, em vez de horizontalmente. Considera-se também que, em $t = 0$, a haste do pêndulo fazia um ângulo θ_0 com a vertical.

4.91. Uma partícula de massa m move-se em um plano sob influência de fôrças de atração, em direção a pontos fixos, as quais são diretamente proporcionais às suas distâncias instantâneas destes pontos. Prove que, em geral, a partícula descreverá uma elipse.

4.92. Uma mola elástica na vertical de pêso negligenciável e tendo sua extremidade superior fixada, suporta um peso W em sua extremidade inferior. O pêso é levantado, até que a tensão na mola seja zero e, então, é solto. Prove que a tensão na mola não excederá $2W$.

4.93. Uma mola vertical, tendo uma constante κ, tem um suporte em sua extremidade superior com um peso W em cima. [Veja a fig. 4.24]. Determine a maior frequência com a qual a mola pode vibrar, tal que o pêso ainda permanecerá encostado no suporte.

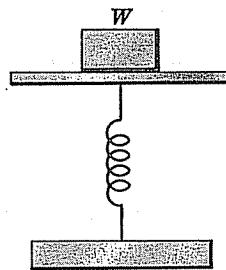



Fig. 4-24

4.94. Uma mola tem um comprimento livre de 50 cm e uma força de 100 dinas é necessária para esticá-la de 25 cm. Ache o trabalho realizado em esticar a mola de 75 cm para 100 cm, supondo que não seja alcançado o limite elástico; assim a mola permanece com suas características constantes.
Resp. 3750 ergs.

4.95. Uma partícula move-se no plano xy tal que sua posição é dada por $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos 2\omega t$. Prove que ela descreve um arco de parábola.

4.96. Uma partícula move-se em um plano xy tal que sua posição é dada por $x = A \cos (\omega_1 t + \phi_1)$, $y = B \cos (\omega_2 t + \phi_2)$. Prove que a partícula descreve uma trajetória fechada ou não, se a razão for racional ou não. Em qual caso o movimento é periódico?

4.97. A posição de uma partícula movendo-se em um plano xy é descrita pelas equações $d^2x/dt^2 = -4y$, $d^2y/dt^2 = -4x$. No instante $t = 0$ a partícula está em repouso no ponto (6, 3). Ache (*a*) sua posição e (*b*) sua velocidade, em um instante t qualquer posterior.

4.98. Ache o período de um pêndulo simples de 1 metro de comprimento, se o ângulo máximo que a haste faz com a vertical é de (*a*) 30°, (*b*) 60°, e (*c*) 90°.

4.99. Um pêndulo simples de 3 pés de comprimento, é suspenso verticalmente por um ponto fixo. Em $t = 0$ é dada ao bulbo uma velocidade horizontal de 8 pés/s. Ache (*a*) o ângulo máximo que a haste do pêndulo faz com a vertical, (*b*) o período de oscilação.
Resp. (*a*) $\cos^{-1} \frac{2}{3} = 41°48'$ (*b*) 1,92 s.

4.100. Prove que as médias em relação ao tempo da energia potencial e da energia cinética sôbre um período de um oscilador harmônico simples são iguais a $2\pi^2 A^2/P^2$ onde A é a amplitude e P o período do movimento.

4.101. Um cilindro de raio 10 pés, com seu eixo na vertical, oscila verticalmente sobre a água de densidade 62,5 lb/pé³ com o período de 5 segundos. Quanto pesa ele?
Resp. $3{,}98 \times 10^5$ libra/peso.

4.102. Uma partícula move-se no plano xy em um campo de força cujo potencial é dado por $V = x^2 + xy + y^2$. Se a partícula está, inicialmente, no ponto (3, 4) e dá-se-lhe uma velocidade de magnitude 10 em uma direção paralela ao semi-eixo x positivo. (*a*) Ache a posição em uma instante qualquer e (*b*) Determine o período do movimento, se existir.

4.103. Considere no probl. 4.96, que ω_1/ω_2 é irracional e que em $t = 0$ a partícula está em um ponto particular (x_0, y_0) dentro de um retângulo definido por $x = \pm A$, $y = \pm B$. Prove que o ponto (x_0, y_0) nunca mais será alcançado, mas, que durante o movimento da partícula, ela passará por um ponto arbitrário próximo dêle.

4.104. Uma partícula oscila sobre um ciclóide sem atrito que está em um plano vertical e cujo vértice é o ponto de mínimo. Prove que a projeção da partícula sobre um eixo vertical oscila com um movimento harmônico simples.

4.105. Uma massa de 5 kg na extremidade inferior de uma mola vertical, tendo uma constante elástica igual a 20 newtons/metro oscila com um período de 10 segundos. Ache (*a*) a constante de amortecimento, (*b*) o período natural e (*c*) o decremento logarítmico.
Resp. (*a*) 19 newton segundo/*m* (b) 3,14*s*.

4.106. Uma massa de 100 g é suportada em equilíbrio por duas molas idênticas de massa negligenciável e tendo uma constante elástica de 50 dinas/cm. Na posição de equilíbrio mostrada na fig. 4-25, as molas fazem um ângulo de 30° com a horizontal e têm um comprimento de 100 cm. Se a massa for puxada para baixo de uma distância de 2 cm e sôlta, ache o período de oscilação resultante.

4.107. Um cilindro ôco com raio interno de 10 cm é fixado, de modo que seu eixo fique horizontal. Uma partícula é colocada dentro do cilindro em contacto com sua superfície interna sem atrito, de tal maneira que sua distância ao plano que passa pelo ponto mais baixo das superfície interna seja de 2 cm. (*a*) Ache o

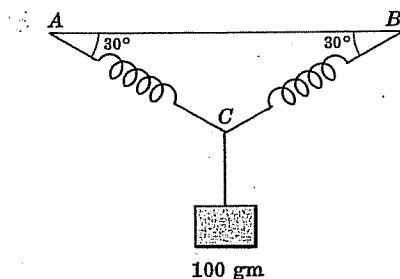



Fig. 4-25

tempo gasto para que a partícula alcance o ponto mais baixo e (b) o período das oscilações que ocorrem.

4.108. Uma caixa cúbica de lado a e peso W vibra verticalmente na água com a densidade σ. Prove que o período de vibração é $(2\pi/a)\sqrt{\sigma g/W}$.

4.109. Uma mola vibra tal que a equação de seu movimento é $m\,d\,x/dt + x = F(t)$. Se $x = 0$, $dx/dt = 0$ em $t = 0$, ache x como função do tempo t.

Resp. $x = \dfrac{1}{\sqrt{m\kappa}} \displaystyle\int_0^t F(u) \operatorname{sen} \sqrt{\kappa/m}\,(t-u)\,du$

4.110. Faça o probl. 4.109 considerando um amortecimento proporcional a dx/dt.

4.111. Uma mola vibra tal que a equação de seu movimento é $m\,d\,x/dt + x = F(t)$. Se $x = 0$, $x = v$ em $t = 0$, (a) ache x em um instante qualquer t e (b) determine para qual valor de ω a ressonância ocorre.

4.112. Uma mola vertical, tendo uma constante elástica κ, suporta uma massa m em sua extremidade inferior. Em $t = 0$ a mola está em equilíbrio e sua extremidade superior é deslocada na vertical, tal que sua distância ao ponto original seja dada por $A \operatorname{sen} \omega t$, $t \geq 0$. Ache (a) a posição de massa m em um instante qualquer e (b) o valor de ω para a qual a ressonância ocorre.

4.113. Resolva a equação $dx/dt + x = t \operatorname{sen} t + \cos t$, onde $x = 0$, $dx/dt = 0$ em $t = 0$, e (b) dê uma interpretação física.

4.114. Discuta o movimento de um pêndulo simples, para o caso onde o amortecimento e fôrça externas estejam presentes.

4.115. Ache o período para oscilação vertical de pequena amplitude de um cilindro de raio a, altura H e com seu eixo na horizontal flutuando em água com densidade σ.

4.116. Uma mola vertical, tendo uma constante elástica de 2 newtons por metro, tem um peso de 50 g suspenso em sua extremidade inferior. Uma fôrça aplicada é dada em newtons pela função de tempo t, $F(t) = 60 \cos^4 t$, $t \geq 0$. Suponha que ao peso, inicialmente na posição de equilíbrio, é imprimida uma velocidade de 4 m/s e que o amortecimento seja negligenciável. Determine (a) a posição e (b) a velocidade do peso, em um instante qualquer.

4.117. No probl. 4.55 pode a resposta para $\omega = 2$ ser deduzida das respostas para $\omega \neq 2$, tomando o limite de $\omega \to 2$? Justifique a resposta.

4.118. Um oscilador tem uma fôrça de restauração atuante, cuja magnitude é de $-\kappa x - \varepsilon x^2$, onde ε é pequeno comparado a κ. Prove que o deslocamento do oscilador (nêste caso, geralmente chamado de *oscilador não harmônico*) da posição de equilíbrio é dado, aproximadamente, por

$$x = A\cos(\omega t - \phi) + \frac{A\varepsilon^2}{6\kappa}\{\cos 2(\omega t - \phi) - 3\},$$

onde A e ϕ são determinados pelas condições iniciais.

4.119. Prove que, se as oscilações no probl. 4.32 não sendo pequenas necessàriamente, então o período é dado por

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{c + 4H}{2g}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots\right\}$$

Capítulo 5

Fôrças Centrais e Movimento Planetário

FORÇAS CENTRAIS

Considere que uma força atuante sobre uma partícula de massa m é tal que (veja a fig. 5-1):

(a) ela é sempre dirigida de m para um ponto fixo O ou em sentido contrário.
(b) sua magnitude depende somente da distância r de m a O.

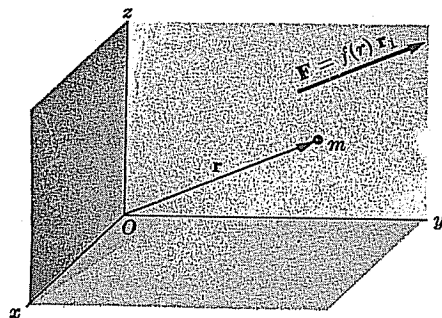



Fig. 5-1

Então, chama-se a força de *força central* ou *campo de força central*, em que O é o centro de força. Em símbolos, $\mathbf{F}$ é uma força central se, e somente se,

$$\mathbf{F} = f(r)\,\mathbf{r}_1 = f(r)\,\mathbf{r}/r \tag{1}$$

onde $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}/r$ é um vetor unitário na direção $\mathbf{r}$.

A força central é de *atração* se, em sentido de m para O, ou *repulsão* se vice-versa, o que, em símbolos, pode ser escrito como $f(r) < 0$ ou $f(r) > 0$, respectivamente.

ALGUMAS PROPRIEDADES IMPORTANTES DE CAMPOS DE FORÇA CENTRAL

Se uma partícula se move em um campo de força central, são válidas as seguintes propriedades:

1. A trajetória ou *órbita* da partícula devé ser uma curva plana, i.e., a partícula

move-se em um plano. Este plano é, geralmente, tomado como sendo o plano xy. Veja o probl. 5.1.

2. O momento angular da partícula é conservado, i.e., ele é constante. Veja o probl. 5.2.

3. A partícula move-se de tal modo que o vetor posição ou vetor raio entre O e a partícula gera áreas iguais em tempos iguais. Em outras palavras, a razão da mudança de área pelo tempo é constante. Isto é, algumas vezes, chamado de *lei das áreas*. Veja o probl. 5.6.

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM UM CAMPO DE FORÇA CENTRAL

Pela propriedade 1, o movimento de uma partícula em um campo de força central ocorre em um plano. Escolhido este plano como o plano xy e as coordenadas da partícula como coordenadas polares (r, θ), as equações do movimento são achadas como sendo (veja o probl. 5.3)

$$m(\ddot{r} - \dot{\theta}^2) = f(r) \tag{2}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{3}$$

onde os pontos significam diferenciações em relação ao tempo t.

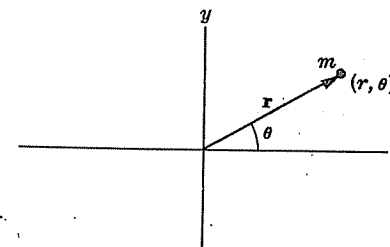



Fig. 5-2

Da equação (3) acha-se $\quad r^2\dot{\theta} = \text{constante} = h \qquad (4)$

Isto está relacionado com as propriedades 2 e 3, que acabamos de ver.

EQUAÇÕES IMPORTANTES DEDUZIDAS DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As seguintes equações deduzidas das equações fundamentais (2) e (3) são geralmente úteis:

1. $$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = \frac{f(r)}{m} \tag{5}$$

2. $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{1}{mh^2u^2}\,f(1/u) \tag{6}$$

onde $u = 1/r$

3. $$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r = \frac{r^4 f(r)}{mh^2} \tag{7}$$

ENERGIA POTENCIAL DE UMA PARTÍCULA EM UM CAMPO CENTRAL

Um campo de força central é um campo conservativo, e, em consequência, pode ser derivado de um potencial. Este potencial, dependente somente de r, além de uma constante aditiva arbitrária, é dado por

$$V(r) = -\int f(r)\, dr \tag{8}$$

Isto é também a energia potencial de uma partícula em um campo de força central. A constante aditiva arbitrária pode ser obtida supondo, por exemplo, que $V = 0$ em $r = 0$ ou $V \to 0$ para $r \to \infty$.

CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Usando-se (8) e o fato de que, em coordenadas polares, a energia cinética de uma partícula é $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, a equação para conservação de energia pode ser escrita como

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) = E \tag{9}$$

ou

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\, dr = E \tag{10}$$

onde E é a energia total e é constante. Usando (4), a equação (10) pode ser escrita como

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\, dr = E \tag{11}$$

e também como

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right) - \int f(r)\, dr = E \tag{12}$$

Em termos de $u = 1/r$, pode-se escrever também a equação (9) como

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E - V)}{mh^2} \tag{13}$$

DETERMINAÇÃO DA ÓRBITA A PARTIR DA FORÇA CENTRAL

Se a força central é prescrita, i.e., se $f(r)$ é dada, é possível determinar-se a órbita ou trajetória da partícula. Esta órbita pode ser obtida na forma

$$r = r(\theta) \tag{14}$$

i.e., r como uma função de θ, ou na forma

$$r = r(t), \qquad \theta = \theta(t) \tag{15}$$

que são equações paramétricas em termos do parâmetro tempo t.

Para determinar a órbita na forma (14) é conveniente empregar as equações (6), (7) ou (11). Para obter as equações na forma (15), é, algumas vezes, conveniente usar (4) ou usar as equações (4) e (5).

DETERMINAÇÃO DA FORÇA CENTRAL A PARTIR DA ÓRBITA

Por outro lado, se for conhecida a órbita ou trajetória da partícula, então se pode achar a força central correspondente. Se a órbita é dada por $r = r(\theta)$ ou $u = u(\theta)$, onde $u = 1/r$, a força central pode ser achada de

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4}\left\{\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\right\} \tag{16}$$

ou

$$f(1/u) = -mh^2u^2\left\{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right\} \tag{17}$$

que são obtidas das equações (6) ou (7). A lei da força pode ser também obtida de outras equações, como, por exemplo, as equações (9)-(13).

É importante notar que, dada uma órbita, pode haver infinitos campos de força para os quais a órbita é possível. Entretanto, se existe um campo de força central ele é único, i.e., há somente um.

SEÇÕES CÔNICA, ELÍPTICA, PARABÓLICA E HIPERBÓLICA

Considere um ponto fixo O e uma linha fixa AB distante D de O, como é mostrado na fig. 5-3. Suponha que um ponto P no plano de O e AB se move de modo que a razão de sua distância do ponto O pela sua distância da linha AB é sempre igual a uma constante positiva ε.

Então, a curva descrita por P é dada em coordenadas polares (r, θ) por

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{18}$$

Veja o probl. 5.16.

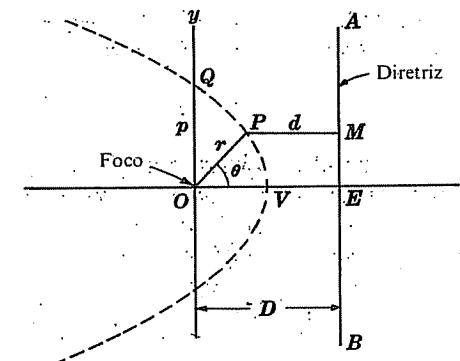



Fig. 5-3

O ponto O é chamado *foco*, a linha AB é chamada *diretriz* e a razão ε é chamada de *excentricidade*. A curva é, geralmente, interpretada como uma *seção cônica*, pois ela pode ser obtida pela intersecção de um plano e um cone em ângulos diferentes. Existem três tipos possíveis de curvas, dependendo do valor de excentricidade.

1. *Elipse*: $\varepsilon < 1$ (Veja a fig. 5-4).

Se C é o *centro* da elipse e $CV = CU = a$ é o comprimento do *semi-eixo maior*, então a equação da elipse pode ser escrita como

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos\theta} \tag{19}$$

Note que o *eixo maior* é a linha que liga os vértices U e V da elipse.

Se b é o comprimento do *semi-eixo menor* [CW ou CS na fig. 5-4] e c é a distância CO, do centro ao foco, então tem-se o resultado importante

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = a\,\varepsilon \tag{20}$$

Um círculo pode ser considerado como um caso especial de uma elipse com a centricidade igual a zero.

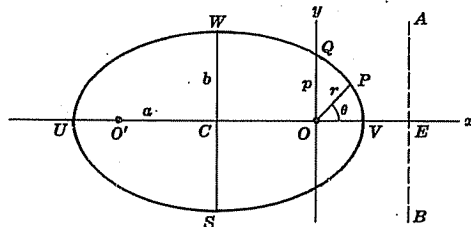



Fig. 5-4

2. *Parábola*: $\varepsilon = 1$ [Veja a fig. 5-5].

A equação da parábola é

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} \tag{21}$$

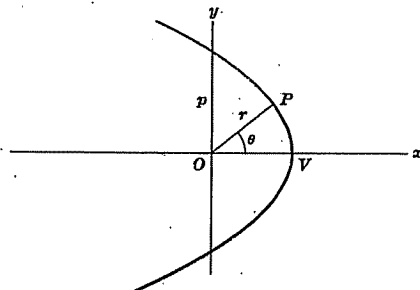



Fig. 5-5

Pode-se considerar uma parábola como sendo o caso limite da elipse (19) onde $\varepsilon \to \infty$, o que significa que $a \to \infty$ [i.e., o eixo maior se torna infinito] de tal modo que $a(1-\varepsilon^2) = p$.

3. *Hipérbole*: $\varepsilon > 1$ [Veja a fig. 5-6]

A hipérbole consiste em dois ramos, como é indicado na fig. 5-6. O ramo da esquerda é o que interessa. A hipérbole é assíntota às linhas tracejadas da fig. 5-6, que são chamadas de *assíntotas*. A intersecção C das assíntotas é chamada de *centro*. A distância $CV = a$ do centro C ao vértice V é chamada de *semi-eixo maior* [o eixo maior sendo a distância entre os vértices V e U, por analogia com a elipse]. A equação da hipérbole pode ser escrita como

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos\theta} \tag{22}$$

Várias outras definições podem ser dadas para as seções cônicas. Por exemplo, uma elipse pode ser definida como o lugar *geométrico* ou *trajetória* de todos os pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Igualmente, uma hipérbole pode ser definida como o lugar geométrico de todos os pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Em ambos os casos, os dois pontos fixos são os focos e a constante é igual em magnitude ao comprimento do eixo maior.

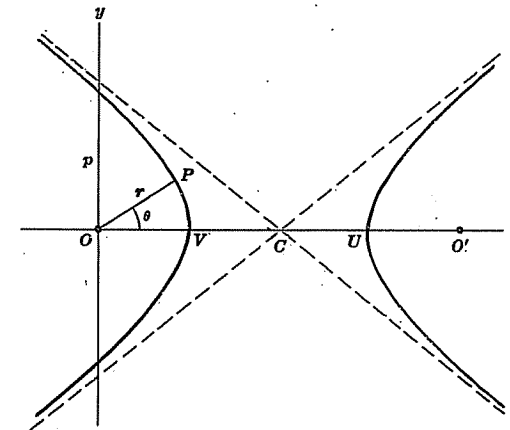



Fig. 5-6

ALGUMAS DEFINIÇÕES EM ASTRONOMIA

Um *sistema solar* é composto de uma *estrela* [tal como o Sol] e de objetos chamados *planetas* que giram em torno dela. A estrela é um objeto que emite luz, enquanto os planetas não emitem luz, mas podem refleti-la. Além disto pode haver objetos, girando em torno dos planetas. São chamados *satélites*.

No nosso sistema solar, por exemplo, a *Lua* é uma satélite da Terra, que, por sua vez, é um planeta que gira em torno do Sol. Além disso, há *satélites artificiais* ou satélites feitos pelo homem que podem revolver em torno dos planetas ou suas luas.

A trajetória de um planeta ou satélite é chamada de sua *órbita*. A maior e a menor distância de um planeta ao Sol, em torno do qual ele revolve, são chamadas *afélio* e *periélio*, respectivamente. A maior e a menor distância do satélite em torno de um planeta ao redor do qual ele gira são chamadas de *apogeu* e *perigeu*, respectivamente.

O tempo para uma revolução completa de um corpo em uma órbita é chamado seu *período*. Ele é chamado, algumas vezes, *período sideral*, para distinguir de outros períodos, como período de rotação da Terra, etc.

LEIS DE KEPLER DO MOVIMENTO PLANETÁRIO

Antes de Newton ter enunciado suas famosas leis do movimento, usando inúmeros dados acumulados por Tycho Brahe, Kepler formulou suas três leis concernentes ao movimento dos planetas em torno do Sol [veja ig. 5-7].

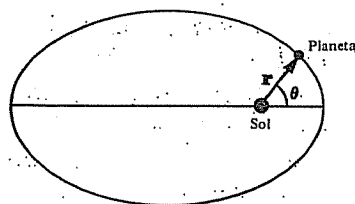



Fig. 5-7

1. Cada planeta se move em uma órbita que é uma elipse, com o Sol em um dos focos.
2. O vetor raio do Sol a um planeta qualquer descreve áreas iguais em tempos iguais (a *lei das áreas*, como já foi visto na introdução deste capítulo).
3. O quadrado do período de rotação de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do semi-eixo maior de suas órbitas.

LEI UNIVERSAL DE NEWTON PARA A GRAVITAÇÃO

Usando a primeira lei de Kepler e as equações (16) ou (17), Newton foi capaz de deduzir sua famosa lei da gravitação entre o Sol e os planetas, que ele postulou como válidas para qualquer objeto no Universo [veja o probl. 5.21].

Lei de Newton para a gravitação. Duas partículas quaisquer de massas m_1 e m_2 e distantes entre si de r atraem-se mutuamente com uma força

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{23}$$

onde G é uma constante universal chamada de *constante gravitacional*.

Usando a lei da gravitação de Newton, podem ser determinadas as forças de atração de grandes objetos, tais como esferas. Para fazer isto, usa-se o fato de que um grande objeto é composto de partículas. Então aplica-se a lei da gravitação para achar as forças entre as partículas e somam-se tôdas estas forças, usualmente pelo método da integração, para achar a resultante de atração. Uma aplicação importante disto é a que se segue.

Teorema 5.1. Duas esferas sólidas ou ocas de massas m_1 e m_2, respectivamente, e que não se interseccionam são atraídas entre si como se elas fossem partículas da mesma massa que as esferas e localizadas em seus centros geométricos respectivos.

Assim, o potencial correspondente a

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\mathbf{r}_1$$

é

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r} \tag{25}$$

É também possível achar a atração entre objetos, achando-se primeiramente o potencial e, então, usando-se $\mathbf{F} = -\nabla V$. Veja os probls. 5.26-5.33.

MOVIMENTO EM UM CAMPO DE FORÇA INVERSO DO QUADRADO

Como se tem visto, os planetas revolvem em órbitas elípticas em torno do Sol, que está em um foco da elipse. De maneira similar, os satélites (naturais ou artificiais) podem revolver em torno dos planetas, em órbitas elípticas. Entretanto, o movimento de um objeto em um campo de atração inverso do quadrado não necessita ser sempre elíptico, mas pode ser parabólico ou hiperbólico. Em tais casos, o objeto, tal como um cometa ou meteorito, entraria no sistema solar e, depois, sairia, nunca mais retornando.

A seguinte condição simples em termos de energia total E determina a trajetória de um objeto.

(i) se $E < 0$, a trajetória é uma elipse
(ii) se $E = 0$, a trajetória é uma parábola
(iii) se $E > 0$, a trajetória é uma hipérbole

Outras condições em termos da velocidade em módulo do objeto são obtidas também. Veja o probl. 5.37.

Neste capítulo, supõe-se que o Sol seja fixo e que os planetas não afetam uns aos outros. Igualmente, no movimento de satélites em torno de um planeta, como a Terra por exemplo, supõe-se que o planeta seja fixo e que o Sol e todos os outros planetas não afetam.

Embora tal hipótese seja correta em uma primeira aproximação, a influência dos outros planetas deve ser introduzida, para uma acuracidade maior. Os problemas de movimento de dois, três, etc., objetos sob suas atrações mútuas são, geralmente, chamados de *problemas de dois corpos*, *problemas de três corpos*, etc.

Problemas Resolvidos

FORÇAS CENTRAIS E PROPRIEDADES IMPORTANTES

5.1. Prove que, movendo-se uma partícula em um campo de força central, sua trajetória deve ser uma curva plana.

Seja $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}_1$ o campo de fôrça central. Então,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = f(r)\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0} \quad (1)$$

pois $\mathbf{r}_1$ é um vetor unitário na direção do vetor posição $\mathbf{r}$.

Como $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt$, isto pode ser escrito

$$\mathbf{r} \times d\mathbf{v}/dt = \mathbf{0} \quad (2)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

Integrando, acha-se

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h} \quad (4)$$

onde $\mathbf{h}$ é um vetor constante. Multiplicando ambos os lados de (4) por $\mathbf{r}\cdot$,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (5)$$

usando o fato de que $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} = 0$. Assim, $\mathbf{r}$ é perpendicular ao vetor constante $\mathbf{h}$ e, assim, o movimento pertence a um plano. Será admitido que este plano é o plano xy, cuja origem está no centro de força.

5.2. Prove que, para uma partícula movendo-se em um campo de força central, o momentum angular é conservado.

Da equação (4) do probl. 5.1, tem-se

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

onde $\mathbf{h}$ é um vetor constante. Então, multiplicando pela massa m,

$$m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = m\mathbf{h} \quad (1)$$

Como o lado esquerdo de (1) é o momentum angular, segue-se que o momentum angular é conservado, i.e., ele é sempre constante, em magnitude e direção.

EQUAÇÕES DO MOVIMENTO PARA UMA PARTÍCULA EM UM CAMPO DE FORÇA CENTRAL

5.3. Escreva as equações do movimento de uma partícula em um campo de força.

Pelo probl. 5.1, o movimento da partícula ocorre em um plano. Escolhendo este como sendo o plano xy e as coordenadas que descrevem a posição da partícula em um instante qualquer t como sendo as coordenadas polares (r, θ), usando o probl. 1.49, tem-se

$$\text{(massa) (aceleração)} = \text{força resultante}$$
$$m\{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1\} = f(r)\mathbf{r}_1 \quad (1)$$

Assim, as equações do movimento pedidas são dadas por

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (2)$$
$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (3)$$

5.4. Mostre que $r^2\dot{\theta} = h$, é uma constante.

Método 1. A equação (3) do probl. 5.3 pode ser escrita como

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = \frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

$$\text{Assim, } \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \quad \text{e} \quad r^2\dot{\theta} = h, \quad (1)$$

onde h é uma constante.

Método 2. Pelo probl. 1.49, a velocidade em coordenadas polares é

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1$$

Então, da equação (4) do probl. 5.1

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \dot{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1) + r\dot{\theta}(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta}_1) = r^2\dot{\theta}\mathbf{k} \quad (2)$$

pois $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta}_1 = r\mathbf{k}$ onde $\mathbf{k}$ é o vetor unitário na direção perpendicular ao plano de movimento [o plano xy], i.e., na direção $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Usando $\mathbf{h} = h\mathbf{k}$ em (2), vê-se que $v^2\dot{\theta} = h$.

5.5. Prove que $r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}$, onde $\dot{A}$ é a razão da área que o vetor de posição $\mathbf{r}$ gera pelo tempo.

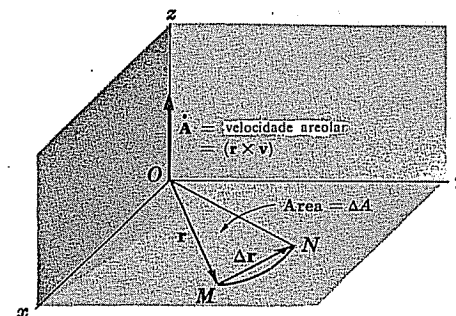



Fig. 5-8

Considere que, no tempo Δt, a partícula mova-se de M a N [veja a fig. 5-8]. A área ΔA gerada pelo vetor posição neste tempo é, aproximadamente, metade da área de um paralelogramo de lados r e Δr ou [veja o probl. 1.18]

$$\Delta A = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}|$$

Dividindo por Δt e fazendo $\Delta t \to 0$

i.e.,
$$\dot{A} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

usando o resultado do probl. 5.4. Assim, $r^2\dot{\theta} = 2\dot{A}$, como foi pedido. A quantidade vetorial

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \tfrac{1}{2}(r^2\dot{\theta})\mathbf{k}$$

é, geralmente, chamada de *velocidade areolar*.

5.6. Prove que, para uma partícula movendo-se em um campo de força central, a velocidade areolar é constante.

Pelo probl. 5.4 $r^2\dot{\theta} = h$ = a uma constante. Então, a velocidade areolar é

$$\dot{\mathbf{A}} = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}h\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}\mathbf{h}, \text{ um vetor constante.}$$

O resultado é, geralmente, dito como se segue: se uma partícula se move em um campo de força central com O como centro, então o vetor raio, desenhado de O à partícula, gera áreas iguais em tempos iguais. Este resultado é chamado, geralmente, *lei das áreas*.

5.7. Mostre por meio da substituição $r = 1/u$ que a equação diferencial para a trajetória da partícula em um campo central é

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2}$$

Do probl. 5.4 ou equação (3) do probl. (5.3), tem-se

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{ou} \qquad \dot{\theta} = h/r^2 = hu^2 \tag{1}$$

Substituindo na equação (2) do probl. 5.3, acha-se

$$m(\ddot{r} - h^2/r^3) = f(r) \tag{2}$$

Agora, se $r = 1/u$, tem-se

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{3}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{du}{d\theta} \tag{4}$$

Disto se vê que (2) pode ser escrito como

$$m(-h^2u^2d^2u/d\theta^2 - h^2u^3) = f(1/u) \tag{5}$$

ou, como foi pedido,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f(1/u)}{mh^2u^2} \tag{6}$$

ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA PARA CAMPOS DE FORÇA CENTRAL

5.8. (*a*) Prove que o campo de força central é conservativo e (*b*) ache a energia potencial correspondente de uma partícula neste campo.

Método 1

Se for possível achar-se o potencial ou a energia potencial, então ter-se-á provado incidentalmente que o campo é conservativo. Agora, se o potencial V existir, ele deve ser tal que

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dV \tag{1}$$

onde $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}_1$ é a força central. Tem-se

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(r)\,\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot d\mathbf{r} = f(r)\,dr$$

pois $\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr$.

Assim, se pudermos determinar V tal que

$$-dV = f(r)\,dr$$

por exemplo,

$$V = -\int f(r)\,dr \tag{2}$$

segue-se que o campo é conservativo e que (2) representa o potencial ou energia potencial.

Método 2.

Pode-se mostrar diretamente que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, mas este método é tedioso.

5.9. Ache a energia conservada de uma partícula de massa m em um campo de força central.

Método 1. A velocidade de uma partícula expressa em coordenadas polares é [probl. 1.49]

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{r}_1 + r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1 \qquad \text{tal que} \qquad v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

Então, o princípio da conservação de energia pode ser expresso como

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V = E \qquad \text{ou} \qquad \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E$$

onde E é constante.

Método 2. As equações do momento para uma partícula em um campo de força central são, pelo probl. 5.3,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \tag{1}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{2}$$

Multiplicando a equação (1) por $\dot{r}$, a equação (2) por $r\dot{\theta}$ e somando-as, obtém-se

$$m(\dot{r}\ddot{r} + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + r\dot{r}\dot{\theta}^2) = f(r)\dot{r} \tag{3}$$

Isto pode ser escrito como

$$\tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{d}{dt}\int f(r)\,dr \tag{4}$$

Então, integrando ambos os lados, obtém-se

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E \tag{5}$$

5.10. Mostre que a equação diferencial que descreve o movimento de uma partícula em um campo de força central pode ser escrita, como

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E$$

Do probl. 5.9, tem-se, pelo princípio de conservação de energia,

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \int f(r)\,dr = E \tag{1}$$

Tem-se também

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), acha-se

$$\tfrac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]\dot{\theta}^2 - \int f(r)\,dr = E \quad \text{ou} \quad \frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] - \int f(r)\,dr = E$$

pois $\theta = h/r^2$.

5.11. (*a*) Se $u = 1/r$, prove que $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = h^2\{(du/d\theta)^2 + u^2\}$.
(*b*) Use (*a*) para provar que a equação da conservação de energia fica na forma

$$(du/d\theta)^2 + u^2 = 2(E - V)/mh^2$$

(*a*) Das equações (1) e (3) do probl. 5.7, tem-se $\dot{\theta} = hu^2$, $\dot{r} = -h\,du/d\theta$. Assim

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = h^2(du/d\theta)^2 + (1/u^2)(hu^2)^2 = h^2\{(du/d\theta)^2 + u^2\}$$

(*b*) Do princípio da conservação de energia [probl. 5.9] e da parte (*a*), tem-se

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r\dot{\theta}^2) = E - V \quad \text{ou} \quad (du/d\theta)^2 + u^2 = 2(E - V)/mh^2$$

DETERMINAÇÃO DA ÓRBITA A PARTIR DA FORÇA CENTRAL OU A FORÇA CENTRAL A PARTIR DA ÓRBITA

5.12. Mostre que a posição da partícula como uma função do tempo t pode ser determinada das equações

$$t = \int [G(r)]^{-1/2}\,dr, \qquad t = \frac{1}{h}\int r^2\,d\theta,$$

onde

$$G(r) = \frac{2E}{m} + \frac{2}{m}\int f(r)\,dr - \frac{h^2}{2m^2r^2}.$$

Substituindo $\dot{\theta} = h/r^2$ na equação da conservação de energia do probl. 5.9,

$$\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + h^2/r^2) - \int f(r)\,dr = E$$

ou

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2}{m}\int f(r)\,dr - \frac{h^2}{r^2} = G(r)$$

Então, considerando a raiz quadrada positiva, tem-se

$$dr/dt = \sqrt{G(r)}$$

e, por separação de variáveis e integração, acha-se

$$t = \int [G(r)]^{-1/2}\,dr$$

A segunda equação sai quando se escreve $\dot{\theta} = h/r^2$ como $dt = r^2\,d\theta/h$, e integrando-a.

5.13. Mostre que, se a lei da força central é definida por

$$f(r) = -K/r^2, \qquad K > 0,$$

i.e., uma lei de atração inversa do quadrado, então a trajetória da partícula é uma cônica.

Método 1.

Neste caso, $f(1/u) = -Ku^2$. Substituindo isto na equação diferencial do movimento no probl. 5.7, acha-se

$$d^2u/d\theta^2 + u = K/mh^2 \tag{1}$$

Esta equação tem a solução geral

$$u = A\cos\theta + B\,\text{sen}\,\theta + K/mh^2 \tag{2}$$

ou usando o probl. 4.2

$$u = K/mh^2 + C\cos(\theta - \phi) \tag{3}$$

i.e.,

$$r = \frac{1}{K/mh^2 + C\cos(\theta - \phi)} \tag{4}$$

É sempre possível escolher os eixos tais que $\phi = 0$, em cujo caso se tem

$$r = \frac{1}{K/mh^2 + C\cos\theta} \tag{5}$$

Isto tem sempre a forma de uma cônica [veja o probl. 5.16]

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta} = \frac{1}{1/p + (\varepsilon/p)\cos\theta} \tag{6}$$

Então, comparando-se (5) e (6) vê-se que

$$1/p = K/mh^2, \qquad \varepsilon/p = C \tag{7}$$

ou

$$p = mh^2/K, \qquad \varepsilon = mh^2C/K \tag{8}$$

Método 2. Como $f(r) = -K/r^2$, tem-se

$$V = -\int f(r)\,dr = -K/r + c_1 \tag{9}$$

onde c_1 é uma constante. Se for suposto que $V \to 0$ para $r \to \infty$, então $c_1 = 0$ e, assim,

$$V = -K/r \tag{10}$$

Usando o probl. 5.10, acha-se

$$\frac{mh^2}{2r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right] = E + \frac{K}{r} \tag{11}$$

de onde

$$\frac{dr}{d\theta} = \pm r\sqrt{\frac{2Er^2}{mh^2} + \frac{2Kr}{mh^2} - 1} \tag{12}$$

Pela separação de váriáveis e integração [veja o probl. 5.66], acha-se a solução (5), onde C é expressa em termos da energia E.

5.14. (*a*) Obtenha a constante C do probl. 5.13 em termos da energia total E e (*b*) mostre, assim, que a cônica é uma elipse, parábola ou hipérbole, se $E < 0$, $E = 0$, $E > 0$, respectivamente.

Método 1.

(*a*) A energia potencial é

$$V = -\int f(r)\,dr = \int (K/r^2)\,dr = -K/r = -Ku \tag{1}$$

onde foi usado $u = 1/r$ e escolha a constante de integração tal que $\lim_{r\to\infty} V = 0$.

Agora, da equação (5) do probl. 5.13,

$$u = 1/r = K/mh^2 + C\cos\theta \tag{2}$$

Assim do probl. 5.11 (*b*) junto com (1), tem-se

$$(C\,\text{sen}\,\theta)^2 + \left(\frac{K}{mh^2} + C\cos\theta\right)^2 = \frac{2E}{mh^2} + \frac{2K}{mh^2}\left(\frac{K}{mh^2} + C\cos\theta\right)$$

ou

$$C^2 = \frac{K^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2} \qquad \text{ou} \qquad C = \sqrt{\frac{K^2}{m^2h^4} + \frac{2E}{mh^2}} \tag{3}$$

admitindo que $C > 0$.

(*b*) Usando o valor de C no item (*a*), a equação da cônica fica

$$u = \frac{1}{r} = \frac{K}{mh^2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{K^2}}\cos\theta\right\}$$

Comparando isto com (4) do probl. 5.16, vê-se que a excentricidade é

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Emh^2}{K^2}} \tag{4}$$

Vê-se daí que a cônica é uma elipse, se $E < 0$ [mas maior que $-K^2/2mh^2$], uma parábola se $E = 0$ e uma hipérbole se $E > 0$, pois, em tais casos, $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ e $\varepsilon > 1$, respectivamente.

Método 2. O valor de C pode ser também obtido como no segundo método do probl. 5.13.

5.15. Sob influência de uma força central em um ponto O, uma partícula se move em uma órbita circular que passa por O. Ache a lei da força.

Método 1.

Em coordenadas polares, a equação de um círculo de raio a passando por O é [veja a fig. 5-9]

$$r = 2a\cos\theta$$

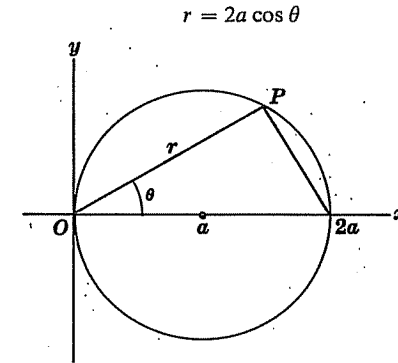



Fig. 5-9

Então, como $u = 1/r = (\sec\theta)/2a$, tem-se

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\sec\theta\,\text{tg}\,\theta}{2a}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{(\sec\theta)(\sec^2\theta) + (\sec\theta\,\text{tg}\,\theta)(\text{tg}\,\theta)}{2a} = \frac{\sec^3\theta + \sec\theta\,\text{tg}^2\,\theta}{2a}$$

Assim, pelo probl. 5.7,

$$f(1/u) = -mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -mh^2u^2\left(\frac{\sec^3\theta + \sec\theta\,\mathrm{tg}^2\,\theta + \sec\theta}{2a}\right)$$

$$= -\frac{mh^2u^2}{2a}\{\sec^3\theta + \sec\theta(\mathrm{tg}^2\,\theta + 1)\} = -\frac{mh^2u^2}{2a}\cdot 2\sec^3\theta$$

$$= -8mh^2a^2u^5$$

ou

$$f(r) = -\frac{8mh^2a^2}{r^5}$$

Assim, a força é de atração, variando inversamente à quinta potência da distância de O.

Método 2. Usando $r = 2a\cos\theta$ na equação (16) da introdução deste capítulo, tem-se

$$f(r) = \frac{mh^2}{r^4}\left\{-2a\cos\theta - \frac{2}{2a\cos\theta}(-2a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 - 2a\cos\theta\right\}$$

$$= -\frac{4amh^2}{r^4\cos\theta} = -\frac{8a^2mh^2}{r^5}$$

SEÇÕES CÔNICA, ELÍPTICA, PARABÓLICA E HIPERBÓLICA

5.16. Derive a equação (18) [da introdução deste capítulo], para uma seção cônica.

Referindo à fig. 5-3, pela definição de uma seção cônica, tem-se para um ponto qualquer P nela,

$$r/d = \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad d = r/\varepsilon \tag{1}$$

Correspondendo a um certo ponto Q, tem-se

$$p/D = \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad p = \varepsilon D \tag{2}$$

Mas

$$D = d + r\cos\theta = \frac{r}{\varepsilon} + r\cos\theta = \frac{r}{\varepsilon}(1 + \varepsilon\cos\theta) \tag{3}$$

Então, de (2) e (3), tem-se eliminando D,

$$p = r(1 + \varepsilon\cos\theta) \qquad \text{ou} \qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{4}$$

A equação é um círculo se $\varepsilon = 0$, uma elípse se $0 < \varepsilon < 1$, uma parábola se $\varepsilon = 1$ e uma hipérbole se $\varepsilon > 1$.

5.17. Derive a equação (19), [da introdução deste capítulo], para uma elipse.

Referindo à fig. 5-4, quando $\theta = 0$, $r = OV$ e quando $\theta = \pi$, $r = OU$. Assim, usando a equação (4) do probl. 5.16,

$$OV = p/(1 + \varepsilon), \qquad OU = p/(1 - \varepsilon) \tag{1}$$

Mas, como $2a$ é o comprimento do eixo maior,

$$OV + OU = 2a \qquad \text{ou} \qquad p/(1 + \varepsilon) + p/(1 - \varepsilon) = 2a \tag{2}$$

de onde

$$p = a(1 - \varepsilon^2) \tag{3}$$

Assim, a equação da elipse é

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \tag{4}$$

5.18. Prove que, na fig. 5-4, (*a*) $OV = a(1 - \varepsilon)$, (*b*) $OU = a(1 + \varepsilon)$.

(*a*) Do probl. 5-17, da equação (3) e da primeira equação de (1)

$$OV = \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = a(1 - \varepsilon) \tag{1}$$

(*b*) Do probl. 5.17, da equação (3) e da segunda equação de (1),

$$OU = \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = a(1 + \varepsilon) \tag{2}$$

5.19. Prove que $c = a\varepsilon$, onde c é a distância do centro do foco da elipse, a é o comprimento do semi-eixo maior e ε é a excentricidade.

Da fig. 5-4, tem-se $c = CO = CV - OV = a - a(1 - \varepsilon) = a\varepsilon$.

Um resultado análogo é obtido para a hipérbole [veja o probl. 5.73(*c*)].

5.20. Se a e c são como no probl. 5.19 e b é o comprimento do semi-eixo maior, prove que (*a*) $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, (*b*) $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

(*a*) Da fig. 5-4, e da definição da elipse, tem-se

$$\varepsilon = \frac{OV}{VE} = \frac{CV - CO}{VE} = \frac{a - c}{VE} \qquad \text{ou} \qquad VE = \frac{a - c}{\varepsilon} \tag{1}$$

Como a excentricidade é também a distância de O a W dividida pela distância de W à diretriz AB [que é igual a CE], tem-se

$$OW/CE = \varepsilon$$

ou, usando (1) e o resultado do probl. 5.19, tem-se

$$OW = \varepsilon CE = \varepsilon(CV + VE) = \varepsilon[a + (a - c)/\varepsilon] = \varepsilon a + a - c = a$$

Então, $(OW)^2 = (OC)^2 + (CW)^2$ ou $a^2 = b^2 + c^2$, i.e., $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

(*b*) Do probl. 5.19 e do item (*a*), $a^2 = b^2 + a^2\varepsilon^2$ ou $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

LEIS DE KEPLER DO MOVIMENTO DOS PLANETAS E A LEI UNIVERSAL DE NEWTON PARA A GRAVITAÇÃO

5.21. Prove que, se um planeta gira em torno do Sol, em uma trajetória elíptica com o Sol em um dos focos [primeira lei de Kepler], então a força central necessária varia inversamente ao quadrado da distância do Sol ao planeta.

Se a trajetória é uma elipse, com o Sol em um dos focos, então a distância r até Sol, pelo probl. 5.16, é

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta} \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\theta \tag{1}$$

onde $\varepsilon < 1$. Assim, a força central é dada como no probl. 5.7 por

$$f(1/u) = -mh^2u^2(d^2u/d\theta^2 + u) = -mh^2u^2/p \tag{2}$$

substituindo-se o valor de u em (1). De (2) tem-se, repondo u por $1/r$,

$$f(r) = -mh^2/pr^2 = -K/r^2 \tag{3}$$

5.22. Discuta a conexão da lei universal de Newton para a gravitação com o probl. 5.21.

Historicamente, Newton chegou à lei do inverso do quadrado usando a primeira lei de Kepler e o método do probl. 5.21. Ele, então, foi levado à idéia de que, talvez, todos os objetos do Universo fossem atraídos uns pelos outros com uma força que seria inversamente proporcional ao quadrado da distância r entre eles e diretamente proporcional ao produto de suas massas. Isto levou ao postulado fundamental

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

onde G é a constante gravitacional universal. Equivalentemente, a lei da força (3) do probl. 5.21 é a mesma que a de (1), onde

$$K = GMm \tag{2}$$

5.23. Prove a terceira lei de Kepler: Os quadrados dos períodos dos vários planetas são proporcionais aos cubos dos seus semi-eixos maiores correspondentes.

Se a e b são os comprimentos dos semi-eixos maior e menor, então a área da elipse é πab. Como a velocidade areolar tem magnitude $h/2$ [probl. 5.6], o tempo gasto para descrever uma área πab, i.e., o período é

$$P = \frac{\pi ab}{h/2} = \frac{2\pi ab}{h} \tag{1}$$

Agora, pela equação (3) do probl. 5.17, probl. 5.20(*b*) e equação (8) do probl. 5.13, tem-se

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad p = a(1-\varepsilon^2) = mh^2/K \tag{2}$$

Então, de (1) e (2), acha-se

$$P = 2\pi m^{1/2}a^{3/2}/K^{1/2} \quad \text{ou} \quad P^2 = 4\pi^2ma^3/K$$

Assim, os quadrados dos períodos são proporcionais aos cubos dos semi-eixos maiores.

5.24. Prove que $GM = gR^2$.

Na superfície da Terra, i.e., $r = R$ onde R é o raio, a força de atração da

Terra sobre um objeto de massa m é igual ao peso mg do objeto. Assim, se M é a massa da Terra,

$$GMm/R^2 = mg \quad \text{ou} \quad GM = gR^2$$

5.25. Calcule a massa da Terra.

Do probl. 5.24, $GM = gR^2$ ou $M = gR^2/G$ tomando o raio da Terra como $6{,}38 \times 10^8$ cm, $g = 980$ cm/s² e $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ unidades c.q.s. acha-se $M = 5{,}98 \times 10^{27}$ gm $= 5{,}98 \cdot 10^{24}$ Kg.m.

ATRAÇÃO DE OBJETOS

5.26. Ache a força de atração de uma haste fina e uniforme de comprimento $2a$ sobre uma partícula de massa m colocada a uma distância b do ponto médio da haste.

Escolha o eixo x ao longo da haste e o eixo y perpendicular à haste e passando pelo centro O, como é mostrado na fig. 5-10. Seja σ a massa por unidade de comprimento da haste. A força de atração $d\mathbf{F}$ entre um elemento de massa $\sigma\,dx$ da haste e m, pela lei da gravitação universal de Newton, é

$$d\mathbf{F} = \frac{Gm\sigma\,dx}{x^2+b^2}(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - \cos\theta\,\mathbf{j})$$
$$= \frac{Gm\sigma x\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{j}$$

assim, da fig. 5-10, sen $\theta = x/\sqrt{x^2+b^2}$, $\cos\theta = b/\sqrt{x^2+b^2}$. Então, a força de atração total é

$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\int_{x=-a}^{a}\frac{Gm\sigma x\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} - \mathbf{j}\int_{x=-a}^{a}\frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$
$$= 0 - 2\mathbf{j}\int_0^a\frac{Gm\sigma b\,dx}{(x^2+b^2)^{3/2}} = -2Gm\sigma b\,\mathbf{j}\int_0^a\frac{dx}{(x^2+b^2)^{3/2}}$$

Faça $x = b\operatorname{tg}\theta$ nesta integral. Então, quando $x = 0$, $\theta = 0$; e quando $x = a$, $\theta = \operatorname{tg}^{-1}(a/b)$. Assim, a integral fica

$$\mathbf{F} = -2Gm\sigma b\,\mathbf{j}\int_0^{\operatorname{tg}^{-1}(a/b)}\frac{b\sec^2\theta\,d\theta}{(b^2\sec^2\theta)^{3/2}} = -\frac{2Gm\sigma a}{b\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$$

Como a massa da haste é $M = 2a\sigma$, isto pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{b\sqrt{a^2+b^2}}\mathbf{j}$$

Assim se vê que a força de atração é dirigida de m ao centro da haste e de magnitude $2Gm\sigma a/b\sqrt{a^2+b^2}$ ou $GMm/b\sqrt{a^2+b^2}$.

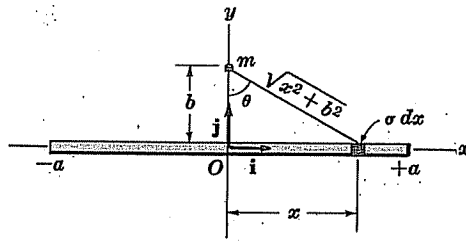



Fig. 5-10

5.27. Uma massa m está em uma perpendicular pelo centro de uma placa circular e fina de raio a e a uma distância b do centro. Ache a fôrça de atração entre a placa e a massa m.

Método 1.

Seja n um vetor unitário desenhado a partir do ponto P, onde m está localizado ao centro O da placa. Subdivida a placa circular em anéis circulares [tal como o ABC na fig. 5-11] de raio r e a espessura dv. Se σ é a massa por unidade de área, então a massa do anel é $\sigma(2\pi r dr)$. Como todos os pontos do anel estão à mesma distância $\sqrt{r^2+b^2}$ de P, a força de atração do anel sobre m será

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(2\pi r\,dr)m}{\sqrt{r^2+b^2}}\cos\phi\,\mathbf{n}$$

$$= \frac{G\sigma\,2\pi r\,dr\,mb}{(r^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{n} \qquad (1)$$

onde se usou o fato de que, devido à simetria a força resultante de atração está na direção n. Por integração sobre todos os anéis de $r = 0$ a $r = a$, acha-se que a força de atração total é

$$\mathbf{F} = 2\pi G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+b^2)^{3/2}} \qquad (2)$$

Para avaliar a integral, seja $r^2+b^2 = u^2$ tal que $r dr = u du$. Assim, como $u = b$ quando $r = 0$ e $u = \sqrt{a^2+b^2}$ quando $r = a$, o resultado é

$$\mathbf{F} = 2\pi G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_b^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{u\,du}{u^3} = 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

Se α for o valor de ϕ quando $r = a$, isto pode ser escrito como

$$\mathbf{F} = 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}\,(1-\cos\alpha)$$

Assim, a fôrça é dirigida de m ao centro O da placa e tem magnitude

$$2\pi G\sigma m(1-\cos\alpha).$$

Método 2.

O método de dupla integração pode ser usado. Em tal caso, o elemento de área em A é $r dr\, d\theta$ onde θ é o ângulo medido em uma linha [tomada como sendo o eixo x] no plano da placa circular e passando pelo centro O. Então, tem-se como na equação (1),

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(r\,dr\,d\theta)mb}{(r^2+b^2)^{3/2}}\mathbf{n}$$

e, por integração sobre a placa circular,

$$\mathbf{F} = G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_{r=0}^{a}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+b^2)^{3/2}} = G\sigma mb\,\mathbf{n}\int_{r=0}^{a}\frac{2\pi r\,dr}{(r^2+b^2)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi G\sigma m\,\mathbf{n}\,(1-\cos\alpha)$$

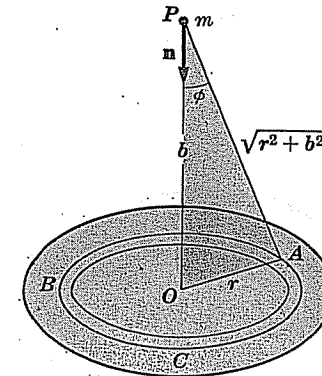



Fig. 5-11

5.28. Uma placa uniforme tem seus limites consistindo de dois semi-círculos concêntricos de raios interno e externo a e b respectivamente, como é mostrado na fig. 5-12. Ache a força de atração da placa sobre uma massa m, localizada no centro O.

É conveniente o uso de coordenadas polares (r, θ). O elemento de área da placa [em preto na fig. 5-12] é $dA = r dr\, d\theta$, e a massa é $\sigma r\, dr\, d\theta$. Então, a força de atração entre dA e O é

$$d\mathbf{F} = \frac{G(\sigma r\,dr\,d\theta)m}{r^2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

Assim, a força total de atração é

$$\mathbf{F} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=a}^{b} \frac{G(\sigma r\,dr\,d\theta)m}{r^2}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})$$

$$= G\sigma m \ln\left(\frac{b}{a}\right)\int_{\theta=0}^{\pi}(\cos\theta\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\,d\theta = 2G\sigma m \ln\left(\frac{b}{a}\right)\mathbf{j}$$

Como $M = \sigma(\frac{1}{2}\pi b^2 - \frac{1}{2}\pi a^2)$, tem-se $\sigma = 2M/\pi(b^2 - a^2)$ e a força pode ser escrita como

$$\mathbf{F} = \frac{4GMm}{\pi(b^2 - a^2)}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\mathbf{j}$$

O método de simples integração pode também ser usado dividindo-se a região entre $r = a$ e $r = b$ em anéis circulares como no probl. 5.27.

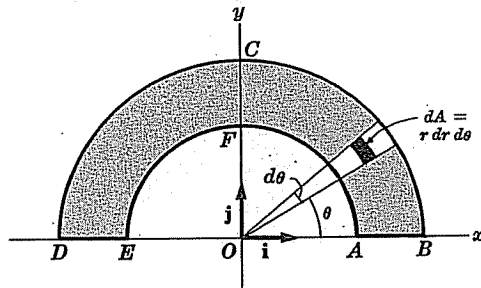



Fig. 5-12

5.29. Ache a força de atração de uma casca esférica fina de raio a sobre uma partícula P de massa m, a uma distância $r > a$ do seu centro.

Seja O o centro da esfera. Subdivida a superfície da esfera em elementos circulares, tais como $ABCDA$ da fig. 5-13, usando planos paralelos perpendiculares a OP.

A área do elemento de superfície $ABCDA$, como é visto na fig. 5-13, é

$$2\pi(a\operatorname{sen}\theta)(a\,d\theta) = 2\pi a^2 \operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

como o raio é $a\operatorname{sen}\theta$ [tal que o perímetro seja $2\pi(a\operatorname{sen}\theta)$] e a espessura é $a d\theta$. Então, se σ é a massa por unidade de área, a massa de $ABCDA$ é $2\pi a^2\,\sigma\operatorname{sen}\theta\,d\theta$.

Fig. 5-13

Como todos os pontos de $ABCDA$ estão a uma mesma distância $w = AP$ de P, a força de atração do elemento $ABCDA$ sobre m é

$$d\mathbf{F} = \frac{G(2\pi a^2\sigma\operatorname{sen}\theta\,d\theta)m}{w^2}\cos\phi\,\mathbf{n} \qquad (1)$$

onde é usado o fato de que, por simetria, a força resultante estará na direção do vetor unitário $\mathbf{n}$ de P para O. Agora da fig. 5-13,

$$\cos\phi = \frac{PE}{AP} = \frac{PO - EO}{AP} = \frac{r - a\cos\theta}{w} \qquad (2)$$

Usando (2) em (1) junto com o fato de que, pela lei dos co-senos,

$$w^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta \qquad (3)$$

acha-se

$$d\mathbf{F} = \frac{G(2\pi a^2\sigma\operatorname{sen}\theta\,d\theta)m(r - a\cos\theta)}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\mathbf{n}$$

Então, a força total é

$$\mathbf{F} = 2\pi G a^2\sigma m\,\mathbf{n}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{(r - a\cos\theta)\operatorname{sen}\theta}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}\,d\theta \qquad (4)$$

Pode-se avaliar a integral pelo uso da variável w, dada por (3) em lugar de θ. Quando $\theta = 0$, $w^2 = a^2 - 2ar + r^2 = (r - a)^2$ tal que $w = r - a$, se $r > 0$. Também, quando $\theta = \pi$, $w^2 = a^2 + 2ar + r^2 = (r + a)^2$ tal que $w = r + a$. Em adição, tem-se

$$2w\,dw = 2ar\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

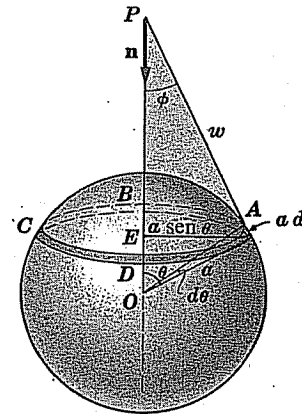
$$r - a\cos\theta = r - a\left(\frac{a^2 + r^2 - w^2}{2ar}\right) = \frac{w^2 - a^2 + r^2}{2r}$$

Então, (4) fica

$$\mathbf{F} = \frac{\pi G a\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_{r-a}^{r+a}\left(1 + \frac{r^2 - a^2}{w^2}\right)dw = \frac{4\pi G a^2\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}$$

5.30. Faça o probl. 5.29, se $r < a$.

Neste caso, a força é dada também por (4) do probl. 5.29. Entretanto, ao avaliar a integral, nota-se que ao se fazer a substituição de (3), do probl. 5.29, que $\theta = 0$ leva a $w^2 = (a - r)^2$ ou $w = a - r$, se $r < a$. Então, o resultado (4) do probl. 5.29 fica

$$\mathbf{F} = \frac{\pi G a\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_{a-r}^{a+r}\left(1 - \frac{a^2 - r^2}{w^2}\right)dw = \mathbf{0}$$

Assim, não haverá força de atração de uma casca esférica sobre qualquer massa dentro da casca. Isto significa que, em tal caso, uma partícula estará em equilíbrio dentro da casca.

5.31. Prove que a força de atração do probl. 5.29 é a mesma como se toda a massa da casca esférica fôsse concentrada em seu centro.

A massa da casca é $M = 4\pi a^2\sigma$. Assim, a fôrça é $\mathbf{F} = (GMm/r^2)\mathbf{n}$, o que prova o resultado pedido.

5.32. (*a*) Ache a fôrça de atração de uma esfera sólida e uniforme sobre uma massa m colocada fora dela e (*b*) prove que a força é a mesma, quando toda a massa dela foi concentrada em seu centro.

(*a*) Pode-se subdividir a esfera sólida em cascas esféricas concêntricas finas. Se ρ é a distância de qualquer de uma dessas cascas ao centro e $d\rho$ é a espessura, então, pelo probl. 5.29, a fôrça de atração desta casca sôbre a massa m é

$$d\mathbf{F} = \frac{G\sigma(4\pi\rho^2\, d\rho)m}{r^2}\mathbf{n} \tag{1}$$

onde σ é a massa por unidade de volume. Então, a força total, obtida por integração de $r = 0$ a $r = a$ é

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi G\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2}\int_0^a \rho^2\, d\rho = \frac{G(\frac{4}{3}\pi a^3)\sigma m\,\mathbf{n}}{r^2} \tag{2}$$

(*b*) como a massa da esfera é $M = \frac{4}{3}\pi a^3\sigma$, (2) pode ser escrita como $\mathbf{F} = (GMm/r^3)\mathbf{n}$, o que mostra que a força de atração é a mesma que obtém ao se concentrar toda a massa no centro.

Pode-se usar também integração tripla, para obter este resultado [veja o probl. 5.130].

5.33. Derive o resultado dos probls. 5.29 e 5.30, achando primeiro o potencial devido à distribuição de massa.

O potencial dV, devido ao elemento $ABCDA$, é

$$dV = -\frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\, d\theta)m}{w} = -\frac{G(2\pi a^2\sigma \operatorname{sen}\theta\, d\theta)m}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}$$

Então, o potencial total é

$$V = -2\pi Ga^2\sigma m \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}}$$

$$= -\frac{2\pi Ga\sigma m}{r}\{\sqrt{(a+r)^2} - \sqrt{(a-r)^2}\}$$

Se $r > a$, isto leva a

$$V = -\frac{4\pi Ga^2\sigma m}{r} = -\frac{GMm}{r}$$

Se $r < a$, isto leva a

$$V = -4\pi Ga\sigma m$$

Então, se $r > a$, a força é

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1$$

e, se $r < a$, a força é

$$\mathbf{F} = -\nabla V = -\nabla(-4\pi Ga\sigma m) = \mathbf{0}$$

de acordo, portanto, com os probls. 5.29 e 5.30.

PROBLEMAS DIVERSOS

5.34. Um objeto é lançado verticalmente para cima da superfície terrestre, com uma velocidade inicial v_0. Negligenciando a resistência do ar, (*a*) ache a velocidade em módulo a uma distância H, acima da superfície terrestre e (*b*) a menor velocidade de lançamento necessário para que o objeto não retorne mais.

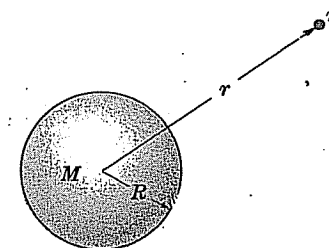



Fig. 5-14

(*a*) Seja r a distância radial do objeto, no instante t, do centro da Terra, que é suposta como sendo fixa [veja a fig. 5-14]. Se M é a massa da Terra e R o seu raio, então, pela lei da gravitação universal de Newton e o probl. 5.29, a fôrça entre m e M é

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

Se v é a velocidade em módulo no instante t, tem-se, pela segunda lei de Newton:

$$m\frac{dv}{dt}\mathbf{r}_1 = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \tag{2}$$

Isto pode ser escrito como

$$\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{ou} \quad v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$$

Então, por integração, acha-se

$$v^2/2 = GM/r + c_1$$

Como o objeto parte da superfície da Terra, com uma velocidade em módulo v_0, tem-se $v = v_0$ quando $r = R$ e, assim, $c_1 = v_0^2/2 - GM/R$. Então, (4) fica

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2 \tag{5}$$

Assim, quando o objeto está a uma altura H acima da superfície da Terra, i.e., $r = R + H$

$$v^2 = 2GM\left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R}\right) + v_0^2 = v_0^2 - \frac{2GMH}{R(R+H)}$$

i.e.,

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2gMH}{R(R+H)}}$$

Usando o probl. 5.24, isto pode ser escrito como

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2gRH}{R+H}} \tag{6}$$

(*b*) Com $H \to \infty$, a velocidade em módulo e no limite (6) fica

$$\sqrt{v_0^2 - 2GM/R} \quad \text{ou} \quad \sqrt{v_0^2 - 2gR} \tag{7}$$

pois $\lim_{H\to\infty} \frac{H}{(R+H)} = 1$. A velocidade em módulo inicial mínima ocorre quando (7) é nula ou quando

$$v_0 = \sqrt{2GM/R} = \sqrt{2gR} \tag{8}$$

Esta velocidade em módulo mínimo é chamada de *módulo da velocidade de escape* e a velocidade (vetorial) correspondente é chamada de *velocidade de escape* da superfície da Terra.

5.35. Mostre que a magnitude da velocidade de escape da superfície terrestre para um objeto é, aproximadamente, 11 m/s.

Da equação (8) do probl. 5.34, $v_0 = \sqrt{2gR}$. Tomando $g = 9{,}8$ m/s² e $R = 6\,400$ m, acha-se $v_0 = 11{,}1$ m/s.

5.36. Prove, usando os métodos vetoriais básicos, que a trajetória de um planeta em torno do Sol é uma elipse com o Sol em um dos focos.

Como a fôrça $\mathbf{F}$, entre o planeta e o Sol, é

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{1}$$

tem-se

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \tag{2}$$

Também, pelo probl. 5.1, equação (4), tem-se

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$$

Ora, como $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1$. Assim, de (3),

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = r\mathbf{r}_1 \times \left(r\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{r}_1\right) = r^2\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

De (2)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{h} = -GM\,\mathbf{r}_1 \times \left(\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)$$

$$= -GM\left\{\left(\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)\mathbf{r}_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right\} = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

usando a equação (4) acima e a equação (7) da introdução do primeiro capítulo.

Mas como $\mathbf{h}$ é um vetor constante $\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h})$, assim

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

E integrando, $\quad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{r}_1 + \mathbf{c}$

de onde

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} = GMr + r\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{c} = GMr + rc\cos\theta$$

sendo $\mathbf{c}$ um vetor constante arbitrário de magnitude c, e θ é o ângulo entre $\mathbf{c}$ e $\mathbf{r}_1$.

Como $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$ [veja o probl. 1.72 (*a*)],

$$h^2 = GMr + rc\cos\theta$$

e, assim,

$$r = \frac{h^2}{GM + c\cos\theta} = \frac{h^2/GM}{1 + (c/GM)\cos\theta}$$

o que é a equação de uma cônica. Como a única cônica que é uma curva fechada é a elipse, o resultado pedido está provado.

5.37. Prove que a velocidade em módulo v de uma partícula movendo-se em uma trajetória elíptica e em um campo inverso do quadrado é dada por

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

onde a é o semi-eixo maior.

Por (8) do probl. 5.13, (4) do probl. 5.14 e (3) do probl. 5.17, tem-se

$$p = \frac{mh^2}{K} = a(1-\varepsilon^2) = a\left(-\frac{2Emh^2}{K^2}\right) \tag{1}$$

de onde

$$E = -K/2a \tag{2}$$

Assim, pela conservação de energia, tem-se, usando $V = -K/r$,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = E - V = -\frac{K}{2a} + \frac{K}{r}$$

ou

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{3}$$

Pode-se mostrar, igualmente, para a hipérbole, que

$$v^2 = \frac{K}{m}\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right) \tag{4}$$

E, igualmente, para uma parábola [que corresponde fazer $a \to \infty$ em (3) e (4)],

$$v^2 = 2K/mr$$

5.38. Um satélite artificial (feito pelo homem) revolve em torno da Terra a uma altura H acima da superfície. Determine (*a*) a velocidade orbital em módulo e (*b*) o período orbital tal que um homem no satélite fique sem peso.

(*a*) Supondo que a Terra seja esférica e tenha um raio R, o homem não terá peso, quando a força centrífuga [igual e oposta à força centrípeta, i.e., a força devida à aceleração centrípeta] atuante sobre o homem devido à revolução do satélite balanceia a atração da Terra. Então, se v_0 é a velocidade orbital em módulo,

$$\frac{mv_0^2}{R+H} = \frac{GMm}{(R+H)^2} = \frac{gR^2m}{(R+H)^2} \quad \text{ou} \quad v_0 = \frac{R}{R+H}\sqrt{(R+H)g}$$

Se H é pequeno comparado com R, isto é, $\sqrt{Rg}$, aproximadamente.

(*b*) $$\text{velocidade orbital em módulo} = \frac{\text{distância percorrida por revolução}}{\text{tempo por revolução ou período}}$$

Assim,

$$v_0 = \frac{2\pi(R+H)}{P}$$

Então, da parte (*a*)

$$P = \frac{2\pi(R+H)}{v_0} = 2\pi\left(\frac{R+H}{R}\right)\sqrt{\frac{R+H}{g}}$$

Se H é pequeno comparado com R, isto é, $2\pi\sqrt{R/g}$ aproximadamente.

5.39. Calcule (*a*) a velocidade orbital em módulo e (*b*) o período do probl. 5.38, considerando que a altura H acima da superfície da Terra seja pequena comparada com o seu raio.

Tomando o raio da Terra como 6 400 km e $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, acha-se (*a*) $v_0 = \sqrt{Rg} = 788$ km/s e (*b*) $P = 2\pi\sqrt{R/g} \doteq 1{,}42\ \text{h} = 85$ min, aproximadamente

5.40. Ache a força de atração de uma esfera sólida de raio a sobre uma partícula de massa m a uma distância $b < a$ de seu centro.

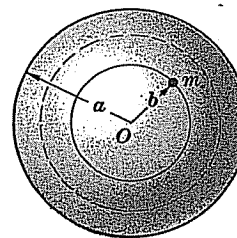



Fig. 5-15

Pelo probl. 5.30, a força de atração de uma casca esférica qualquer contendo m em seu interior [tal como a casca esférica mostrada tracejada na fig. 5-15] é nula.

Assim, a fôrça de atração sôbre m é a força devida à esfera de raio $b < a$ com centro em O. Se σ é a massa por unidade de volume, a fôrça de atração é

$$G(\tfrac{4}{3}\pi b^3)\sigma m/b^2 = (\tfrac{4}{3}\pi G\sigma m)b$$

Assim, a fôrça varia com a distância b da massa ao centro.

Problemas Propostos

FORÇAS CENTRAIS E EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

5.41. Indique quais dos seguintes campos de fôrça centrais são de atração em direção à origem O e quais são de repulsão de O.
Resp. (*a*) atrativo; (*b*) repulsivo; (*c*) atrativo se $0 < r < 1$; (*d*) repulsivo para $2n < r < 2n+1$, atrativo para $2n+1 < r < 2n+2$, onde $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

5.42. Prove que, em coordenadas retangulares, a magnitude da velocidade areolar é $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$.

5.43. Dê um exemplo de um campo de fôrça dirigida para um ponto fixo e que não seja um campo de fôrça central.

5.44. Derive a equação (7), da introdução deste capítulo.

5.45. Se uma partícula se move em uma órbita circular sob influência de uma força central em seu centro, prove que sua velocidade orbital em módulo deve ser constante.

5.46. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força definido por $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$. Se ela parte do eixo x positivo a uma distância a da origem e move-se com uma velocidade em módulo v_0, em uma direção que faz um ângulo α com o eixo x positivo, prove que a equação diferencial para a posição radial r da partícula, em um instante qualquer t, é

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{(K - ma^2v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)}{mr^3}$$

5.47. (*a*) Mostre que equação diferencial para a órbita no probl. 5.46 é dada em termos de $u = 1/r$ por

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (1-\gamma)u = 0, \qquad \text{onde} \qquad \gamma = \frac{K}{ma^2v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}$$

(*b*) resolva a equação diferencial de (*a*) e interprete-a fisicamente.

5.48. Uma partícula é posta a mover-se sob a influência de um campo de força central de modo que sua velocidade orbital em módulo seja sempre constante e igual a v_0. Determine todas as órbitas possíveis.

ENERGIA POTENCIAL E CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

5.49. Ache a energia potencial ou potencial correspondente aos campos de força central definidos por
(*a*) $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$, (*b*) $\mathbf{F} = (\alpha/r^2 + \beta/r^3)\mathbf{r}_1$, (*c*) $\mathbf{F} = Kr\mathbf{r}_1$, (*d*) $\mathbf{F} = \mathbf{r}_1/\sqrt{r}$,
(*e*) $\mathbf{F} = \operatorname{sen} \pi r\, \mathbf{r}_1$.
Resp. (*a*) $-K/2r^2$, (*b*) $\alpha/r + \beta/2r^2$, (*c*) $\frac{1}{2}Kr^2$, (*d*) $2\sqrt{r}$, (*e*) $(\cos \pi r)/\pi$

5.50. (*a*) Ache a energia potencial para uma partícula que se move em um campo de força $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^2$. (*b*) Que trabalho é realizado pelo campo de força em (*a*), ao mover-se a partícula de um ponto do círculo definido por $r = a > 0$ a um outro ponto no círculo $r = b > 0$? O trabalho depende da trajetória? Explique.
Resp. (*a*) $-K/r$, (*b*) $K(a-b)/ab$

5.51. Faça o probl. 5.50 para o campo de força $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r$.
Resp. (*a*) $-K \ln r$, (*b*) $-K \ln (a/b)$

5.52. Uma partícula de massa m, em um campo de força central definido por $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}_1/r^3$. (*a*) Escreva a equação para a conservação de energia. (*b*) Prove que, se E é a energia total suprida à partícula, então sua velocidade em módulo é dada por $v = \sqrt{K/mr^2 + 2E/m}$.

5.53. Uma partícula move-se em um campo de força central, definido por $\mathbf{F} = -Kr^2\mathbf{r}_1$. Ela parte do repouso em um ponto do círculo $r = a$. (*a*) Prove que, ao alcançar o círculo de raio $r = b$, sua velocidade em módulo será $\sqrt{2K(a^3-b^3)/3m}$ e que (*b*) a velocidade em módulo será independente da trajetória.

5.54. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força central $\mathbf{F} = K\mathbf{r}_1/r^n$, onde K e n são constantes. Ela parte do repouso em $r = a$ e chega a $r = 0$ com uma velocidade em módulo v_0. (*a*) Prove que se deve ter $n < 1$ e $K > 0$. (*b*) Prove que $v_0 = \sqrt{2Ka^{1-n}/m(n-1)}$. (*c*) Discuta o significado físico dos resultados em (*a*).

5.55. Por diferenciação de ambos os lados da equação (13), da introdução deste capítulo, obtenha a equação (6).

DETERMINAÇÃO DA ÓRBITA A PARTIR DA FORÇA CENTRAL OU A FORÇA CENTRAL A PARTIR DA ÓRBITA

5.56. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força central dado em magnitude por $f(r) = -Kr$, onde K é uma constante positiva. Se a partícula parte de $r = a$, $\theta = 0$ com uma velocidade em módulo v_0 em direção perpendicular ao eixo x, determine a sua órbita. Qual é o tipo de curva descrito?

5.57. (*a*) Faça o probl. 5.56 se a velocidade em módulo for v_0 e em uma direção que faz um ângulo α com o eixo x positivo (*b*) Discuta os casos $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$ e dê uma interpretação física.

5.58. Uma partícula movendo-se em um campo de força central localizada em $r = 0$ descreve a espiral $r = e^{-\theta}$. Prove que a magnitude da força é inversamente proporcional a r^3.

5.59. Ache a força central necessária para fazer uma partícula descrever a leminiscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ [veja a fig. 5-16].
Resp. Uma força proporcional a r^{-7}.

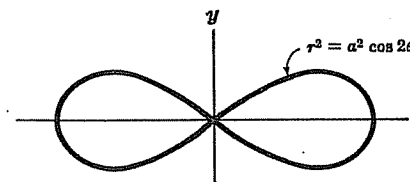



Fig. 5-16

5.60. Obtenha a órbita para a partícula do probl. 5.46 e descreva-a fisicamente.

5.61. Prove que as órbitas $r = e^{-\theta}$ e $r = 1/\theta$ são ambas possíveis para o caso de um campo de força inverso do cubo. Explique fisicamente como isto é possível.

5.62. (*a*) Mostre que, se a lei de força for dada por

$$\mathbf{F} = \frac{A\mathbf{r}_1}{r^4 \cos \theta} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{F} = \frac{B\mathbf{r}_1}{r^2 \cos^3 \theta},$$

então uma partícula pode mover-se em uma órbita circular $r = 2a \cos \theta$. (*b*) O que se pode concluir acerca da unicidade de forças, quando a órbita é especificada? (*c*) Responda o item (*b*) quando as forças são centrais.

5.63. (*a*) Qual é a força central, na origem O, necessária para fazer uma partícula mover-se em torno de O, com uma velocidade em módulo proporcional ao inverso de sua distância de O? (*b*) Quais são os tipos de órbitas possíveis em tal caso?

5.64. Discuta o movimento de uma partícula movendo-se em um campo de força central dado por $\mathbf{F} = (\alpha/r^2 + \beta/r^3)\mathbf{r}_1$.

5.65. Prove que não há uma força central que seja capaz de mover uma partícula em uma linha reta.

5.66. Complete a integração da equação (12) do probl. 5.13 e chegue à equação (5) do mesmo problema. [*Sugestão*: considere $r = 1/\mu$].

5.67. Considere que a órbita de uma partícula que se mova em um campo de força central seja dada por $\theta = \theta(r)$. Prove que a lei da força é $-\dfrac{mh^2[2\theta' + r\theta'' + r^2(\theta')^3]}{r^5(\theta')^3}$ onde as linhas representam diferenciações em relação a r.

5.68. (*a*) Use o probl. 5.67, para mostrar que, se $\theta = 1/r$, a força central é de atração e varia inversamente com r^3. (*b*) Faça o gráfico da órbita em (*a*) e explique fisicamente.

SEÇÕES CÔNICAS, ELÍPTICAS, PARABÓLICAS E HIPERBÓLICAS

5.69. A equação de uma cônica é $r = \dfrac{12}{3 + \cos\theta}$. Faça o gráfico da cônica, achando (*a*) os focos, (*b*) os vértices, (*c*) o comprimento do eixo maior, (*d*) o comprimento do eixo menor, (*e*) a distância do centro à diretriz.

5.70. Faça o probl. 5.69 para a cônica $r = \dfrac{24}{3 + 5\cos\theta}$.

5.71. Mostre que a equação da parábola pode ser escrita como $r = p\sec^2(\theta/2)$.

5.72. Ache a equação para uma elipse que tenha o foco na origem, seu centro no ponto $(-4, 0)$ e seu eixo maior de comprimento 10.
Resp. $r = 9/(5 + 4\cos\theta)$

5.73. Na fig. 5-17, SR ou TN é chamado de *eixo menor* da hipérbole e seu comprimento é, geralmente, representado por $2b$. O comprimento do *eixo maior* VU é $2a$,

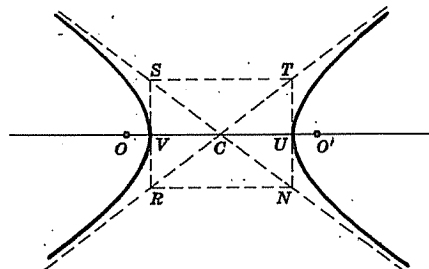



Fig. 5-17

enquanto a distância entre os focos O e O'^2 é $2c$ [i.e., a distância do outro C a um foco O ou O' é C].
(*a*) Prove que $c^2 = a^2 + b^2$
(*b*) Prove que $b = a\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, onde ε é a excentricidade.
(*c*) Prove que $c = a\varepsilon$. Compare com os resultados da elipse.

5.74. Derive a equação (22), da introdução deste capítulo, para uma hipérbole.

5.75. Em coordenadas retangulares, as equações da elipse e da hipérbole, em uma forma padrão, são dadas por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

respectivamente, onde a e b são os comprimentos dos semi-eixos maior e menor. Faça o gráfico destas equações localizando os vértices, focos e diretrizes, e explique a relação destas equações com as equações (19) e (22), da introdução deste capítulo.

5.76. Usando as definições alternativas para elipse e hipérbole dadas na introdução deste capítulo, obtenha as equações (19) e (22).

5.77. Prove que o ângulo entre os assíntotas da hipérbole é $2\cos^{-1}(1/\varepsilon)$.

AS LEIS DE KEPLER E DE NEWTON PARA A GRAVITAÇÃO

5.78. Considerando que o planeta Marte tenha um período de revolução em torno do Sol de 687 dias terrestres, aproximadamente, ache a distância média do Sol a Marte. Tome a distância da Terra ao Sol como sendo de 149 milhões de quilômetros. *Resp.* 224 milhões de quilômetros.

5.79. Faça o probl. 5.78 para (*a*) Júpiter e (*b*) Vênus, que têm períodos de 4 333 e 225 dias terrestres, respectivamente.
Resp. (*a*) 774 milhões de quilômetros, (*b*) 107 milhões de quilômetros.

5.80. Considere que um pequeno planeta esférico tenha um raio de 10 km e densidade média de 5 g/cm³. (*a*) Qual seria a aceleração devida à gravidade em sua superfície? (*b*) Qual seria o peso de um homem nesse planeta, se ele pesasse 80 kgf na Terra?

5.81. Se a aceleração devida à gravidade na superfície de um planeta P esférico é g_P, sua densidade média e raio são σ_P e R_P respectivamente, prove que $g_P = \frac{4}{3}\pi G R_P \sigma_P$, onde G é a constante gravitacional universal.

5.82. Se L, M, T representam as dimensões de comprimento, massa e tempo, ache as dimensões da constante gravitacional universal. *Resp.* $L^3M^{-1}T^{-2}$.

5.83. Calcule a massa do Sol, usando o fato de que a Terra está, aproximadamente 150×10^6 km dele e faz uma revolução completa em seu redor em, aproximadamente, 365 dias. *Resp.* 2×10^{30} kg.

5.84. Calcule a força entre o Sol e a Terra, se a distância entre eles for considerada como sendo 150×10^6 km e as massas da Terra e do Sol são 6×10^{24} kg e 2×10^{30} kg, respectivamente. *Resp.* $1{,}16 \times 10^{24}$ newtons.

ATRAÇÃO DE OBJETOS

5.85. Ache a força de atração de uma haste uniforme e fina de comprimento a sobre uma massa m fora da barra, mas na mesma linha da barra, e a uma distância b de sua extremidade. *Resp.* $GMm/b(a+b)$.

5.86. No probl. 5.85, determine onde a massa da haste deve ser concentrada, para que dê a mesma força de atração.
Resp. Em um ponto da haste distante $\sqrt{b(a+b)}-b$ da extremidade.

5.87. Ache a força de atração de uma haste fina, uniforme e infinitamente longa sobre uma massa m, a uma distância b dela.
Resp.: A magnitude é de $2Gm\sigma/b$.

5.88. Um fio uniforme tem a forma de um arco de círculo de raio b e ângulo central ψ. Prove que a força de atração do fio sobre a massa m colocada no centro do círculo é dada em magnitude por $2Gm\sigma/b$.

$$\frac{2GMm \operatorname{sen}(\psi/2)}{b^2\psi} \quad \text{ou} \quad \frac{2G\sigma m \operatorname{sen}(\psi/2)}{b}$$

onde M é a massa do fio e σ é a massa por unidade de comprimento. Discuta os casos $\psi = \pi/2$ e $\psi = \pi$.

5.89. Na fig. 5-18, AB é uma haste fina de comprimento $2a$ e m é a massa localizada no ponto C, a uma distância b da haste. Prove que a força de atração da haste sobre m tem magnitude

$$\frac{GMm}{ab} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

na direção que faz um ângulo com a haste dado por

$$\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{\cos\beta + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha}\right)$$

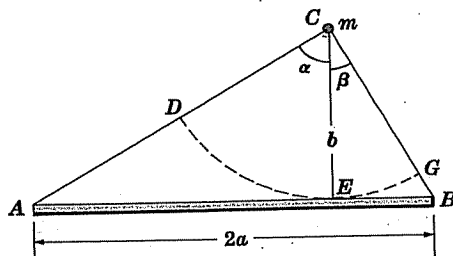



Fig. 5-18

Discuta o caso $\alpha = \beta$ e compare com o probl. 5.26.

5.90. Comparando o probl. 5.89 com o probl. 5.88, prove que a haste do probl. 5.89 pode ser reposta por um fio na forma de um arco circular DEG [mostrado tracejado na fig. 5-18] com o seu centro em C e que seja tangente à haste E. Prove que a direção da atração é para o ponto médio deste arco.

5.91. Um hemisfério de massa M e raio a tem uma partícula de massa m localizada no seu centro. Ache a força de atração (*a*) se o hemisfério for uma casca fina, (*b*) se o hemisfério for um hemisfério sólido.
Resp.: (*a*) $GMm/2a^2$, (*b*) $36Mm/2a^2$.

5.92. Faça o probl. 5.91, considerando que o hemisfério seja uma casca de raios, interno e externo, b e a, respectivamente.

5.93. Deduza, a partir da lei de Kepler, que, se a força de atração entre o Sol e os planetas for dada em magnitude por $\gamma m/r^2$, então γ deve ser independente de um planeta em particular.

5.94. Um cone tem uma altura H e raio a. Prove que a força de atração sobre uma partícula de massa m, colocada em seu vértice, tem magnitude

$$\frac{6GMm}{a^2}\left(1-\frac{H}{\sqrt{a^2+H^2}}\right).$$

5.95. Ache a força de atração entre duas esferas que não se interseccionem.

5.96. Uma partícula de massa m é colocada fora de uma esfera sólida, uniforme e de raio a, a uma distância sobre a linha perpendicular à sua base e passando pelo seu centro. Prove que a força de atração é dada em magnitude por $GMm(\sqrt{2}-1)/a^2$.

5.97. Faça (*a*) o probl. 5.26, (*b*) o probl. 5.27 e (*c*) o probl. 5.94, achando em primeiro lugar o potencial.

PROBLEMAS DIVERSOS

5.98. Uma partícula é atirada verticalmente para cima da superfície terrestre, com velocidade em módulo inicial de v_0.
(*a*) Prove que a máxima altura H, alcançada acima da superfície da Terra, é $H = v_0^2 R(2gR - v_0^2)$.
(*b*) Discuta a influência do caso em que $v_0^2 = 2gR$.
(*c*) Prove que, se H for pequena, então ela é igual a $v_0^2/2g$ aproximadamente.

5.99. (*a*) Prove que o tempo gasto para alcançar a máxima altura do probl. 5.98 é

$$\sqrt{\frac{R+H}{2g}}\left\{\sqrt{\frac{H}{R}} + \frac{R+H}{2R}\cos^{-1}\left(\frac{R-H}{R+H}\right)\right\}$$

(*b*) Prove que, se H é muito pequeno em comparação com R, então o tempo em (*a*) é, aproximadamente, $\sqrt{2H/g}$.

5.100. (*a*) Prove que, se um objeto é deixado cair sobre a superfície da Terra de uma altura H, e se a resistência do ar for negligenciada, ele baterá na Terra com uma velocidade m módulo $v = \sqrt{2gRH/(R+H)}$ onde R é o raio da Terra.
(*b*) Calcule a velocidade em módulo no item (*a*) para os casos em que $H = 160$ quilômetros e $H = 16\,000$ quilômetros. Considere que o raio da Terra seja 6 400 quilômetros.

5.101. Ache o tempo gasto, pelo objeto do probl. 5.100, para alcançar a superfície terrestre nos dois casos.

5.102. Qual deve ser a lei da força, se a velocidade em módulo de uma partícula em um campo de força central for proporcional a r^{-n}, onde n é uma constante?

5.103. Qual é a velocidade que uma nave espacial deve ter para manter-se em uma órbita em torno da Terra a uma distância de (*a*) 320 quilômetros, (*b*) 3 200 quilômetros acima da superfície terrestre?

5.104. Um objeto é atirado para cima da superfície terrestre com velocidade v_0. Considere que ela retorne à Terra e que a resistência do ar seja negligenciável. Ache sua velocidade de retorno.

5.105. (*a*) Qual é o trabalho realizado por uma nave espacial de massa m, movendo-se uma distância a acima da superfície terrestre para uma outra distância b? (*b*) O trabalho depende da trajetória? Explique. *Resp.* (*a*) $GmM(a-b)/ab$

5.106. (*a*) Prove que é possível para uma partícula mover-se em um círculo de raio a em um campo de força central qualquer, cuja lei de força seja $f(r)$.
(*b*) Considere que a partícula do item (*a*) seja deslocada ligeiramente de sua órbita circular. Prove que ela retornará à órbita, i.e., o movimento é *estável*, se

$$a\,f'(a) + 3\,f(a) > 0$$

mas é instável, se não for verificado isto.
(*c*) Ilustre o resultado em (*b*), considerando $f(r) = 1/r^n$ e decida para qual valor de n a estabilidade deve ocorrer.
Resp. (*c*) Para $n < 3$ há estabilidade.

5.107. Se a Lua for retida subitamente em sua órbita, quanto tempo ela levaria para cair na Terra, supondo que a Terra permaneça em repouso?
Resp. Cerca de 4 dias e 18 horas

5.108. Se a Terra for subitamente retida em sua órbita, quanto tempo ela levaria para cair no Sol? *Resp.* Cerca de 65 dias.

5.109. Faça o probl. 5.34 usando os métodos de energia.

5.110. Ache a velocidade de escape para um objeto na superfície da Lua. Use o fato de que a aceleração devida à gravidade na superfície da Lua é, aproximadamente, 1/6 da gravidade na superfície da Terra e que o raio da Lua é, aproximadamente, 1/4 do raio da Terra. *Resp.* 2,4 km/s.

5.111. Um objeto é deixado cair por um orifício aberto na direção e passando pelo centro da Terra. Considere que a resistência ao movimento seja negligenciável, mostre que a magnitude da velocidade da partícula quando ela passar pelo centro da Terra é um pouco menor que 8 km/s. [*Sugestão*: Use o probl. 5.40].

5112. No probl. 5.111, mostre que o tempo gasto para que o objeto retorne é, aproximadamente de 85 minutos.

5.113. Faça os probls. 5.111 e 5.112, considerando que o furo seja reto, mas não passe pelo centro da Terra.

5.114. Discuta a relação entre os resultados dos probls. 5.111 e 5.112 e do probl. 5.39.

5.115. Como se explicará o fato de que a Terra tem atmosfera e a Lua não?

5.116. Prove o teorema 5.1.

5.117. Discuta o teorema 5.1, quando as esferas se interseccionam.

5.118. Explique como se pode usar o resultado do probl. 5.27 para achar a força de atração de uma esfera sólida sobre uma partícula.

5.119. Ache a força de atração entre o anel circular uniforme de raio externo a e raio interno b e uma massa m, localizada em seu eixo, a uma distância b do seu centro.

5.120. Duas naves espaciais se movem em torno da Terra, na mesma trajetória elíptica de excentricidade ε. Se elas estão separadas de uma pequena distância D no perigeu, prove que, no apogeu, elas estarão separadas pela distância $D(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$.

5.121. (*a*) Explique como se poderia calcular a velocidade de escape de um planeta.
(*b*) Use esse método para calcular a velocidade de escape de Marte.
Resp. (*b*) 5 km/s.

5.122. Faça o probl. 5.121 para (*a*) Júpiter, (*b*) Vênus.
Resp. (*a*) aproximadamente 51 km/s, (*b*) 10 km/s.

5.123. Três hastes finas e infinitamente longas, tendo a mesma massa por unidade de comprimento, estão no mesmo plano e formam um triângulo. Prove que a força de atração sobre uma partícula será nula, se, e somente se, a partícula estiver localizada na intersecção das medianas do triângulo.

5.124. Ache a força de atração entre uma haste uniforme de comprimento a e uma

esfera de raio b, se elas não se interseccionam e a linha da haste passa pelo centro.

5.125. Faça o probl. 5.124, se a haste estiver situada de tal modo que uma linha traçada do centro e perpendicular à linha da haste divida-a ao meio.

5.126. Um satélite de raio a gira em uma órbita circular em torno de um planeta de de raio b com período P. Se a menor distância entre suas superfícies é c, prove que a massa do planeta é $4\pi^2(a + b + c)^3/GP^2$.

5.127. Sabendo-se que a Lua está, aproximadamente, a 380 000 km da Terra e faz uma revolução completa em torno da Terra em 27,3 dias aproximadamente, ache a massa da Terra. *Resp.* 6×10^{24} kg.

5.128. Discuta a relação do probl. 5.126 com a terceira lei de Kepler.

5.129. Prove que o único campo de força central $\mathbf{F}$, cujo divergente seja nulo, é um um campo de força inverso do quadrado.

5.130. Faça o probl. 5.32, usando a integração tripla.

5.131. Um cilindro reto, sólido e uniforme tem um raio a e uma altura H. Uma partícula de massa m é colocada na extensão do eixo do cilindro de modo que ela esteja a uma distância D de sua extremidade. Prove que a força de atração é dirigida ao longo do eixo e é dada em magnitude por

$$\frac{2GMm}{a^2H}\{H + \sqrt{a^2 + D^2} - \sqrt{a^2 + (D + H)^2}\}$$

5.132. Considere que o cilindro do probl. 5.131 tem um dado volume. Prove que a força de atração, quando a partícula está no centro de uma das extremidades do cilindro, é máxima quando $a/H = \frac{1}{8}(9 - \sqrt{17})$.

5.133. Faça (*a*) o probl. 5.26 e (*b*) o probl. 5.27 supondo uma lei de atração inversa do cubo.

5.134. Os resultados dos probls. 5.29 e 5.30 aplicam-se, se houver uma lei de atração inversa do cubo? Explique.

5.135. Qual seria a velocidade de escape do pequeno planeta do probl. 5.80?

5.136. Uma casca esférica de raio interno a e raio externo b tem uma densidade constante σ. Prove que o potencial gravitacional $V(r)$ a uma distância r do centro é dada por

$$V(r) = \begin{cases} 2\pi\sigma(b^2 - a^2) & r < a \\ 2\pi\sigma(b^2 - \frac{1}{3}r^2) - 4\pi\sigma a^3/3r & a < r < b \\ 4\pi\sigma(b^3 - a^3)/3r & r > b \end{cases}$$

5.137. Se a *teoria da relatividade de Einstein* for levada em conta, a equação diferencial para a órbita de um planeta fica

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{K}{mh^2} + \gamma u^2$$

onde $\gamma = 3K/mc^2$, sendo c a velocidade da luz. (*a*) Prove que, se os eixos fossem escolhidos aproximadamente, então a posição r do planeta pode ser determinada aproximadamente de

$$r = \frac{K/mh^2}{1 + \varepsilon\cos\alpha\theta}, \quad \text{onde} \quad \alpha = 1 - \gamma K/mh^2$$

(*b*) Use (*a*) para mostrar que um planeta se move realmente em uma trajetória elíptica, mas que esta elipse gira lentamente no espaço, sendo a razão de rotação angular $2\pi\gamma K/mh^2$. (*c*) mostre que, no caso de Mercúrio, esta rotação é de 43 segundos de arco por século. Isto foi realmente observado, assim fornecendo uma prova experimental da validez da teoria da relatividade.

5.138. Ache a posição de um planeta em sua órbita em torno do Sol como função do tempo t, medida a partir de onde ele esteja mais distante do Sol.

5.139. No apogeu de 320 km da superfície da Terra, duas naves espaciais na mesma trajetória elíptica estão distantes entre si de 150 m. Qual será está distância, no perigeu de 240 km, supondo que elas não alterem suas trajetórias?

5.140. Uma partícula de massa m está localizada sobre uma linha perpendicular pelo centro de uma placa retangular de lados $2a$ e $2b$ e a uma distância D do seu centro. Prove que a força de atração da placa sobre a partícula é dada em magnitude por

$$\frac{GMm}{ab}\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{ab}{\sqrt{(a^2 + D^2)(b^2 + D^2)}}\right)$$

5.141. Ache a força de atração de uma placa infinita e uniforme de espessura negligenciável e densidade σ sobre uma partícula a uma distância D dela.
Resp. $2\pi\sigma\, Gm$

5.142. Os pontos onde $\dot{r} = 0$ são chamados de *apses*. (*a*) Prove que os apses de um campo de força central, com potencial $V(r)$ e energia total, E, são raízes da equação $V(r) + h^2/2r^2 = E$. (*b*) Ache os apses correspondentes ao campo de força inverso do quadrado, mostrando que há dois, um ou nenhum de acordo com a órbita, sendo ela elipse, hipérbole ou parábola.

5.143. Uma partícula movendo-se em um campo de força central percorre uma trajetória que é a ciclóide $r = a(1 - \cos\theta)$. Ache a lei da força.
Resp. Inversa da quarta potência de r.

5.144. Ache as equações do movimento de uma partícula em um campo de força central considerando que o meio oferece uma resistência proporcional à magnitude da velocidade instantânea da partícula.

5.145. Um satélite tem a máxima e mínima magnitudes de velocidade dadas por v_{max} e v_{min}, respectivamente. Prove que a excentricidade da órbita na qual o satélite se move é igual a $\dfrac{v_{max} - v_{min}}{v_{max} + v_{min}}$.

5.146. Prove que, se o satélite do probl. 5.145 tem um período igual a τ, então ele se move em uma trajetória elíptica, tendo um eixo maior cujo comprimento é

$$\frac{\tau}{\pi}\sqrt{v_{max}\, v_{min}}.$$

Capítulo 6

Sistemas de Coordenadas em Movimento

SISTEMAS DE COORDENADAS NÃO INERCIAIS

Nos capítulos precedentes, os sistemas de coordenadas usados para descrever os movimentos da partícula foram supostos como sendo inerciais. Em muitos usos práticos de importância, entretanto, esta hipótese não pode ser garantida. Por exemplo, um sistema de coordenadas fixado na Terra não é um sistema inercial, pois a Terra está girando no espaço. Consequentemente, ao usar-se este sistema de coordenadas para descrever o movimento de uma partícula relativamente à Terra, obtém-se resultados que podem estar em erro. Portanto, deve-se considerar o movimento de partículas relativamente a sistemas de coordenadas móveis.

SISTEMAS DE COORDENADAS GIRANTES

Na fig. 6-1, seja XYZ um sistema de coordenadas inercial com origem O, que se considera fixa ao espaço. Seja o sistema de coordenadas xyz, tendo a mesma origem O, e que esteja girando em relação ao sistema XYZ.

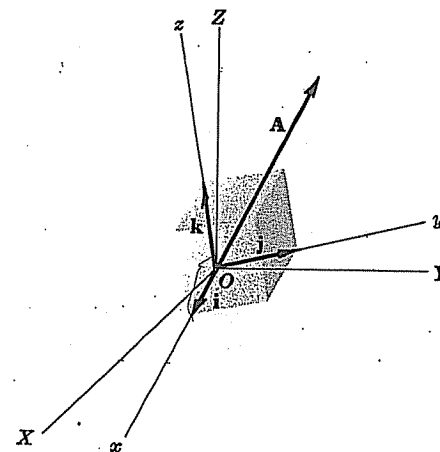



Fig. 6-1

Considere um vetor **A** que está mudando com o tempo. Para um observador fixo relativamente ao sistema xyz, a razão da mudança de $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ pelo tempo é achada por

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M \quad \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} \tag{1}$$

onde o subscrito M indica a derivada no sistema em movimento (xyz).

Entretanto, a razão de mudança de **A** pelo tempo relativamente ao sistema fixo xyz simbolizada pelo subscrito F é achada por (veja probl. 6.1).

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \omega \times \mathbf{A} \tag{2}$$

onde ω é chamado de *velocidade angular* do sistema xyz, com relação ao sistema XYZ.

OPERADORES DIFERENCIAIS

Sejam D_F e D_M representantes dos operadores diferenciais em relação ao tempo, nos sistemas fixo e em movimento, respectivamente. Então, pode-se escrever a equivalência de operadores

$$D_F \equiv D_M + \omega \times \tag{3}$$

Este resultado é útil em derivadas de altas ordens nos sistemas fixos e em movimento. Veja o probl. 6.6.

VELOCIDADE EM UM SISTEMA EM MOVIMENTO

Se, em particular, o vetor **A** é o vetor posição **r** de uma partícula, então de (2) tem-se

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M + \omega \times \mathbf{r} \tag{4}$$

ou

$$D_F = D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r} \tag{5}$$

Podendo escrever

$\mathbf{v}_{P|F} = d\mathbf{r}/dt\,|_F = D_F\mathbf{r}$ = velocidade da partícula P, relativamente ao sistema fixo.

$\mathbf{v}_{P|M} = d\mathbf{r}/dt\,|_M = D_M\mathbf{r}$ = velocidade da partícula P, relativamente ao sistema em movimento.

$\mathbf{v}_{M|F} = \omega \times \mathbf{r}$ = velocidade do sistema em movimento, relativamente ao sistema fixo.

Então (4) ou (5) podem ser escritos

$$\mathbf{v}_{P|F} = \mathbf{v}_{P|M} + \mathbf{v}_{M|F}. \tag{6}$$

ACELERAÇÃO EM UM SISTEMA EM MOVIMENTO

Se $D_F^2 = d^2/dt^2|_F$ e $D_M^2 = d^2/dt^2|_M$ são operadores de derivada de segunda ordem com relação a t nos sistemas fixo e em movimento respectivamente, então, pela aplicação de (3), obtém-se [veja o probl. 6.6]

$$D_F^2\mathbf{r} = D_M^2\mathbf{r} + (D_M\omega) \times \mathbf{r} + 2\omega \times D_M\mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{7}$$

Podendo escrever

$\mathbf{a}_{P|F} = d^2\mathbf{r}/dt^2\,|_F = D_F^2\mathbf{r}$ = aceleração da partícula P, relativamente ao sistema fixo.

$\mathbf{a}_{P|M} = d^2\mathbf{r}/dt^2\,|_M = D_M^2\mathbf{r}$ = aceleração da partícula P, relativamente ao sistema em movimento.

$\mathbf{a}_{M|F} = (D_M\omega) \times \mathbf{r} + 2\omega \times D_M\mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$
= aceleração do sistema em movimento relativamente ao sistema fixo.

Então, (7) pode ser escrito

$$\mathbf{a}_{P|F} = \mathbf{a}_{P|M} + \mathbf{a}_{M|F}. \tag{8}$$

ACELERAÇÃO DE CORIOLIS E CENTRÍPETA

Os dois últimos termos à direita de (7) podem ser chamados de *aceleração Coriolis* e *aceleração centrípeta*, respectivamente, i.e.,

$$\text{Aceleração Coriolis} = 2\omega \times D_M\mathbf{r} = 2\omega \times \mathbf{v}_M \tag{9}$$

$$\text{Aceleração centrípeta} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{10}$$

o segundo termo à direita de (7) é, algumas vezes, chamado de *aceleração linear*, i.e.,

$$\text{Aceleração Linear} = (D_M\omega) \times \mathbf{r} = \left(\left.\frac{d\omega}{dt}\right|_M\right) \times \mathbf{r} \tag{11}$$

e $D_M\omega$ é chamado de *aceleração angular*. Em muitos casos práticos de importância (por exemplo, a rotação da Terra), ω é constante e $D_M\omega = 0$.

A relação $-\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ é, geralmente, chamada de *aceleração centrífuga*.

MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA EM RELAÇÃO À TERRA

A segunda lei de Newton é aplicável somente a sistemas inerciais. Entretanto, usando (7) obtém-se um resultado válido para sistemas não inerciais. Isto sob a forma

$$mD_M^2\mathbf{r} = \mathbf{F} - m(D_M\omega) \times \mathbf{r} - 2m(\omega \times D_M\mathbf{r}) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{12}$$

onde **F** é a resultante de todas as forças atuantes sobre a partícula como é visto pelo observador no sistema fixo ou inercial.

Na prática, é de interesse expressar as equações de movimento em termos de quantidades determinadas por um observador fixo na Terra (ou outro sistema em movimento). Em tal caso, pode-se omitir o subscrito M e escrever (12) como

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})] \tag{13}$$

Para o caso da Terra girando com uma constante angular ω em torno de seu eixo, $\dot{\omega} = 0$ e (13) fica

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})]. \quad (14)$$

FORÇA DE CORIOLIS E CENTRÍPETA

Referindo-se às equações (13) ou (14), usa-se a seguinte terminologia:

$$\text{Força de Coriolis} = 2m(\omega \times \dot{\mathbf{r}}) = 2m(\omega \times \mathbf{v})$$
$$\text{Força centrípeta} = m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$
$$\text{Força centrífuga} = -m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})]$$

SISTEMAS DE COORDENADAS EM MOVIMENTO GENERALIZADO

Nos resultados acima, foi admitido que os sistemas de coordenadas xyz e XYZ [veja a fig. 6-1] têm uma origem O em comum. No caso em que eles não tiverem uma origem em comum, os resultados são facilmente obtidos daqueles já considerados.

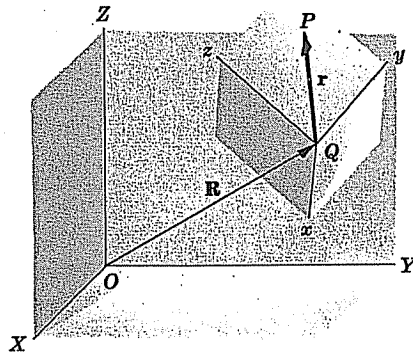



Fig. 6-2

Considere que $\mathbf{R}$ é o vetor posição da origem Q relativamente à origem O [veja fig. 6-2]. Então, se $\dot{\mathbf{R}}$ e $\ddot{\mathbf{R}}$ representam a velocidade e aceleração de Q relativamente a O, as equações (5) e (7) são substituídas, respectivamente, por

$$D_F\mathbf{r} = \dot{\mathbf{R}} + D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}$$
$$= \dot{\mathbf{R}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r} \quad (15)$$

e

$$D_F^2\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{R}} + D_M^2\mathbf{r} + (D_M\omega) \times \mathbf{r} + 2\omega \times D_M\mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r})$$
$$= \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + 2\omega \times \mathbf{v} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (16)$$

Igualmente, a equação (14) é substituída por

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})] - m\ddot{\mathbf{R}}. \quad (17)$$

O PÊNDULO DE FOUCAULT

Considere um pêndulo simples consistindo em um fio longo e um bulbo pesado, suspensos verticalmente por um suporte sem atrito. Considere que o bulbo seja tirado de sua posição de equilíbrio e que seja livre de oscilar em qualquer plano vertical. Então, devido à rotação da Terra, o plano no qual o pêndulo balança precessará em torno de um eixo vertical. No hemisfério norte, esta precessão tem um sentido horário se olharmos para a superfície da Terra. No hemisfério sul, a precessão é de sentido anti-horário.

Tal pêndulo usado para detetar a rotação da Terra foi, pela primeira vez, empregado por *Foucault* em 1851 e é chamado *pêndulo de Foucault*.

Problemas Resolvidos

SISTEMAS DE COORDENADAS GIRANTES

6.1. Um observador em um ponto fixo relativamente a um sistema de coordenadas xyz com origem O [veja a fig. 6-1] observa um vetor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ e calcula sua derivada em relação ao tempo como sendo $\frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$. Mais tarde, ele acha que o seu sistema de coordenadas está girando em relação ao sistema de coordenadas XYZ que está fixo no espaço e tendo origem também em O. Ele pergunta: "Qual seria a derivada em relação ao tempo de $\mathbf{A}$ para um observador que está fixo em relação ao sistema de coordenadas XYZ?"

Se $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F$ e $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M$ representam, respectivamente, as derivadas de $\mathbf{A}$ relativamente aos sistemas fixo e em movimento, mostre que existe um vetor ω tal que

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \omega \times \mathbf{A}.$$

Para um observador fixo, os vetores unitários $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ mudam realmente com o tempo. Assim, tal observador achará uma derivada em relação ao tempo

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k} + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (1)$$

i.e.,

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (2)$$

Como $\mathbf{i}$ é um vetor unitário, $d\mathbf{i}/dt$ é perpendicular a $\mathbf{i}$ e deve estar no plano de $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Então,

$$d\mathbf{i}/dt = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}. \quad (3)$$

Igualmente,

$$d\mathbf{j}/dt = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i} \quad (4)$$

$$d\mathbf{k}/dt = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j}. \quad (5)$$

Como $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} = 0$, por diferenciação tem-se $\mathbf{i}\,.\,\dfrac{d\mathbf{j}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j} = 0$. Mas $\mathbf{i}\,.\,\dfrac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_4$ de (4) e $\dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{j} = \alpha_1$ de (3). Assim, $\alpha_4 = -\alpha_1$.

Igualmente, de $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i}\,.\,\dfrac{d\mathbf{k}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{i}}{dt}\,.\,\mathbf{k} = 0$ e $\alpha_5 = -\alpha_2$; de $\mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j}\,.\,\dfrac{d\mathbf{k}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{j}}{dt}\,.\,\mathbf{k} = 0$ e $\alpha_6 = -\alpha_3$. Então,

$$d\mathbf{i}/dt = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k},\quad d\mathbf{j}/dt = \alpha_3\mathbf{k} - \alpha_1\mathbf{i},\quad d\mathbf{k}/dt = -\alpha_2\mathbf{j} - \alpha_3\mathbf{j}.$$

Segue-se que

$$A_1\frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2\frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3\frac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_2A_2 - \alpha_2A_3)\mathbf{i} + (\alpha_1A_1 - \alpha_3A_3)\mathbf{j} + (\alpha_2A_1 + \alpha_3A_2)\mathbf{k}, \quad (6)$$

o que pode ser escrito como

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Então, escolhendo-se $\alpha_3 = \omega_1$, $-\alpha_2 = \omega_2$, $\alpha_1 = \omega_3$, este determinante fica

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

onde $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$.

De (2) e (6) acha-se, como foi pedido,

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}.$$

O vetor $\boldsymbol{\omega}$ é a *velocidade angular* do sistema em movimento relativamente ao sistema fixo.

6.2. Sejam D_F e D_M os operadores simbólicos da derivada em relação ao tempo no sistema fixo e em movimento, respectivamente. Demonstre a equivalência de operadores

$$D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega}\,\times.$$

Pela definição

$$D_F\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_F = \text{derivada no sistema fixo.}$$

$$D_M\mathbf{A} = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_M = \text{derivada no sistema em movimento.}$$

Então, do probl. 6.1,

$$D_F\mathbf{A} = D_M\mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = (D_M + \boldsymbol{\omega}\,\times)\mathbf{A}.$$

o que mostra a equivalência dos operadores $D_F \equiv D_M + \boldsymbol{\omega}\,\times$.

6.3. Prove que a aceleração angular é a mesma em ambos os sistemas de coordenadas XYZ e xyz.

Seja $\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$ no probl. 6.1, Então,

$$\left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left.\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right|_M$$

Como $d\boldsymbol{\omega}/dt$ é a aceleração angular, a afirmação pedida está provada.

VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM SISTEMAS EM MOVIMENTO

6.4. Determine a velocidade de uma partícula em movimento vista pelos dois observadores no probl. 6.1.

Repondo $\mathbf{A}$ pelo vetor posição $\mathbf{r}$ da partícula, tem-se

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1)$$

Se $\mathbf{r}$ for representado em termos dos vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ do sistema de coordenadas em movimento, então a velocidade da partícula relativamente a este sistema é, tirando-se o subscrito M.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \quad (2)$$

e a velocidade da partícula relativamente ao sistema fixo é, de (1),

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (3)$$

A velocidade (3) é, algumas vezes, chamada de *velocidade real*, enquanto (2) é a *velocidade aparente*.

6.5. Um sistema de coordenadas xyz está girando em relação a um sistema de coordenadas XYZ, tendo a mesma origem e sendo admitido como fixo no espaço [i.e., ele é um sistema inercial]. A velocidade angular do sistema xyz relativamente ao sistema XYZ é dada por $\boldsymbol{\omega} = 2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 4)\mathbf{k}$, onde t é o tempo. O vetor posição de uma partícula no instante t observada do sistema xyz é dada por $\mathbf{r} = (t^2 + 1)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}$. Ache (*a*) a velocidade aparente e (*b*) a velocidade real em um instante $t = 1$.

(*a*) A velocidade aparente, em um instante qualquer t, é

$$d\mathbf{r}/dt = 2t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}$$

No instante $t = 1$, ela é $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$.

(*b*) a velocidade real, em um instante qualquer t, é

$$d\mathbf{r}/dt + \omega \times \mathbf{r} = (2t\mathbf{j} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}) + [2t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (2t + 4)\mathbf{k}] \times [(t^2 + 1)\mathbf{i} - 6t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k}]$$

No instante $t = 1$, ela é

$$2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 34\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

6.6. Determine a aceleração da partícula em movimento vista pelos dois observadores no probl. 6.1.

A aceleração da partícula vista pelo observador no sistema fixo XYZ é $D_F^2\mathbf{r} = D_F(D_F\mathbf{r})$. Usando a equivalência de operadores estabelecida no probl. 6.2, tem-se

$$\begin{aligned} D_F(D_F\mathbf{r}) &= D_F(D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}) \\ &= (D_M + \omega \times)(D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}) \\ &= D_M(D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}) + \omega \times (D_M\mathbf{r} + \omega \times \mathbf{r}) \\ &= D_M^2\mathbf{r} + D_M(\omega \times \mathbf{r}) + \omega \times D_M\mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

ou como $D_M(\omega \times \mathbf{r}) = D_M\omega) \times \mathbf{r} + \omega \times (D_M\mathbf{r})$,

$$D_F^2\mathbf{r} = D_M^2\mathbf{r} + (D_M\omega) \times \mathbf{r} + 2\omega \times (D_M\mathbf{r}) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \qquad (1)$$

Se $\mathbf{r}$ é o vetor posição representado em termos de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ do sistema de coordenadas em movimento, então a aceleração da partícula relativamente a este sistema é, tirando-se o subscrito M,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \qquad (2)$$

A aceleração da partícula relativamente ao sistema fixo é, tirada de (1),

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + 2\omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \qquad (3)$$

A aceleração (3) é, algumas vezes, chamada de *aceleração real*, enquanto (2) é a *aceleração aparente*.

6.7. Ache (*a*) a aceleração aparente e (*b*) a aceleração real da partícula no probl. 6.5.

(*a*) A aceleração aparente em um instante qualquer t é

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(2t\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12t^2\mathbf{k}) = 2\mathbf{i} + 24t\mathbf{k}.$$

No instante $t = 1$, isto vale $2\mathbf{i} + 24\mathbf{k}$.

(*b*) A aceleração real, em um instante qualquer t, é

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

No instante $t = 1$, isto vale

$$\begin{aligned} &2\mathbf{i} + 24\mathbf{k} + (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \\ &\quad + (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ &\quad + (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times \{(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})\} \\ &= 2\mathbf{i} + 24\mathbf{k} + (48\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 20\mathbf{k}) + (4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) + (-14\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) \\ &= 40\mathbf{i} + 184\mathbf{j} + 36\mathbf{k} \end{aligned}$$

ACELERAÇÃO DE CORIOLIS E CENTRÍPETA

6.8. Referindo-se ao probl. 6.5, ache (*a*) a aceleração de Coriolis, (*b*) a aceleração centrípeta e (*c*) seus valores no instante $t = 1$.

(*a*) Do probl. 6.5, tem-se

$$\text{Aceleração de Coriolis} = 2\omega \times d\mathbf{r}/dt = (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) = 48\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 20\mathbf{k}$$

(*b*) do probl. 6.5, tem-se

$$\text{Aceleração centrípeta} = \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (32\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}) = -14\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$$

(*c*) Das partes (*a*) e (*b*), tem-se

$$\text{Magnitude da aceleração de Coriolis} = \sqrt{(48)^2 + (-24)^2 + (-20)^2} = 4\sqrt{205}$$

$$\text{Magnitude da aceleração centrípeta} = \sqrt{(-14)^2 + (212)^2 + (40)^2} = 2\sqrt{11.685}$$

MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA RELATIVAMENTE À TERRA

6.9. (*a*) Exprima a segunda lei de Newton para o movimento de uma partícula relativamente a um sistema de coordenadas xyz fixo no espaço (sistema inercial). (*b*) Use (*a*) para achar a equação do movimento da partícula relativamente a um sistema xyz, tendo a mesma origem que a do sistema XYZ, mas girando em relação a ele.

(*a*) Se m é a massa da partícula (assumida constante), $d^2\mathbf{r}/dt^2|_F$ sua aceleração no sistema fixo e $\mathbf{F}$ a resultante de tôdas as fôrças atuantes sôbre a partícula vista pelo sistema fixo, então a segunda lei de Newton diz que

$$m\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F = \mathbf{F}. \qquad (1)$$

(*b*) Usando o subscrito *M* para indicar as variáveis sob o ponto de vista do sistema em movimento, tem-se do problema 6.6,

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_M + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + 2\omega \times \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \quad (2)$$

Substituindo isto em (1), acha-se a equação pedida

$$m\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_M = \mathbf{F} - m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\left(\omega \times \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M\right) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})]. \quad (3)$$

Pode-se tirar o subscrito *M*, pois é bem claro que todas as variáveis, exceto **F** são determinadas por um observador no sistema em movimento. A variável **F**, isto deve ser enfatizado, é a fôrça resultante observada do sistema fixo ou inercial. Se remover o subscrito *M* e escrever $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, então (3) pode ser escrita

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})]. \quad (4)$$

6.10. Calcule a velocidade angular da Terra em torno de seu eixo.

Como a Terra faz uma revolução (2π radiano) em torno de seu eixo em, aproximadamente, 24 horas = 86.400 s., a velocidade angular em módulo é

$$\omega = \frac{2\pi}{86{,}400} = 7{,}27 \times 10^{-5} \text{ rad/s.}$$

O tempo real para uma revolução é próximo de 86.164 s e a velocidade angular em módulo é $7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s.

SISTEMAS DE COORDENADAS EM MOVIMENTO GENERALIZADO

6.11. Faça o probl. 6.4, considerando que a origem dos sistemas *XYZ* e *xyz* não coincidam.

Seja **R** o vetor posição da origem *Q* do sistema *xyz* relativamente à origem *O* do sistema *XYZ* fixo (ou inercial), [veja a fig. 6-3]. A velocidade da partícula *P* relativamente ao sistema em movimento é, como foi visto,

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_M = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (1)$$

Portanto, o vetor de posição *P* relativamente a *O* é $\rho = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ e, assim, a velocidade de *P* sob o ponto de vista do sistema *XYZ* é

$$\frac{d\rho}{dt} = \left.\frac{d}{dt}(\mathbf{R} + \mathbf{r})\right|_F = \left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_F + \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_F = \dot{\mathbf{R}} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega \times \mathbf{r} \quad (2)$$

usando a equação (3) do probl. 6.4. Note que $\dot{\mathbf{R}}$ é a velocidade de *Q* em relação a *O*. Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, isto se reduz ao resultado do probl. 6.4.

6.12. Faça o probl. 6.6 considerando que as origens dos sistemas *XYZ* e *xyz* não coincidam.

Referindo-se à fig. 6-3, a aceleração da partícula *P* relativamente ao sistema em movimento é, como foi visto,

$$\left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_M = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}. \quad (1)$$

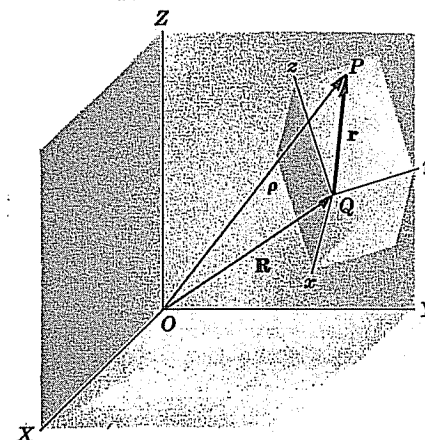



Fig. 6-3

Como o vetor posição de *P* relativamente a *O* é $\rho = \mathbf{R} + \mathbf{r}$, a aceleração de *P* sob o ponto de vista do sistema *XYZ* é

$$\left.\frac{d^2\rho}{dt^2}\right|_F = \left.\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{R} + \mathbf{r})\right|_F = \left.\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right|_F + \left.\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|_F$$

$$= \ddot{\mathbf{R}} + \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} + 2\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \quad (2)$$

usando a equação (3) do probl. 6.6. Note que $\ddot{\mathbf{R}}$ é a aceleração de *Q* em relação a *O*. Se $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ isto reduz-se ao resultado do probl. 6.6.

6.13. Faça o probl. 6.9, considerando que as origens dos sistemas *XYZ* e *xyz* não coincidam.

(*a*) O vetor posição da partícula relativamente ao sistema fixo (*XYZ*) é ρ. Então, a equação do movimento pedida é

$$m\left.\frac{d^2\rho}{dt^2}\right|_F = \mathbf{F}. \quad (1)$$

(*b*) Usando o resultado (2) do probl. 6.12 em (1), obtém-se

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{R}} - m(\dot{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})], \quad (2)$$

onde **F** é a fôrça atuante sobre *m*, vista pelo sistema inercial e onde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

6.14. Ache a equação do movimento de uma partícula relativamente a um observador sobre a superfície da Terra.

Supõe-se que a Terra seja uma esfera, com centro em O (fig. 6-4) girando em torno do eixo Z com velocidade angular $\omega = \omega\mathbf{K}$. Usando-se também o fato de que o efeito da rotação da Terra em torno do Sol é negligenciável, assim o sistema XYZ pode ser tomado como um sistema inercial.

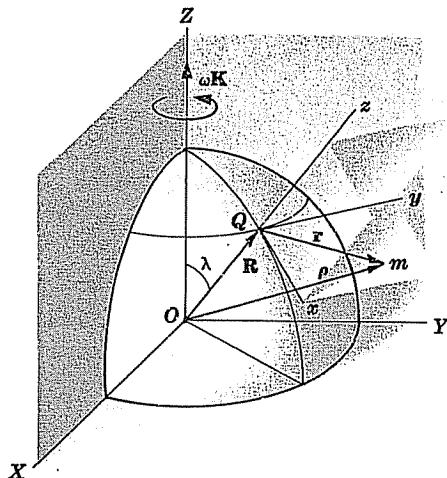



Fig. 6-4

Então, pode-se usar a equação (2) do probl. 6.12. Para o caso da Terra, tem-se

$$\dot{\omega} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) \tag{2}$$

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{\rho^3}\rho \tag{3}$$

a primeira equação é tirada do fato de que a rotação da Terra em torno de seu eixo tem uma velocidade angular constante, a segunda é tirada do fato de que a aceleração da origem Q relativamente a O é a aceleração centrípeta, e a terceira é tirada da lei da gravitação de Newton. Usando-se estas equações em (2) do probl. 6.12, acha-se a equação pedida,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{\rho^3}\rho - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}) - 2(\omega \times \mathbf{v}) - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{4}$$

admitindo que outras forças atuantes sobre m (como a resistência do ar etc.) sejam negligenciáveis.

Pode-se definir

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{\rho^3}\rho - \omega \times (\omega \times \mathbf{R}), \tag{5}$$

pois a aceleração é devida à gravidade; assim, (4) fica

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\omega \times \mathbf{v}) - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}). \tag{6}$$

Perto da superfície da Terra, o último termo de (6) pode ser negligenciado, com um alto grau de aproximação.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\omega \times \mathbf{v}). \tag{7}$$

Na prática, acha-se $\mathbf{g}$ como uma constante em magnitude, embora ela varie ligeiramente sobre a superfície da Terra. Se houver outras fôrças externas atuando, deve-se adicioná-las ao lado direito das equações (6) ou (7).

6.15. Mostre que, se a partícula do probl. 6.14 se move perto da superfície da Terra, então as equações do movimento são dadas por

$$\ddot{x} = 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}$$
$$\ddot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{z})$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{y}$$

onde o ângulo λ é a *co-latitude* [veja a fig. 6-4] e $90° - \lambda$ é a *latitude.*

Da fig. 6-4, tem-se

$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$= (-\text{sen}\,\lambda)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + (\cos\lambda)\mathbf{k} = -\text{sen}\,\lambda\,\mathbf{i} + \cos\lambda\,\mathbf{k}$$

e, assim,

$$\omega = \omega\mathbf{K} = -\omega\,\text{sen}\,\lambda\,\mathbf{i} + \omega\cos\lambda\,\mathbf{k}$$

Então,

$$\omega \times \mathbf{v} = \omega \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k})$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\omega\,\text{sen}\,\lambda & 0 & \omega\cos\lambda \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$
$$= (-\omega\cos\lambda\,\dot{y})\mathbf{i} + (\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{z})\mathbf{j} - (\omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{y})\mathbf{k}$$

Assim, da equação (7) do probl. 6.14 tem-se

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\omega \times \mathbf{v})$$
$$= -g\mathbf{k} + 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}\,\mathbf{i} - 2(\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{z})\mathbf{j} + 2\omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{y}\,\mathbf{k}.$$

Equacionando os coeficientes correspondentes de **i**, **j** e **k** de ambos os lados desta equação acha-se, como foi pedido,

$$\ddot{x} \quad 2\omega\cos\lambda\,\dot{y} \tag{1}$$
$$\ddot{y} = -2(\omega\cos\lambda\,\dot{x} + \omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{z}) \tag{2}$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega\,\text{sen}\,\lambda\,\dot{y} \tag{3}$$

6.16. Um objeto da massa m inicialmente em repouso é solto sobre a superfície da Terra de uma altura pequena comparada com o raio terrestre. Suponha que o módulo da velocidade angular da Terra em torno do seu eixo é uma constante ω; prove que, após o tempo t, o objeto é desviado para o leste da vertical de $\frac{1}{3}\omega g t^3$ sen λ.

Método 1

Admite-se que o objeto esteja no eixo z em $x = 0$, $y = 0$, $z = h$ [veja a fig. 6-4]. Das equações (1) e (2) do probl. 6.15 tem-se, por integração,

$$\dot{x} = 2\omega \cos\lambda\, y + c_1, \qquad \dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) + c_2 .$$

Como em $t = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = 0, x = 0, y = 0, z = h$, tem-se $c_1 = 0, c_2 = 2\omega \operatorname{sen}\lambda h$. Então,

$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda y, \qquad \dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\, \dot{x} + \omega \operatorname{sen}\lambda z) + 2\omega \operatorname{sen}\lambda h. \tag{1}$$

Então, (3) do probl. 6.15 fica

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, \dot{y} = -g - 4\omega^2 \operatorname{sen}\lambda[\cos\lambda\, x + \operatorname{sen}\lambda(z-h)]$$

Mas, como os termos da direita que envolvendo ω^2 são muito pequenos em comparação com $-g$, pode-se desprezá-los e escrever $\ddot{z} = -g$. Por integração obtém-se $\dot{z} = -gt + c_3$. Como $\dot{z} = 0$ em $t = 0$, tem-se $c_3 = 0$ ou

$$\dot{z} = -gt \tag{2}$$

Usando a equação (2) e a primeira equação de (1) na equação (2) do probl. 6.15, acha-se

$$\ddot{y} = (-2\omega\cos\lambda)(2\omega\cos\lambda\, y) + (-2\omega \operatorname{sen}\lambda)(-gt)$$
$$= -4\omega^2\cos^2\lambda\, y + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, gt.$$

Então, negligenciando-se o primeiro termo, tem-se $\ddot{y} = 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, gt$. Integrando,

$$\dot{y} = \omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^2 + c_4 .$$

Como $\dot{y} = 0$ em $t = 0$, tem-se $c_4 = 0$ e $\dot{y} = \omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^2$. Integrando de novo,

$$y = \tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^3 + c_5 .$$

Então, como $y = 0$ em $t = 0$, $c_5 = 0$, obtem-se, como foi pedido.

$$y = \tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen}\lambda\, t^3. \tag{3}$$

Método 2

Integrando as equações (1), (2) e (3) do probl. 6.15, tem-se

$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda\, y + c_1$$
$$\dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) + c_2$$
$$\dot{z} = -gt + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, y + c_3$$

Usando o fato de que, em $t = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ e $x = 0$; $y = 0$, $z = h$, nós temos $c_1 = 0$, $c_2 = 2\omega h$ sen λ e $c_3 = 0$. Assim,

$$\dot{x} = 2\omega\cos\lambda\, y$$
$$\dot{y} = -2(\omega\cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) + 2\omega h \operatorname{sen}\lambda$$
$$\dot{z} = -gt + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, y$$

Integrando-se isso e usando as condições acima, acha-se

$$x = 2\omega\cos\lambda \int_0^t y\, du \tag{4}$$

$$y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda - 2\omega\cos\lambda \int_0^t x\, du - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t z\, du \tag{5}$$

$$z = h - \tfrac{1}{2}gt^2 + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t y\, du \tag{6}$$

Como as variáveis incógnitas estão sob o sinal de integral, estas equações são chamadas de *equações integrais*. Deverá ser usado um método chamado de *método das aproximações sucessivas* ou *método de integração* para obter a solução com uma precisão desejada. O método consiste no uso de uma primeira estimativa para x, y e z sob os sinais de integração em (4), (5) e (6) para obter uma outra estimativa melhor. Como primeira estimativa, podem ser usados os valores $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, sob os sinais de integração. Então, acha-se a segunda estimativa

$$x = 0, \qquad y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda, \qquad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Substituindo-se isto em (4), (5) e (6) e negligenciando-se os termos envolvendo ω^2, acha-se a terceira estimativa

$$x = 0, \quad y = 2\omega h t \operatorname{sen}\lambda - 2\omega \operatorname{sen}\lambda(ht - \tfrac{1}{6}gt^3) = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda, \quad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Usando-se isto em (4), (5) e (6) e negligenciando-se de novo os termos envolvendo ω^2, acha-se a quarta estimativa

$$x = 0, \qquad y = \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda, \qquad z = h - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Como esta quarta estimativa é idêntica à terceira estes resultados têm uma exatidão da ordem de ω^2, não sendo necessárias mais substituições. E, assim, é visto que a deflexão é $y = \frac{1}{3}\omega g t^3$ sen λ, como foi pedido.

6.17. Referindo-se ao probl. 6.16, mostre que um objeto que cai de uma altura h acima da superfície terrestre, baterá na superfície da Terra em um ponto a leste da vertical e a uma distância $\frac{2}{3}\omega h$ sen $\lambda\sqrt{2h/g}$.

De (2) do probl. 6.16 têm-se, por integração, $z = -\frac{1}{2}gt^2 + c$. Como $z = h$ em $t = 0$, $c = h$ e $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Então, em $z = 0$, $h = \frac{1}{2}gt^2$ ou $t = \sqrt{2h/g}$. Substituindo-se este valor de t em (3) do probl. 6.16, acha-se a distância pedida.

O PÊNDULO DE FOUCAULT

6.18. Ache a equação do movimento de um pêndulo simples, levando em conta a rotação da Terra em torno de seu eixo.

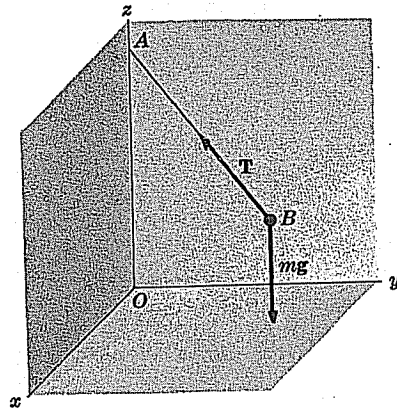



Fig. 6-5

Escolha o sistema de coordenadas da fig. 6- 5. Considere que a origem O seja a posição de equilíbrio de bulbo B; A é o ponto de suspensão e o comprimento do fio AB é l. Se a tensão no fio é $\mathbf{T}$, então têm-se

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{T}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j} + (\mathbf{T}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k}$$
$$T\cos\alpha\,\mathbf{i} + T\cos\beta\,\mathbf{j} + T\cos\gamma\,\mathbf{k}$$
$$= -T\left(\frac{x}{l}\right)\mathbf{i} - T\left(\frac{y}{l}\right)\mathbf{j} + T\left(\frac{l-z}{l}\right)\mathbf{k} \qquad (1)$$

Como a força resultante em B é $\mathbf{T} + m\,.\,\mathbf{g}$, a equação do movimento de B é dada por [veja o probl. 6.14]

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} - 2m(\omega \times \mathbf{v}) - m\omega \times (\omega \times \mathbf{r}), \qquad (2)$$

Se for negligenciado o último termo de (2) pondo $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$ e usando (1), então (2) pode ser escrito em forma de componentes como

$$m\ddot{x} = -T(x/l) + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \qquad (3)$$
$$m\ddot{y} = -T(y/l) - 2m\omega(\dot{x}\cos\lambda + \dot{z}\,\text{sen}\,\lambda) \qquad (4)$$
$$m\ddot{z} = T(l-z)/l - mg + 2m\omega\dot{y}\,\text{sen}\,\lambda \qquad (5)$$

6.19. Admitindo que o bulbo de um pêndulo simples no probl. 6.18 tendo pequenos deslocamentos em torno da posição de equilíbrio de modo que seu movimento pode ser suposto como pertencente a um plano horizontal, simplifique as equações do movimento.

Fazer-se a hipótese de que o movimento do bulbo pertença a um plano horizontal significa supor-se que $\ddot{z}$ e $\dot{z}$ sejam nulos. Para pequenos deslocamentos $(l-z)/l$ é, aproximadamente, 1. Então, a equação (5) do probl. 6.18 fica

$$0 = T - mg + 2m\omega\dot{y}\,\text{sen}\,\lambda$$

ou

$$T = mg - 2m\omega\dot{y}\,\text{sen}\,\lambda$$

Substituindo (1) nas equações (3) e (4) do probl. 6.18 e, simplificando, obtém-se

$$\ddot{x} = -\frac{gx}{l} + \frac{2\omega x\dot{y}\,\text{sen}\,\lambda}{l} + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \qquad (2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{gy}{l} + \frac{2\omega y\dot{y}\,\text{sen}\,\lambda}{l} - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \qquad (3)$$

Estas equações diferenciais não são lineares por causa da presença dos termos envolvendo $x\dot{y}$ e $y\dot{y}$. Entretanto, estes termos negligenciáveis comparados com os outros, pois ω, x e y são pequenos. Assim, negligenciando-se, obtêm-se as equações diferenciais

$$\ddot{x} = -gx/l + 2\omega\dot{y}\cos\lambda \qquad (4)$$
$$\ddot{y} = -gy/l - 2\omega\dot{x}\cos\lambda \qquad (5)$$

6.20. Resolva as equações do movimento do pêndulo obtidas no probl. 6.19 e suponha as condições iniciais necessárias.

Considere que, inicialmente, o bulbo esteja no plano yz e é dado um deslocamento de magnitude $A > 0$ distante do eixo z, após o qual ele é solto. Então, as condições iniciais são

$$x = 0,\ \dot{x} = 0,\ y = A,\ \dot{y} = 0 \quad \text{para} \quad t = 0 \qquad (1)$$

Para achar a solução das equações (4) e (5) do probl. 6.19, é conveniente por

$$K^2 = g/l, \qquad \alpha = \omega\cos\lambda. \qquad (2)$$

Assim, elas ficam

$$\ddot{x} = -K^2x + 2\alpha\dot{y} \qquad (3)$$
$$\ddot{y} = -K^2y - 2\alpha\dot{x} \qquad (4)$$

É também conveniente usar números complexos. Multiplicando-se a equação (4) por i e somando a (3), acha-se

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -K^2(x+iy) + 2\alpha(\dot{y} - i\dot{x}) = -K^2(x+iy) - 2i\alpha(\dot{x} + i\dot{y})$$

E, chamando-se $u = x + iy$, isto pode ser escrito como

$$\ddot{u} = -K^2u - 2i\alpha\dot{u} \quad \text{ou} \quad \ddot{u} + 2i\alpha\dot{u} + K^2u = 0. \qquad (5)$$

Se $u = Ce^{\gamma t}$, onde C e γ são constantes, fica

$$\gamma^2 + 2i\alpha\gamma + K^2 = 0$$

tal que

$$\gamma = (-2i\alpha \pm \sqrt{-4\alpha^2 - 4K^2})/2 = -i\alpha \pm i\sqrt{\alpha^2 + K^2}. \qquad (6)$$

Ora, como $\alpha^2 = \omega^2 \cos^2 \lambda$ é pequeno comparado com $K^2 = g/l$, pode-se escrever

$$\gamma = -i\alpha \pm iK \tag{7}$$

Então, as soluções da equação são (usando-se coeficientes complexos)

$$(C_1 + iC_2)e^{-i(\alpha-K)t} \quad \text{e} \quad (C_3 + iC_4)e^{-i(\alpha+K)t}$$

e a solução geral é

$$u = (C_1 + iC_2)e^{-i(\alpha-K)t} + (C_3 + iC_4)e^{-i(\alpha+K)t} \tag{8}$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são consideradas como reais. Usando as fórmulas de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \tag{9}$$

e, como o fato de que $u = x + iy$, (8) pode-se escrever

$$x + iy = (C_1 + iC_2)\{\cos(\alpha-K)t - i\,\text{sen}\,(\alpha-K)t\} + (C_3 + iC_4)\{\cos(\alpha+K)t - i\,\text{sen}\,(\alpha+K)t\}.$$

Equacionando-se as partes reais e imaginárias, acha-se

$$x = C_1 \cos(\alpha-K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha-K)t + C_3\cos(\alpha+K)t + C_4\,\text{sen}\,(\alpha+K)t \tag{10}$$

$$y = -C_1\,\text{sen}\,(\alpha-K)t + C_2\cos(\alpha-K)t - C_3\,\text{sen}\,(\alpha+K)t + C_4\cos(\alpha+K)t \tag{11}$$

Usando-se as condições iniciais $x = 0$ em $t = 0$, acha-se de (10) que $C_1 + C_3 = 0$ ou $C_3 = -C_1$. Igualmente, usando-se $x = 0$ em $t = 0$, acha-se de (10) que

$$C_4 = C_2\left(\frac{K-\alpha}{K+\alpha}\right) = C_2\left(\frac{\sqrt{g/l} - \omega\cos\lambda}{\sqrt{g/l} + \omega\cos\lambda}\right).$$

Ora, como $\omega \cos\lambda$ é pequeno comparado com $\sqrt{g/l}$, tem-se, com um alto grau de aproximação, $C_4 = C_2$.

Assim, as equações (10) e (11) ficam

$$x = C_1\cos(\alpha-K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha-K)t - C_1\cos(\alpha+K)t + C_2\,\text{sen}\,(\alpha+K)t \tag{12}$$

$$y = -C_1\,\text{sen}\,(\alpha-K)t + C_2\cos(\alpha-K)t + C_1\,\text{sen}\,(\alpha+K)t + C_2\cos(\alpha+K)t \tag{13}$$

Usando-se as condições iniciais $\dot{y} = 0$, obtém-se de (13) $C_1 = 0$. Igualmente, usando-se $y = A$ em $t = 0$, acha-se $C_2 = \frac{1}{2}A$. Assim, (12) e (13) ficam

$$x = \tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,(\alpha-K)t + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(\alpha+K)t$$
$$y = \tfrac{1}{2}A\cos(\alpha-K)t + \tfrac{1}{2}A\cos(\alpha+K)t$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos Kt\,\text{sen}\,\alpha t \\ y &= A\cos Kt\cos\alpha t \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

i.e.,

$$\left.\begin{aligned} x &= A\cos\sqrt{g/l}\,t\,\text{sen}\,(\omega\cos\lambda\,t) \\ y &= A\cos\sqrt{g/l}\,t\cos(\omega\cos\lambda\,t) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

6.21. Dê uma interpretação física à solução (15) do probl. 6.20.

Em forma vetorial, (15) pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = A\cos\sqrt{g/l}\,t\,\mathbf{n}$$

onde

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\,\text{sen}\,(\omega\cos\lambda)t + \mathbf{j}\cos(\omega\cos\lambda)t$$

é um vetor unitário.

O período de $\cos\sqrt{g/l}\,.\,t$ [isto é, $2\pi\sqrt{1/g}$] é muito pequeno, quando comparado com o período de n [i.e., $2\pi/(\omega\cos\lambda)$]. Segue-se que $\mathbf{n}$ é um vetor que gira muito devagar. Assim, fisicamente, o pêndulo oscila em um plano pelo eixo z, que gira lentamente (ou *precessa*) em torno do eixo z.

Agora, em $t = 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ e o bulbo está em $y = A$. Após um tempo $t = 2\pi/(4\omega\cos\lambda)$, por exemplo, $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j}$ tal que a rotação do plano é no sentido horário, visto de cima da superfície terrestre, no hemisfério norte [onde $\cos\lambda > 0$]. No hemisfério sul, a rotação do plano é anti-horário.

A rotação do plano foi observada por Foucault, em 1851, e serviu como constatação da rotação da Terra em torno de seu eixo, em condições de laboratório.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.22. Uma haste vertical AB gira com uma velocidade angular constante ω. Um fio leve e de comprimento l tem uma extremidade presa ao ponto O da haste, enquanto a outra extremidade P do fio está presa a uma massa m. Ache (*a*) a tensão no fio e (*b*) o ângulo que o fio OP faz com a vertical, quando as condições de equilíbrio prevalecerem.

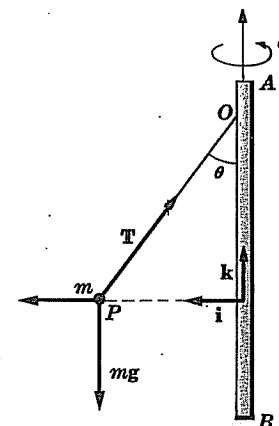



Fig. 6-6

Escolha os vetores unitários **i** e **k**, perpendicular e paralelo, respectivamente, à haste e girando com ela. O vetor unitário **j** pode ser escolhido perpendicular ao plano de **i** e **k**. Seja

$$\mathbf{r} = l \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{i} - l \cos \theta \, \mathbf{k}$$

o vetor de posição de m em relação a O.

Três forças atuam sobre a partícula m

(i) O peso, $m\mathbf{g} = mg\mathbf{k}$

(ii) A força centrifuga

$$\begin{aligned} -m\{\omega \times (\omega \times \mathbf{r})\} &= -m\{[\omega\mathbf{k}] \times ([\omega\mathbf{k}] \times [l \operatorname{sen} \theta\mathbf{i} - l\cos\theta\mathbf{k}])\} \\ &= -m\{[\omega\mathbf{k}] \times (\omega l \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})\} = m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} \end{aligned}$$

(iii) A tensão, $\mathbf{T} = -T \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + T\cos\theta\,\mathbf{k}$.

Quando a partícula está em equilíbrio, a resultante de todas estas forças é zero. Então,

$$-mg\mathbf{k} + m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} - T\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + T\cos\theta\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

i.e.,

$$(m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta - T\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (T\cos\theta - mg)\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

ou

$$m\omega^2 l \operatorname{sen}\theta - T\operatorname{sen}\theta = 0 \quad (1)$$

$$T\cos\theta - mg = 0 \quad (2)$$

Resolvendo (1) e (2) simultaneamente, acha-se (*a*) $T = m\omega^2 l$, (*b*) $\theta = \cos^{-1}(g/\omega^2 l)$.

Como o fio OP, com a massa m em P, descreve uma superfície em forma de cone, o sistema é, algumas vezes, chamado de *pêndulo cônico*.

6.23. Uma haste AOB [fig. 6-7] gira em um plano vertical [o plano yz] em torno de um eixo horizontal [o eixo x] passando por O e perpendicular a este plano com uma velocidade angular constante ω. Admitindo que não existam forças de atrito, determine o movimento de uma partícula P de massa m que é constrangida a se mover ao longo da haste. Um problema equivalente existe quando AOB é trocado por um tubo fino, dentro do qual a partícula se move.

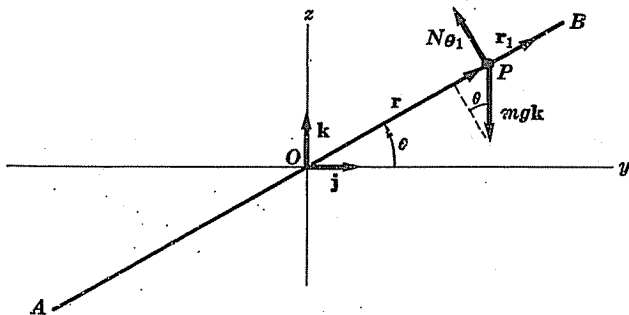



Fig. 6-7

No instante t seja $\mathbf{r}$ o vetor-posição da partícula e θ o ângulo feito pela haste com o eixo y. Escolha os vetores unitários **j** e **k** nas direções y e z, respectivamente e o vetor unitário $\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}$. Seja $\mathbf{r}_1$ um vetor unitário na direção **r** e θ_1 um vetor unitário na direção de θ crescente.

Há três forças atuantes sobre P:

(i) O peso, $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{k} = -mg \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\theta_1$

(ii) A força centrífuga,

$$\begin{aligned} -m[\omega \times (\omega \times \mathbf{r})] &= -m[\omega\mathbf{i} \times (\omega\mathbf{i} \times r\mathbf{r}_1)] \\ &= -m[\omega\mathbf{i}(\omega\mathbf{i}\cdot r\mathbf{r}_1) - r\mathbf{r}_1(\omega\mathbf{i}\cdot\omega\mathbf{i})] \\ &= -m[\mathbf{0} - \omega^2 r\mathbf{r}_1] = m\omega^2 r\mathbf{r}_1 \end{aligned}$$

(iii) A força de reação $\mathbf{N} = N\theta_1$ da haste que lhe é perpendicular, desde que não exista força de atrito e resistência.

Então, pela segunda lei de Newton,

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -mg\mathbf{k} - m\omega^2 r\mathbf{r}_1 + N\theta_1$$

ou

$$\begin{aligned} m\frac{d^2 r}{dt^2} &= -mg\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\,\theta_1 + m\omega^2 r\mathbf{r}_1 + N\theta_1 \\ &= (m\omega^2 r - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 + (N - mg\cos\theta)\theta_1 . \end{aligned}$$

Segue-se que $N = mg\cos\theta$ e

$$d^2r/dt^2 = \omega^2 r - g\operatorname{sen}\theta \quad (1)$$

Desde que $\dot\theta = \omega$, constante, tem-se $\theta = \omega t$ se for admitido $\theta = 0$ em $t = 0$. Então, (1) fica

$$d^2r/dt^2 - \omega^2 r = -g\operatorname{sen}\omega t \quad (2)$$

E, se for admitido que, em $t = 0$, $r = r_0$, $dr/dt = v_0$, acha-se

$$r = \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t \quad (3)$$

ou, em termos de funções hiperbólicas,

$$r = r_0\cosh\omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\operatorname{senh}\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\operatorname{sen}\omega t. \quad (4)$$

6.24. (*a*) Mostre que, sob condições favoráveis, a partícula do probl. 6.23 pode oscilar ao longo da haste, com um movimento harmônico simples e ache estas condições. (*b*) O que acontece à partícula se as condições de (*a*) não são satisfeitas?

(*a*) A partícula oscilará com um movimento harmônico simples ao longo da haste se, e somente se, $r_0 = 0$ e $v_0 = g/2\omega$. Neste caso, $r = (g/2\omega^2)\operatorname{sen}\omega t$. Assim, a amplitude e o período do movimento harmônico simples em tal caso são dados por $g/2\omega^2$ e $2\pi/\omega$, respectivamente.

(*b*) Se $v_0 = (g/2\omega) - \omega r_0$ então $r = r_0 e^{-\omega t} + (g/2\omega^2)\operatorname{sen}\omega t$ e o movimento é, aproximadamente, harmônico simples, após alguns instantes. De outro lado, a massa irá, finalmente, sair da haste, se ela for finita.

6.25. Um projétil localizado em uma co-latitude λ é disparado com uma velocidade v_0 na direção sul e um ângulo α com a horizontal. (*a*) Ache a posição do projétil após um tempo t. (*b*) Prove que, após um tempo t, o projétil é defletido, para o leste do plano vertical original de movimento por

$$\tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen} \lambda\, t^3 - \omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2.$$

(*a*) Usam-se as equações do probl. 6.15. Admitindo-se que o projétil parta da origem, tem-se

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \tag{1}$$

Também a velocidade inicial é $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\alpha\, \mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\, \mathbf{k}$ tal que

$$\dot{x} = v_0 \cos\alpha,\ \dot{y} = 0,\ \dot{z} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \quad \text{em} \quad t = 0 \tag{2}$$

Integrando as equações (1), (2) e (3) do probl. 6.15, obtém-se, usando as condições (2)

$$\dot{x} = 2\omega \cos\lambda\, y + v_0 \cos\alpha \tag{3}$$

$$\dot{y} = -2(\omega \cos\lambda\, x + \omega \operatorname{sen}\lambda\, z) \tag{4}$$

$$\dot{z} = -gt + 2\omega \operatorname{sen}\lambda\, y + v_0 \operatorname{sen}\alpha \tag{5}$$

Em vez de se tentar resolver estas equações diretamente, pode-se usar o *método de iteração*, ou *aproximações sucessivas* como no método 2 do prob. 6.16. Assim, por integração, e usando-se as condições (1), acha-se

$$x = 2\omega \cos\lambda \int_0^t y\, du + (v_0 \cos\alpha)t \tag{6}$$

$$y = -2\omega \cos\lambda \int_0^t x\, du - 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t z\, du \tag{7}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 + 2\omega \operatorname{sen}\lambda \int_0^t y\, du \tag{8}$$

Como primeira aproximação, pode ser usado $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ sob os sinais de integração. Então, (6), (7) e (8) ficam negligenciando os termos que envolvem ω^2,

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \tag{9}$$

$$y = 0 \tag{10}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)\, t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{11}$$

Para obter uma aproximação maior, usam-se (9), (10) e (11) sob os sinais de integração em (6), (7) e (8), chegando-se a

$$x = (v_0 \cos\alpha)t \tag{12}$$

$$y = -\omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda \tag{13}$$

$$z = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{14}$$

onde, de novo, negligenciam-se os termos que envolvam ω^2. Aproximações posteriores produzem novamente as equações (12), (13) e (14); assim, estas equações têm uma exatidão da ordem dos termos que envolvem ω^2.

(*b*) Da equação (13) vê-se que o projétil é defletido na direção a leste do plano xz de $\tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda - \omega v_0 \cos(\alpha - \lambda)\, t^2$. Se $V_0 = 0$, este valor concorda com o do probl. 6.16.

6.26. Prove que, quando o projétil do probl. 6.25 volta à horizontal, este estará a uma distância de

$$\frac{\omega v_0^3 \operatorname{sen}^2\alpha}{3g^2}(3\cos\alpha\cos\lambda + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\lambda)$$

a oeste do ponto de onde foi lançado, admitido que a Terra não gire.

O projétil retornará à horizontal quando $z = 0$, i.e.,

$$(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \text{ou} \quad t = (2v_0 \operatorname{sen}\alpha)/g$$

Usando este valor de t na equação (13) do probl. 6.25, acha-se o resultado pedido.

Problemas Propostos

SISTEMAS DE COORDENADAS GIRANTES, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

6.27. Um sistema de coordenadas xyz move-se com velocidade angular $\omega = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, relativamente a um sistema de coordenadas fixo ou inercial XYZ, tendo ambos a mesma origem. Se um vetor relativamente ao sistema xyz é dado como função do tempo t por $\mathbf{A} = \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} - \cos t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$, achar (*a*) $d\mathbf{A}/dt$ relativamente ao sistema fixo, (*b*) $d\mathbf{A}/dt$ relativamente ao sistema em movimento.
Resp. (*a*) $(6\cos t - 3e^{-t})\mathbf{i} + (6\operatorname{sen} t - 2e^{-t})\mathbf{j} + (3\operatorname{sen} t - 2\cos t - e^{-t})\mathbf{k}$
(*b*) $\cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} - e^{-t}\, \mathbf{k}$

6.28. Ache, $d^2\mathbf{A}/dt^2$ para o vetor $\mathbf{A}$ do probl. 6.27 relativamente (*a*) ao sistema fixo e (*b*) ao sistema em movimento.
Resp. (*a*) $(6\cos t - 45\operatorname{sen} t + 16e^{-t})\mathbf{i} + (40\cos t - 6\operatorname{sen} t - 11e^{-t})\mathbf{j} + (10\operatorname{sen} t - 23\cos t + 16e^{-t})\mathbf{k}$
(*b*) $-\operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + \cos t\, \mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

6.29. Um sistema de coordenadas xyz está girando com uma velocidade angular de $\omega = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$, relativamente ao sistema de coordenadas fixo XYZ, tendo ambos a mesma origem. Ache a velocidade da partícula fixa ao sistema xyz no ponto $(3, 1, -2)$ vista por um observador fixo do sistema XYZ.
Resp. $18\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$

6.30. Discuta a interpretação física de trocar-se ω por $-\omega$ (*a*) no probl. 6.4, e (*b*) no probl. 6.6.

6.31. Explique, sob o ponto de vista físico, por que o resultado do probl. 6.3 era esperado como sendo correto.

6.32. Um sistema de coordenadas xyz gira com velocidade angular $\omega = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, em relação a um sistema de coordenadas fixo XYZ, tendo ambos a mesma origem. Se o vetor de posição da partícula for dado por $\mathbf{r} = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, ache (*a*) a velocidade aparente e (*b*) a velocidade real, em um instante t qualquer.
Resp. (*a*) $\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$
(*b*) $(t \operatorname{sen} t + 2\cos t)\mathbf{i} + (2 \operatorname{sen} t - t\cos t)\mathbf{j}$.

6.33. Determine (*a*) a aceleração aparente e (*b*) a aceleração real da partícula do probl. 6.32.
Resp. (*a*) $-\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ (b) $(2t \cos t - 3 \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (3\cos t + 2t \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k}$.

ACELERAÇÕES E FORÇAS DE CORIOLIS E CENTRÍPETA

6.34. Uma bola é arremessada horizontalmente no hemisfério norte. (*a*) A trajetória da bola, levando em conta a fôrça de Coriolis, será desviada para a direita ou para a esquerda da trajetória, quando não se levar em conta a fôrça de Coriolis, a bola sendo vista pela pessoa que a arremessou? (*b*) Qual seria a sua resposta em (*a*) se a bola fôsse arremessada no hemisfério sul?
Resp. (*a*) para a direita, (*b*) para a esquerda.

6.35. Qual seria a sua resposta ao probl. 6.34, se a bola fosse jogada nos pólos norte ou sul?

6.36. Explique porque a água, caindo verticalmente de um dreno, "torce" no sentido anti-horário no hemisfério norte e no sentido horário no hemisfério sul. O que acontece no equador?

6.37. Prove que a fôrça centrífuga atuante sobre uma partícula de massa m na superfície da Terra é um vetor (*a*) de direção saindo da Terra e perpendicular ao vetor de velocidade angular ω e (*b*) de magnitude $m\omega^2 R \operatorname{sen} \lambda$, onde λ é a co-latitude.

6.38. No probl. 6.37, onde a fôrça centrífuga seria (*a*) máxima, (*b*) mínima?
Resp. (*a*) no equador, (*b*) nos pólos norte e sul.

6.39. Ache a fôrça centrífuga atuante sôbre um trem de massa 100 000 kg (*a*) no equador e (*b*) na co-latitude 30°.
Resp. (*a*) 35,0 kgf, (*b*) 17,5 kgf.

6.40. (*a*) Um rio de largura D corre em direção norte, com uma velocidade v_0 na co-latitude de λ. Prove que a água, na margem direita do rio, será mais alta que na esquerda de uma altura de

$$(2D\omega v_0 \cos \lambda)(g^2 + 4\omega^2 v^2 \cos^2 \lambda)^{-1/2}$$

onde ω é a velocidade angular em módulo da Terra em torno de seu eixo.
(*b*) Prove que o resultado da parte (*a*) é para fins práticos igual a $(2D\omega v_0 \cos\lambda)/g$.

6.41. Se o rio do probl. 6.40 tem 2 km de largura e corre a uma velocidade de 5 km/h em uma co-latitude de 45°, de quanto a água na margem esquerda será mais alta que a da direita?
Resp. 2,9 cm.

6.42. Um automóvel faz uma curva com um raio de curvatura. Se o coeficiente de fricção é μ, prove que a maior velocidade que ele pode correr não derrapando é de $\sqrt{\mu\rho g}$.

6.43. O automóvel do probl. 6.42 derrapará a uma velocidade de 90 km/h, $\mu = 0{,}05$ e (a) $\rho = 200$ m, (b) $\rho = 15$ m? Discuta o resultado fisicamente.

MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA RELATIVAMENTE À TERRA

6.44. Um objeto cai de uma altura de 400 m, no equador. Se a resistência do ar for negligenciada, qual a distância do ponto em que êle bate na superfície terrestre à vertical que passa pela posição inicial?
Resp. 17,6 cm em direção a este.

6.45. Faça o probl. 6.44 com o objeto caindo (*a*) na co-latitude de 60° e (*b*) no pólo norte?
Resp. (*a*) 15,2 cm em direção a este.

6.46. Um objeto é arremessado verticalmente para cima em uma co-latitude λ e com velocidade v_0. Prove que, quando ele voltar, cairá a uma distância de $(4\omega v_0^3 \operatorname{sen} \lambda)/3g^2$, a este do ponto de arremesso.

6.47. Um objeto é arremessado verticalmente para cima no equador e com uma velocidade de 90 km/h. Qual é a distância entre o ponto de queda e o de arremesso?
Resp. 1,61 cm.

6.48. Com que velocidade deve ser arremessado o objeto do probl. 6.47 de maneira que volte a um ponto da Terra distante de 6 m de sua posição original?
Resp. 650 km/h.

6.49. Um objeto é arremessado para baixo com uma velocidade inicial de v_0. Prove que após um tempo t o objeto será defletido a este da vertical de

$$\omega v_0 \operatorname{sen} \lambda\, t^2 + \tfrac{1}{3}\omega g \operatorname{sen} \lambda\, t^3.$$

6.50. Prove que se o objeto do probl. 6.49 fôr atirado para baixo de uma altura h acima da superfície terrestre, então o objeto colidirá com a Terra a um ponto a este da vertical pelo ponto inicial e a uma distância de

$$\frac{\omega \operatorname{sen} \lambda}{3g^2}\left(\sqrt{v_0^2 + 2gh} - v_0\right)^2\left(\sqrt{v_0^2 + 2gh} + 2v_0\right).$$

6.51. Considere que a massa m de um pêndulo cônico de comprimento l move-se em um círculo horizontal de raio a. Prove que (*a*) a velocidade é $a\sqrt{g}/\sqrt[4]{l^2 - a^2}$ e (*b*) a tensão no fio é $mgl/\sqrt{l^2 - a^2}$.

6.52. Se um objeto cai sobre a superfície terrestre, prove que sua trajetória é uma parábola semicúbica.

O PÊNDULO DE FOUCAULT

6.53. Explique fisicamente por que o plano de oscilação de um pêndulo de Foucault gira no sentido horário, quando visto de cima da superfície terrestre, no hemisfério norte, mas no sentido anti-horário no hemisfério sul?

6.54. Quanto tempo leva o plano de oscilação de um pêndulo de Foucault para fazer uma revolução completa, se estiver localizado (*a*) no pólo norte, (*b*) na co-latitude 45°, (*c*) na co-latitude de 85°?
Resp. (*a*) 23,94 h, (*b*) 33,86 h e (*c*) 92,50 h.

6.55. Explique fisicamente por que um pêndulo de Foucault no equador não detecta a rotação da Terra em torno de seu eixo. Este resultado físico é explicado matematicamente? Explique.

SISTEMAS DE COORDENADAS EM MOVIMENTO GENERALIZADO

6.56. Um sistema de coordenadas gira em torno do eixo z com uma velocidade angular $\omega = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ relativamente ao sistema de coordenadas fixo XYZ onde t é o tempo. A origem do sistema xyz tem um vetor-posição $\mathbf{R} = t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ em relação ao sistema XYZ. Se o vetor-posição de uma partícula é dado por $\mathbf{r} = (3t + 1)\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ relativamente ao sistema em movimento, ache (*a*) a velocidade aparente e (*b*) a velocidade real em um instante qualquer.

6.57. Determine (*a*) a aceleração aparente e (*b*) a aceleração real da partícula no probl. 6.56.

6.58. Faça (*a*) o probl. 6.5 e (*b*) o probl. 6.7, considerando o vetor de posição do sistema xyz relativamente à origem do sistema fixo XYZ como sendo $\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

PROBLEMAS DIVERSOS

6.59. Prove que, devido à rotação da Terra, em torno de seu eixo, o peso aparente de um objeto de massa m na co-latitude λ é $m\sqrt{(g - \omega^2 R \operatorname{sen}^2 \lambda)^2 + (\omega^2 R \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda)^2}$, onde R é o raio da Terra.

6.60. Prove que o ângulo β que uma vertical aparente na latitude λ faz com a vertical real é dado por $\operatorname{tg} \beta = \dfrac{\omega^2 R \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda}{g - \omega^2 R \operatorname{sen}^2 \lambda}$.

6.61. Explique fisicamente por que a vertical real e a vertical aparente coincidem no equador e também nos pólos norte e sul.

6.62. Uma pedra gira em um círculo vertical presa a um fio do comprimento de 3 m. Prove que ela deve ter uma velocidade em módulo mínima de 6 m/s na parte inferior da trajetória, de modo a completar o círculo.

6.63. Um carro C [fig. 6-8] deve percorrer completamente uma trajetória circular vertical de raio a, sem deixar de tocar na pista. Suponha que a pista não tenha atrito e determine a altura H da qual êle deve partir.

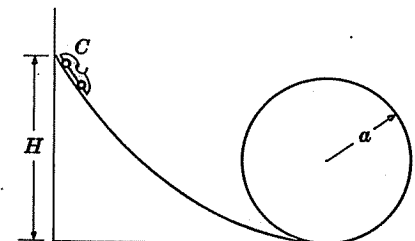



Fig. 6-8

6.64. Uma partícula de massa m é forçada a mover-se em um círculo vertical de raio a, que gira em torno de um de seus diâmetros fixos, com uma velocidade angular ω. Prove que a partícula oscilará com pequenos deslocamentos em torno de sua posição de equilíbrio com uma frequência dada por $2\pi a\omega/\sqrt{a^2\omega^4 - g^2}$.

6.65. Discuta o que acontece no probl. 6.64 se $\omega = \sqrt{g/a}$.

6.66. Um tubo cilíndrico AOB de comprimento $2a$ [fig. 6-9] gira com uma velocidade angular ω em torno de um eixo vertical que passa pelo centro O. A partícula está inicialmente em repouso no tubo, a uma distância b de O. Suponha que não existe força de atrito, ache (*a*) a posição e (*b*) a velocidade da partícula em um instante qualquer.

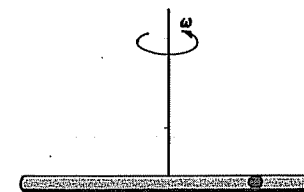



Fig. 6-9

6.67. (*a*) Quanto tempo a partícula do probl. 6.66 levará para sair do tubo e (*b*) qual será a sua velocidade de saída?
Resp. (*a*) $\dfrac{1}{\omega}\ln(a + \sqrt{a^2 - b^2})$

6.68. Ache a força sobre a partícula do probl. 6.66 em uma posição qualquer no tubo.

6.69. Uma massa, presa a um fio que é suspenso por um ponto fixo, move-se em um círculo horizontal cujo centro está na vertical pelo ponto fixo, com uma velocidade de 20 revoluções por minuto. Ache a distância do centro do círculo ao ponto fixo. *Resp.* 2,23 metros.

6.70. A uma partícula, sobre um plano horizontal sem atrito em uma co-latitude de λ, é dada uma velocidade inicial de v_0 na direção norte. Prove que ela descreve um arco de círculo de raio $v_0/2\omega \cos \lambda)$ com período $\pi/(\omega \cos \lambda)$.

6.71. O bulbo de um pêndulo cônico descreve um círculo horizontal de raio a. Se o comprimento do pêndulo é l, prove que o período é dado por $4\pi^2\sqrt{l^2 - a^2}/g$.

6.72. A uma partícula forçada a mover-se sobre um arame circular de raio a e coeficiente μ é dada uma velocidade inicial v_0. Admitindo que não haja outras forças atuantes, quanto tempo levará para a partícula parar?

6.73. (*a*) Prove que, se a Terra girasse com uma velocidade angular dada por $\sqrt{2g/R}$, onde R é o seu raio e g a aceleração devida à gravidade, então o peso de uma partícula de massa m seria o mesmo em todas as latitudes. (*b*) Qual é o valor numérico de sua velocidade angular? *Resp.* (*b*) $1{,}74 \times 10^{-3}$ rad/s.

6.74. Um tanque cilíndrico contendo água gira em torno de seu eixo, com uma velocidade angular constante ω, de tal maneira que não espirre água de dentro. Prove que a forma da superfície de água é um parabolóide de revolução.

6.75. Faça (*a*) o probl. 6.16 e (*b*) o probl. 6.17, com uma maior exatidão, envolvendo os termos em ω^2.

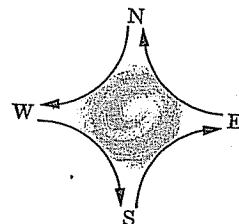
6.76. Prove que, devido à rotação da Terra em torno do seu eixo, os ventos no hemisfério norte, indo de uma área de alta pressão para uma de baixa pressão, giram no sentido anti-horário, quando vistos de cima da superfície terrestre. O que acontece aos ventos no hemisfério sul?

6.77. (*a*) Prove que, no hemisfério norte, os ventos do norte, este, sul e oeste são defletidos, respectivamente, para o oeste, norte, este e sul, como é mostrado na fig. 6-10. (*b*) Use isto para explicar a origem dos *ciclones*.

Fig. 6-10

6.78. Ache a velocidade angular para que uma partícula descreva um círculo horizontal, dentro de um cone vertical, sem atrito de ângulo α.

6.79. Faça o probl. 6.78 para um hemisfério.

6.80. O período de um pêndulo simples é dado por P. Prove que seu período, quando êle é suspenso de um trem movendo-se à velocidade de v_0 em uma trajetória circular de raio ρ, é dado por $P\sqrt{\rho g/\sqrt[4]{v_0^4 + \rho^2 g^2}}$.

6.81. Faça o probl. 6.25 com maior exatidão envolvendo os termos em ω^2.

6.82. Um tubo cilíndrico OA, inclinado de um ângulo α com a horizontal, gira em torno da vertical com uma velocidade angular ω [veja a fig. 6-11]. Se a partícula forçada a mover-se neste tubo está inicialmente em repouso a uma distância a da interseção O do tubo com o eixo vertical de rotação, prove que sua distância r de O, em um instante qualquer t, é $r = a \cosh(\omega t \cos \alpha)$.

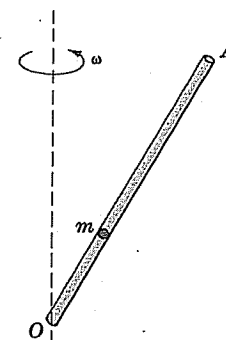



Fig. 6-11

6.83. Faça o probl. 6.82 considerando o tubo com um coeficiente de atrito μ.

6.84. Prove que a partícula do probl. 6.82 está em equilíbrio instável entre os pontos distante de O de

$$\frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\omega^2}\left(\frac{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}\right) \quad \text{e} \quad \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\omega^2}\left(\frac{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \mu}\right)$$

admitindo que $\operatorname{tg} \alpha < 1/\mu$.

6.85. Um trem, tendo uma velocidade máxima de v_0, está fazendo uma curva com raio de curvatura ρ. Prove que, se não houver um empuxo lateral no trilho externo, então este trilho deve estar a uma altura acima do trilho interno $av_0^2/\sqrt{v_0^4 + \rho^2 g^2}$ onde a é a distância entre os trilhos.

6.86. Um projétil é disparado de uma co-latitude λ com velocidade v_0 em direção a oeste e a um ângulo α com a horizontal. Prove que, se os termos envolvendo ω^2 forem negligenciados, então o tempo necessário para atingir a máxima altura é

$$\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} - \frac{2\omega v_0^2 \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g^2}$$

Compare com o caso onde $\omega = 0$, i.e., que a Terra não gire em torno do seu eixo.

6.87. No probl. 6.86, prove que a máxima altura alcançada é de

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} - \frac{2\omega v_0^3 \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha}{g^2}$$

Compare com o caso em que $\omega = 0$.

6.88. Prove que o alcance do projétil do probl. 6.86 é

$$\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} + \frac{\omega v_0^3 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \lambda (8 \operatorname{sen}^2 \alpha - 6)}{3g^2}$$

Assim, mostre que, se os termos envolvendo ω^2 e de maiores ordens são negligenciados, o alcance será maior, menor ou o mesmo, no caso de que $\omega = 0$ e de acordo com $\alpha > 60°$, $\alpha < 60°$ ou $\alpha = 60°$, respectivamente.

6.89. Se um projétil é disparado com uma velocidade inicial de $v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ da origem de um sistema de coordenadas fixo relativamente à superfície terrestre na co-latitude λ, prove que sua posição, em um instante qualquer t, mais tarde será dada por

$$x = v_1 t + \omega v_2 t^2 \cos\lambda$$
$$y = v_2 t - \omega t^2(v_1 \cos\lambda + v_3 \operatorname{sen}\lambda) + \tfrac{1}{3}\omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda$$
$$z = v_3 t - \tfrac{1}{2}g t^2 + \omega v_2 t^2 \operatorname{sen}\lambda$$

negligenciando os termos envolvendo ω^2.

6.90. Faça o probl. 6.89, somente incluindo termos que envolvam ω^2, porém excluindo os termos que envolvam ω^3.

6.91. Um objeto de massa m, inicialmente em repouso, é solto de uma altura h da superfície terrestre, à co-latitude λ. Admitindo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade instantânea em módulo do objeto e levando em conta a rotação da Terra em torno do seu eixo, prove que, após um tempo t, o objeto é defletido para este da vertical de

$$\frac{2\omega \operatorname{sen}\lambda}{\beta^3}\left[(g - 2h\beta^2)(1 - e^{-\beta t}) + \beta^3 h t e^{-\beta t} - \beta g t + \tfrac{1}{2}g\beta^2 t^2\right]$$

negligenciando os termos de ordem ω^2 e maiores.

6.92. Faça o probl. 6.91, com maior exatidão envolvendo os termos de ordem ω^2.

6.93. Um plano inclinado sem atrito de comprimento l e ângulo α, localizado à co-latitude, λ está posto de tal maneira que uma partícula em cima dele deslizará sob influência da gravidade do norte para o sul. Se a partícula parte do repouso no topo, prove que ela alcançará o bordo inferior em um tempo dado por

$$\sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen}\alpha}} + \frac{2\omega l \operatorname{sen}\lambda \cos\alpha}{3g}$$

e sua velocidade aí será

$$\sqrt{2gl \operatorname{sen}\alpha} - \tfrac{4}{3}\omega l \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\lambda$$

negligenciando os termos da ordem de ω^2.

6.94. (*a*) Prove que, no instante em que a partícula do probl. 6.93 alcance o bordo inferior, ela sofrerá uma deflexão de

$$\frac{2l\omega}{3}\sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen}\alpha}}\cos(\alpha + \lambda)$$

para este ou oeste, respectivamente, se $\cos(\alpha + \lambda)$ for maior ou menor que zero. (*b*) Discuta o caso onde $\cos(\alpha + \lambda) = 0$. (*c*) Use o resultado de (*a*) para chegar ao resultado do probl. 6.17.

6.95. Faça os probls. 6.93 e 6.94, considerando que o plano inclinado tenha um coeficiente de fricção μ.

Capítulo 7

Sistemas de Partículas

SISTEMAS DISCRETOS E CONTÍNUOS

Até aqui, estudou-se o movimento de um objeto que poderia ser considerado como uma partícula ou massa pontual. Em muitos casos práticos, os objetos podem ser considerados mais realisticamente por meio de *grupos* ou *sistemas* de partículas. Tais sistemas são chamados de *discretos* ou contínuos, se cada uma das partículas puder ser considerada separadamente ou não.

Para muitos fins práticos, um sistema discreto tendo um grande, mas finito, número de partículas pode ser considerado como um sistema contínuo. Ao contrário, um sistema contínuo pode ser considerado como um sistema discreto, consistindo em um grande, mas finito, número de partículas.

DENSIDADE

Para sistemas contínuos de partículas ocupando uma região do espaço é, geralmente, conveniente definir uma massa por unidade de volume, a qual é chamada de *densidade volumétrica* ou, simplesmente, *densidade*. Matematicamente, se ΔM é a massa total de um volume $\Delta\tau$ de partículas, então a densidade pode ser definida como

$$\sigma = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta\tau} \tag{1}$$

A densidade é uma função da posição e pode variar de ponto para ponto. Quando a densidade for constante, o sistema é dito ser de *densidade uniforme* ou, simplesmente, *uniforme*.

Quando o sistema contínuo de partículas ocupa uma superfície, pode-se definir por semelhança uma *densidade superficial* ou massa por unidade de área. Igualmente, quando as partículas ocupam uma linha [ou curva] pode-se definir uma massa por unidade de comprimento ou *densidade linear*.

CORPOS RÍGIDOS E ELÁSTICOS

Na prática, as forças aplicadas a sistemas de partículas mudarão as distâncias entre duas partículas quaisquer. Tais sistemas são, geralmente, chamados de *deformáveis* ou corpos *elásticos*. Em alguns casos, entretanto, as deformações podem ser tão pequenas que elas podem, para muitos fins práticos, ser desprezadas. É, assim, conveniente definir um modelo matemático, no qual a distância entre duas partículas específicas de um sistema permaneça a mesma, ainda quando são aplicadas forças.

Tal sistema é chamado de *corpo rígido.* A mecânica de corpos rígidos é considerada nos caps. 9 e 10.

GRAUS DE LIBERDADE

O número de coordenadas requeridas para especificar a posição de um sistema de uma ou mais partículas é o chamado número de *grau de liberdade* do sistema.

Exemplo 1. Uma partícula movendo-se livremente no espaço requer 3 coordenadas (x, y, z) para especificar sua posição. Assim, o número de graus de liberdade é 3.

Exemplo 2. Um sistema consistindo de N partículas movendo-se livremente no espaço requer $3N$ coordenadas para especificar sua posição. Assim o número de grau de liberdade é $3N$.

Um corpo rígido que pode se mover livremente no espaço tem 6 graus de liberdade, i.e., são necessários 6 coordenadas para especificar a posição. Veja o probl. 7.2.

CENTRO DE MASSA

Sejam $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N$ os vetores de posição de um sistema de N partículas de massas $m_1, m_2, \ldots, m_N$, respectivamente [veja a fig. 7-1].

O *centro de massas* ou *centróide* do sistema de partículas é definido como ponto C que tem o vetor posição

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}_\nu \qquad (2)$$

onde $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ é a *massa total* do sistema. Usa-se, algumas vezes, $\sum_\nu$ ou simplesmente $\sum$, no lugar de $\sum_{\nu=1}^{N}$.

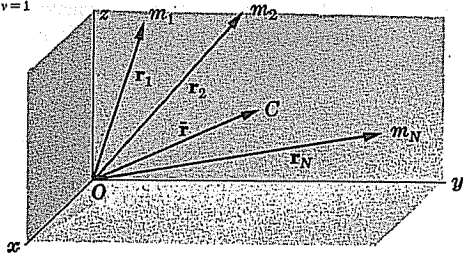



Fig. 7-1

Para sistemas contínuos de partículas ocupando uma região do espaço na qual a densidade volumétrica é σ, o centro de massa pode ser escrito

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma \mathbf{r}\, d\tau}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau} \qquad (3)$$

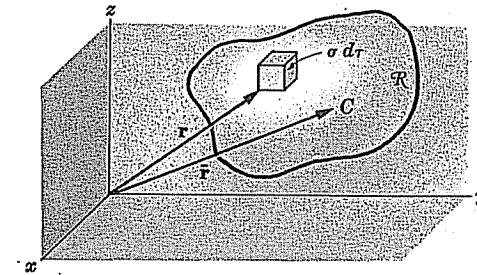



Fig. 7-2

onde a integral é tomada sobre toda a região $\mathcal{R}$ [veja a fig. 7-2]. Se for escrito que

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k},$$

então (3) pode ser igualmente escrito

$$\bar{x} = \frac{\sum m_\nu x_\nu}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\sum m_\nu y_\nu}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\sum m_\nu z_\nu}{M} \qquad (4)$$

e

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma x\, d\tau}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma y\, d\tau}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \sigma z\, d\tau}{M} \qquad (5)$$

onde a massa total é dada por

$$M = \sum m_\nu \qquad (6)$$

ou

$$M = \int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau \qquad (7)$$

As integrais em (3), (5) ou (7) podem ser simples, duplas ou triplas, dependendo de qual seja preferível.

Na prática, é muito simples passar de sistemas discretos para contínuos, trocando as somatórias por integrações.

Conseqüentemente, todos os teoremas serão apresentados para sistemas discretos.

CENTRO DE GRAVIDADE

Se um sistema de partículas está em um campo gravitacional uniforme, o centro de massas é, algumas vezes, chamado de *centro de gravidade.*

MOMENTUM DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

Se $\mathbf{v}_\nu = d\mathbf{r}_\nu/dt = \dot{\mathbf{r}}_\nu$ é a velocidade de m_ν, o momentum total do sistema é definido como

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \qquad (8)$$

Pode-se mostrar que [veja o probl. 7.3]

$$\mathbf{p} = M\bar{\mathbf{v}} = M\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = M\dot{\bar{\mathbf{r}}} \tag{9}$$

onde $\bar{\mathbf{v}} = d\bar{\mathbf{r}}/dt$ é a velocidade do centro de massas.

Isto é expresso como se segue

Teorema 7.1. O momentum total de um sistema de partículas pode ser achado multiplicando-se a massa total M do sistema pela velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ do centro de massa.

MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

Considere que as forças internas entre duas quaisquer partículas do sistema obedeçam à terceira lei de Newton. Então, se $\mathbf{F}$ é a força externa, resultante atuante sobre o sistema, tem-se [veja o probl. 7.4]

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \tag{10}$$

Isto é expresso no

Teorema 7.2. O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se a massa total e a força externa resultante fossem aplicadas nesse ponto.

CONSERVAÇÃO DE MOMENTUM

Pondo $\mathbf{F} = 0$ em (10), acha-se que

$$\mathbf{p} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}_\nu = \text{constante} \tag{11}$$

Assim, tem-se o

Teorema 7.3. Se a força externa resultante que atua sobre um sistema de partículas for nula, então o momentum total permanece constante, i.e., ele é conservado. Em tal caso, o centro de massas está em repouso ou em movimento, com velocidade constante. Este teorema é, geralmente, chamado de *princípio da conservação de momentum.* É uma generalização do teorema 2-8.

MOMENTUM ANGULAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

O valor

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) \tag{12}$$

é chamado de *momentum angular* total [ou *momento de momentum*] do sistema de partículas em torno da origem O.

O TORQUE EXTERNO TOTAL ATUANTE SOBRE UM SISTEMA

Se $\mathbf{F}_\nu$ é a força atuante sobre uma partícula ν, então $\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$ é chamado de *momento da força* $\mathbf{F}_\nu$ ou *torque* em torno de O. A soma

$$\mathbf{\Lambda} = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu \tag{13}$$

é chamada de *torque externo total* em torno da origem.

RELAÇÃO ENTRE MOMENTUM ANGULAR E TORQUE EXTERNO TOTAL

Se for admitido que as forças internas entre quaisquer duas partículas são sempre dirigidas ao longo da linha que liga as partículas [i.e., são *forças centrais*], então pode-se mostrar, como no probl. 7.12, que

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \tag{14}$$

Assim, tem-se o

Teorema 7.4. O torque externo total sobre um sistema de partículas é igual à razão de mudança do momentum angular do sistema pelo tempo, desde que as forças internas entre as partículas sejam forças centrais.

CONSERVAÇÃO DO MOMENTUM ANGULAR

Fazendo-se $\mathbf{\Lambda} = 0$ em (14), acha-se que

$$\mathbf{\Omega} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \text{constante} \tag{15}$$

Assim, tem-se o

Teorema 7.5. Se o torque externo resultante que atua sobre o sistema de partículas for nulo, então o momentum angular total permanece constante, i.e., ele é conservado.

Este teorema é, geralmente, chamado de *princípio da conservação do momentum angular.* E ele é a generalização do teorema 2.9.

ENERGIA CINÉTICA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

A *energia cinética* total de um sistema de partículas é definida como

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 \tag{16}$$

TRABALHO

Se $\mathcal{F}_\nu$ é a força (externa ou interna) atuante sobre a partícula ν, então o trabalho total realizado em mover o sistema de partículas de um estado [simbolizado por 1] a um outro [simbolizado por 2] é

$$W_{12} = \sum_{\nu=1}^{N} \int_1^2 \mathcal{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \tag{17}$$

Como no caso de uma única partícula, pode-se provar o que segue

Teorema 7.6. O trabalho total realizado em mover um sistema de partículas de um estado onde a energia cinética é T_1 a um outro onde a energia cinética é T_2, é

$$W_{12} = T_2 - T_1 \tag{18}$$

ENERGIA POTENCIAL, CONSERVAÇÃO DE ENERGIA

Quando todas as forças, externas ou internas, são conservativas, pode-se definir uma energia potencial total V do sistema. Em tal caso, pode-se provar o seguinte

Teorema 7.7. Se T e V são, respectivamente, a energia cinética total e a energia potencial total de um sistema de partículas, então

$$T + V = \text{constante} \tag{19}$$

Este é o *princípio de conservação de energia* para sistemas de partículas.

MOVIMENTO RELATIVO AO CENTRO DE MASSA

É, geralmente, útil descrever o movimento de um sistema de partículas relativamente ao centro de massas. Os seguintes teoremas são de importância fundamental. Em todos os casos, as plicas indicam um valor relativo do centro de massa.

Teorema 7.8. O momentum total linear de um sistema de partículas em torno do centro de massa é nulo. Em símbolos,

$$\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}'_\nu = \mathbf{0} \tag{20}$$

Teorema 7.9. O momentum angular total de um sistema de partículas em torno de um ponto qualquer O é igual ao momentum angular da massa total, admitida como estando concentrada no centro de massa, mais o momentum angular em torno do centro de massa. Em símbolos,

$$\mathbf{\Lambda} = \bar{\mathbf{r}} \times M\bar{\mathbf{v}} + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) \tag{21}$$

Teorema 7.10. A energia cinética total de um sistema de partículas em torno de um ponto qualquer O é igual à energia cinética de translação do centro de massa [admitindo que a massa total esteja concentrada ali], mais a energia cinética do movimento em torno do centro de massa. Em símbolos,

$$T = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu v_\nu'^2 \tag{22}$$

Teorema 7.11. O torque externo total em torno do centro de massas é igual à razão de mudança do momentum angular, em torno do centro de massa, pelo tempo, i.e., a equação (14) é válida não somente para sistemas de coordenadas inerciais, mas também para sistemas de coordenadas movendo-se com o centro de massa. Em símbolos,

$$\mathbf{\Lambda}' = \frac{d\mathbf{\Omega}'}{dt} \tag{23}$$

Se o movimento é descrito relativamente a pontos que não o centro de massa, os resultados dos teoremas acima ficam mais complicados.

IMPULSO

Se $\mathbf{F}$ é a força externa total atuante sobre um sistema de partículas, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt \tag{24}$$

é chamado de *impulso linear total* ou, mais sucintamente, *impulso total*. Como no caso de uma partícula, pode-se provar que

Teorema 7.12. O impulso linear total é igual à mudança de momentum linear.

Igualmente, se $\mathbf{\Lambda}$ é o torque externo total aplicado a um sistema de partícula, em torno da origem O, então

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{\Lambda}\, dt \tag{25}$$

é chamado de *impulso angular* total. Pode-se provar que

Teorema 7.13. O impulso angular total é igual à mudança de momentum angular.

RESTRIÇÕES. RESTRIÇÕES HOLONÔMICAS OU NÃO

Geralmente, na prática, o movimento de uma partícula ou sistema de partículas é restrito de alguma maneira. Por exemplo, em *corpos rígidos* [considerados nos caps. 9 e 10], o movimento deve ser tal que a distância entre duas partículas quaisquer do corpo rígido é sempre a mesma. Um outro exemplo é o movimento de partículas restritos a curvas ou superfícies.

As limitações do movimento são, geralmente, chamadas de *restrições*. Se uma condição de restrição pode ser expressa com uma equação do tipo

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0 \tag{26}$$

relacionando os vetores de posição das partículas com o tempo, então a restrição é chamada de *holonômica*. Se não puder ser representada assim, ela é chamada de *não-holonômica*.

DESLOCAMENTOS VIRTUAIS

Considere duas configurações possíveis de um sistema de partículas em um instante particular, que sejam consistentes com as forças e restrições. Para ir de uma configuração à outra, necessita-se somente dar à ν-ésima partícula um deslocamento $\delta\mathbf{r}_\nu$ da posição anterior para a nova. Chama-se $\delta\mathbf{r}_\nu$ de *deslocamento virtual*, para distingui-lo de um *deslocamento real* [representado por $d\mathbf{r}_\nu$], o qual ocorre em um intervalo de tempo onde forças e restrições poderiam mudar. O símbolo δ tem as propriedades comuns do diferencial d; por exemplo, $\delta(\text{sen}\,\theta) = \cos\theta \cdot \delta\theta$.

ESTÁTICA DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS. PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

Para que um sistema de partículas fique em equilíbrio, é necessário que a força atuante resultante sobre cada partícula seja nula, i.e., $\mathbf{F}_\nu = 0$. Segue-se que $\mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$, onde $\mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu$ é chamado de *trabalho virtual*. Somando isto, tem-se

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{27}$$

Se estão presentes restrições, pode-se escrever

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(a)} + \mathbf{F}_\nu^{(c)} \tag{28}$$

onde $\mathbf{F}_\nu^{(a)}$ e $\mathbf{F}_\nu^{(c)}$ são, respectivamente, *forças reais* e *forças restritivas* atuantes sôbre a ν-ésima partícula. Admitindo que o trabalho virtual das forças restritivas é nulo [o que é verdade para corpos rígidos e para movimento sobre curvas ou superfícies sem fricção], chega-se ao

Teorema 7.14. Um sistema de partículas está em equilíbrio se, e somente se, o trabalho virtual total das forças reais for nulo, i.e., se

$$\sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{29}$$

Isto é, geralmente, chamado de *princípio do trabalho virtual.*

EQUILÍBRIO EM CAMPOS CONSERVATIVOS. ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO

Os resultados para o equilíbrio de uma partícula em um campo de força conservativo [veja o 2.° capítulo] podem ser generalizados para sistema de partículas. Os seguintes teoremas resumem os resultados básicos.

Teorema 7.15. Se V é o potencial total de um sistema de partículas dependendo das coordenadas $q_1, q_2, \ldots$, então o sistema estará em equilíbrio, se

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots \tag{31}$$

Como o trabalho virtual realizado sobre o sistema é

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots$$

(31) é equivalente ao princípio do trabalho virtual.

Teorema 7.16. Um sistema de partículas estará em *equilíbrio estável*, se o potencial V for um mínimo.

No caso de V depender de somente uma coordenada, seja ela q_1, as condições suficientes são

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} > 0$$

Os outros casos de equilíbrio, onde o potencial não é um mínimo, são chamados de *instáveis*.

PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

Embora o teorema 7.14 se aplique à estática de um sistema de partículas, ele pode ser reformulado para dar um teorema semelhante para a Dinâmica. Para isto, note-se que, de acordo com a segunda lei de Newton, do movimento,

$$\mathbf{F}_\nu = \dot{\mathbf{p}}_\nu \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}_\nu - \dot{\mathbf{p}}_\nu = 0 \tag{30}$$

onde $\mathbf{p}_\nu$ é o momentum da ν-ésima partícula. A segunda equação significa dizer que um sistema de partículas em movimento pode ser considerado como estando em equilíbrio sob uma força $\mathbf{F}_\nu - \dot{\mathbf{p}}_\nu$, i.e., a força real junto com a força adicionada $-\dot{\mathbf{p}}_\nu$ sobre a partícula, que é, geralmente, chamada de *força efetiva reversa.* Com o uso do trabalho virtual, chega-se ao

Teorema 7.17. Um sistema de partículas move-se de tal modo que o trabalho virtual total

$$\sum_{\nu=1}^{N} (\mathbf{F}_\nu^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_\nu)\ \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{32}$$

Com êste teorema, o qual é, geralmente, chamado *princípio de D'Alembert*, pode-se considerar a dinâmica como um caso especial da estática.

Problemas Resolvidos

GRAUS DE LIBERDADE

7.1. Determine o número de graus de liberdade em cada um dos seguintes casos: (*a*) uma partícula movendo-se em uma dada curva espacial; (*b*) cinco partículas movendo-se livremente em um plano; (*c*) cinco partículas movendo-se livremente no espaço; (*d*) duas partículas ligadas entre si por uma haste rígida movendo-se livremente em um plano.

(*a*) A curva pode ser descrita pelas equações paramétricas $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ onde s é o parâmetro. Então, a posição de uma partícula sobre a curva é determinada pela especificação de uma coordenada e, assim, há um grau de liberdade.

(*b*) Cada partícula requer duas coordenadas, para especificar posição no plano. Assim, $5 \cdot 2 = 10$ coordenadas são necessárias para especificar as posições de todas as cinco partículas, i.e., o sistema tem 10 graus de liberdade.

(*c*) Como cada partícula requer três coordenadas para especificar a sua posição, o sistema tem $5 \cdot 3 = 15$ graus de liberdade.

(*d*) *Método* 1.

As coordenadas de suas partículas podem ser expressas por $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, i.e., um total de 4 coordenadas. Entretanto, como a distância entre estes

pontos é uma constante a [o comprimento de uma barra rígida] tem-se que $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = a^2$ e, assim, uma das coordenadas pode ser expressa em função das outras. Portanto, há $4 - 1 = 3$ graus de liberdade.

Método 2.

O movimento é completamente descrito se forem dadas duas coordenadas do centro de massa e o ângulo feito entre a haste e uma direção fixa. Assim, há $2 + 1 = 3$ graus de liberdade.

7.2. Ache o número de graus de liberdade de um corpo rígido que (*a*) possa mover-se livremente no espaço tridimensional, (*b*) tenha um ponto fixo, mas podendo mover-se no espaço em tôrno deste ponto.

(*a*) *Método* 1.

Se 3 pontos não-colineares de um corpo rígido são fixos no espaço, então o corpo rígido está também fixo no espaço. Considere que as coordenadas destes pontos tenham coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), respectivamente, um total de 9. Como o corpo é rígido, devem-se ter as relações

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{constante},$$
$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = \text{constante},$$
$$(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = \text{constante}.$$

Assim, três coordenadas podem ser expressas em função das 6 restantes. Portanto, são necessárias 6 coordenadas independentes para descrever o movimento, i.e., há três graus de liberdade.

Método 2.

Para fixar um ponto do corpo rígido, precisa-se de 3 coordenadas. Um eixo por este ponto está fixo, se forem especificadas duas razões dos co-senos diretores deste eixo. Uma rotação em torno do eixo pode ser descrita por uma coordenada angular. O número total de coordenadas requerido, i.e., o número de graus de liberdade, é $3 + 2 + 1 = 6$.

(*b*) O movimento é completamente especificado se forem conhecidas as coordenadas de dois pontos, sejam eles (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), onde o ponto fixo é considerado como a origem do sistema de coordenadas. Mas, como o corpo é rígido, devem-se ter

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{constante}, \quad x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = \text{constante},$$
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = \text{constante},$$

de onde três coordenadas podem ser achadas em termos das outras 3 restantes. Assim, há três graus de liberdade.

O CENTRO DE MASSA E O MOMENTUM DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

7.3. Prove o teorema 7.1: o momentum total de um sistema de partículas pode ser achado multiplicando-se a massa total do sistema M pela velocidade $\bar{\mathbf{v}}$ do centro de massa.

O centro de massa é, por definição, $\bar{\mathbf{r}} = \dfrac{\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu}{M}$.

Então, o momentum total é $\mathbf{p} = \sum m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu = M\, d\bar{\mathbf{r}}/dt = M\bar{\mathbf{v}}$.

7.4. Prove o teorema 7.2: O centro de massa de um sistema de partículas move-se como se a massa total e a força externa resultante fossem aplicadas neste ponto.

Seja $\mathbf{F}_\nu$ a força externa resultante aplicada sobre a partícula ν, enquanto $\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ é a força interna sobre a partícula ν devido à partícula λ. Será admitido que $\mathbf{f}_{\nu\nu} = 0$, i.e., uma partícula não exerce força sobre si mesma.

Pela segunda lei de Newton, a força total sobre a partícula ν é

$$\mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d\mathbf{p}_\nu}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(m_\nu \mathbf{r}_\nu) \qquad (1)$$

onde o segundo termo à esquerda da igualdade representa a fôrça interna resultante sobre a partícula ν devido a todas as outras partículas.

Fazendo a somatória sôbre todas as partículas ν na equação (1), acha-se

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu\right\} \qquad (2)$$

Agora, de acordo com a terceira lei de Newton da ação e reação, $\mathbf{f}_{\nu\lambda} = -\mathbf{f}_{\lambda\nu}$ e, assim, a somatória dupla do lado esquerdo da igualdade (2) é nula. Então, se for escrito

$$\mathbf{F} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \qquad \text{e} \qquad \bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu \qquad (3)$$

(2) fica

$$\mathbf{F} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

Como $\mathbf{F}$ é a força externa total, sôbre todas as partículas, aplicada no centro de massa $\bar{\mathbf{r}}$, o resultado pedido está provado.

7.5. Um sistema de partículas consiste na massa de 3 gramas localizada em $(1, 0, -1)$, uma outra de 5 gramas em $(-2, 1, 3)$ e uma terceira de 2 gramas em $(3, -1, 1)$. Ache as coordenadas do centro de massa.

Os vetores-posição das partículas são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_3 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Então, o centro de massa é dado por

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{3(\mathbf{i} - \mathbf{k}) + 5(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + 2(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})}{3 + 5 + 2} = -\frac{1}{10}\mathbf{i} + \frac{3}{10}\mathbf{j} + \frac{7}{5}\mathbf{k}$$

Assim, as coordenadas do centro de massa são $(-\frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{5})$.

7.6. Prove que, se o momentum total de um sistema é constante, i.e., ele é conservado, então o centro de massa está em repouso ou em movimento, com velocidade constante.

O momentum total do sistema é dado por

$$\mathbf{p} = \sum m_\nu \mathbf{v}_\nu = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu = M\frac{d}{dt}\left\{\frac{\sum m_\nu \mathbf{r}_\nu}{M}\right\} = M\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}$$

Então, se $\mathbf{p}$ é constante, também $d\bar{\mathbf{r}}/dt$ o será, que é a velocidade do centro de massa.

7.7. Explique por que a ejeção para trás de gases em alta velocidade pelos bocais de um foguete farão com que ele se mova para frente.

Como as partículas de gás se movem para trás em alta velocidade e como o centro de massa não se move. o foguete deve mover-se para frente. Para aplicações envolvendo movimento de foguete, veja o cap. 8.

7.8. Ache o centróide de uma região $\mathcal{R}$ como na fig. 7-3.

Considere o elemento-volume $\Delta\tau_\nu$ do sólido. A massa deste elemento-volume é

$$\Delta M_\nu = \sigma_\nu \Delta\tau_\nu = \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu$$

onde σ_ν é a densidade [massa por unidade de volume] e Δx_ν, Δy_ν, Δz_ν são as dimensões do elemento-volume. Então, o centróide é dado, aproximadamente, por

$$\frac{\Sigma\, \mathbf{r}_\nu \Delta M_\nu}{\Sigma\, \Delta M_\nu} = \frac{\Sigma\, \mathbf{r}_\nu \sigma_\nu \Delta\tau_\nu}{\Sigma\, \sigma_\nu \Delta\tau_\nu} = \frac{\Sigma\, \mathbf{r}_\nu \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu}{\Sigma\, \sigma_\nu \Delta x_\nu \Delta y_\nu \Delta z_\nu}$$

onde a somatória é sobre todos os elementos-volume do sólido.

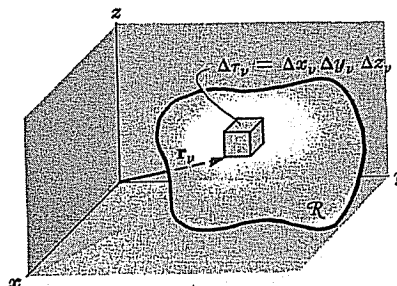



Fig. 7-3

Tomando o limite para o número de elementos-volume tendendo para infinito, tal que $\Delta\tau_\nu \to 0$ ou $\Delta x_\nu \to 0$, $\Delta y_\nu \to 0$, $\Delta z_\nu \to 0$, obtém-se para o centróide do sólido:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\, dM}{\int_{\mathcal{R}} dM} = \frac{\int_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\sigma\, d\tau}{\int_{\mathcal{R}} \sigma\, d\tau} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} \mathbf{r}\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}$$

onde a integração é sobre $\mathcal{R}$, como é indicado

Considerando-se $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\bar{\mathbf{r}} = \bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j} + \bar{z}\mathbf{k}$, pode-se escrever, em forma de componentes,

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} x\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{y} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} y\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}, \quad \bar{z} = \frac{\iiint_{\mathcal{R}} z\sigma\, dx\, dy\, dz}{\iiint_{\mathcal{R}} \sigma\, dx\, dy\, dz}$$

7.9. Ache o centróide da região limitada pelos planos $x + y + z = 0$ e os planos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

A região, que é um tetraedo, é indicada pela fig. 7-4. Para achar o centróide, usam-se os resultados do probl. 7.8.

Ao fazer-se a somatória sobre todos os elementos da região, é aconselhável proceder-se de forma ordenada. Uma possibilidade é somar, primeiro, todos os termos correspondentes aos elementos-volume contidos em uma coluna, tal como a PQ na figura. Isto significa adicionar todas as colunas, tais como PQ, contidas na fatia RS e, conseqüentemente, significa somar todos os cubos contidos em tal fatia. Finalmente, variar x_ν. Isto significa adicionar todas as fatias como RS.

Ao executar-se a integração sobre $\mathcal{R}$, usa-se a mesma idéia. Assim, mantendo x e y constantes, integre de $z = 0$ [base da coluna PQ] a $z = a - x - y$ [topo da coluna PQ]. A seguir, mantenha x constante e integre em relação a y. Isto significa a adição das colunas tendo as bases no plano xy [$z = 0$] localizadas entre R [onde $y = 0$] e S [onde $x + y = a$ ou $y = a - x$], e a integração é de $y = 0$ a $y = a - x$.

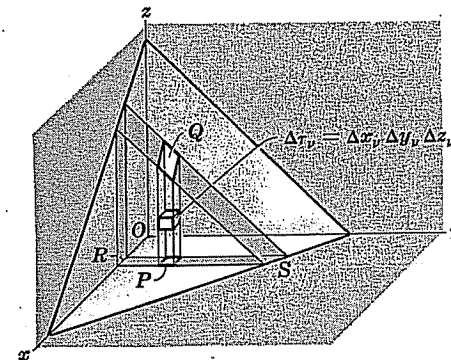



Fig. 7-4

Finalmente, somam-se todas as fatias paralelas ao plano yz, o que significa integrar-se de $x = 0$ a $x = a$. Obtém-se, assim

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y} \sigma(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\, dz\, dy\, dx}{\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a-x}\int_{z=0}^{a-x-y} \sigma\, dz\, dy\, dx}$$

Como σ é constante neste caso, ela pode ser cancelada. O denominador sem σ é avaliado dando $a^3/6$, e o numerador sem σ é $(a^4/24)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Assim, o centro de massa é $\bar{\mathbf{r}} = (a/4)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ ou $\bar{x} = a/4$, $\bar{y} = a/4$, $\bar{z} = a/4$.

7.10. Ache o centróide de uma região circular de raio a.

Método 1. Usando coordenadas retangulares.

Escolha a região como na fig. 7-5. A equação do círculo C é $x^2 + y^2 = a^2$ ou $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ com $y > 0$.

Se σ for a massa por unidade de área, considerada constante, então as coordenadas do centróide são dados por

$$\bar{x} = \frac{\int_{\mathscr{R}} x\,\sigma\,dA}{\int_{\mathscr{R}} \sigma\,dA} = \frac{\iint_{\mathscr{R}} x\,dy\,dx}{\iint_{\mathscr{R}} dy\,dx} = \frac{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy\,dx}{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathscr{R}} y\,\sigma\,dA}{\int_{\mathscr{R}} \sigma\,dA} = \frac{\iint_{\mathscr{R}} y\,dy\,dx}{\iint_{\mathscr{R}} dy\,dx} = \frac{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy\,dx}{\int_{x=-a}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi}$$

Note que se pode escrever $\bar{x} = 0$ imediatamente, pela simetria do centróide em relação ao eixo y. O denominador para $\bar{y}$ pode ser avaliado sem integração, sòmente notando-se que ela representa a área semicircular que é $\frac{1}{2}\pi a^2$.

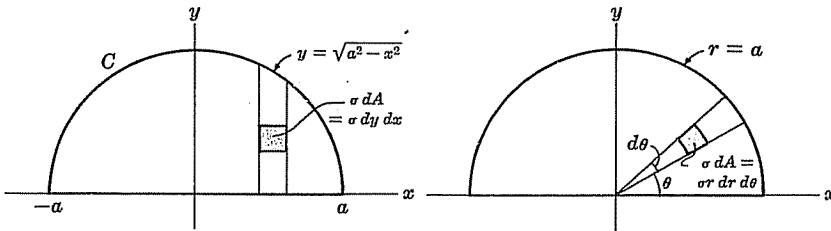
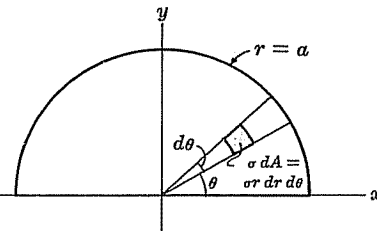



Fig. 7-5 **Fig. 7-6**

Método 2. Usando coordenadas polares.

A equação do círculo é $r = a$ [veja a fig. 7-6]. Como no método anterior, pode-se ver que, por simetria, o centróide deve estar no eixo y, tal que $\bar{x} = 0$.

Como $y = r \operatorname{sen}\theta$ e $dA = r\,dr\,d\theta$ em coordenadas polares, pode-se escrever

$$\bar{y} = \frac{\int_{\mathscr{R}} y\,\sigma\,dA}{\int_{\mathscr{R}} \sigma\,dA} = \frac{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} (r \operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a} r\,dr\,d\theta} = \frac{2a^3/3}{\pi a^2/2} = \frac{4a}{3\pi}$$

7.11. Ache o centro de massa de uma hemisfera sólida e uniforme de raio a.

Por simetria, o centro de massa está no eixo z [veja a fig. 7-7]. Subdivida a hemisfera em placas sólidas circulares de raio r, tal como $ABCDEA$. Se o centro G deste anel está a uma distância z do centro O da hemisfera, $r^2 + z^2 = a^2$. Então, se dz é a espessura da placa, o volume de cada anel é

$$\pi r^2\,dz = \pi(a^2 - z^2)\,dz$$

e a massa é $\pi\sigma(a^2 - z^2)\,dz$. Assim, tem-se

$$\bar{z} = \frac{\int_{z=0}^{a} \pi\sigma z(a^2 - z^2)\,dz}{\int_{z=0}^{a} \pi\sigma(a^2 - z^2)\,dz} = \frac{3}{8}a$$

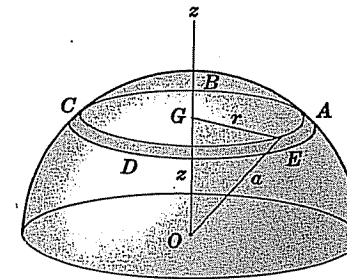



Fig. 7-7

MOMENTUM ANGULAR E TORQUE

7.12. Prove o teorema 7.4: O torque externo total sobre um sistema de partículas é igual à razão de mudança de momentum angular do sistema pelo tempo, desde que as forças internas entre as partículas sejam forças centrais.

Como na equação (1) do probl. 7.4, tem-se

$$\mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d\mathbf{p}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) \tag{1}$$

Multiplicando-se ambos os membros de (1) por $\mathbf{r}_\nu \times$, tem-se

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \mathbf{r}_\nu \times \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) \tag{2}$$

Como

$$\mathbf{r}_\nu \times \frac{d}{dt}(m_\nu \mathbf{v}_\nu) = \frac{d}{dt}\{m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\} \tag{3}$$

(2) fica

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}\{m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\} \tag{4}$$

Fazendo a somatória em ν de (4), acha-se

$$\sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\right\} \tag{5}$$

E a dupla somatória em (5) é composta de termos, tais como

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} + \mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{f}_{\lambda\nu} \tag{6}$$

que resultam, usando a igualdade $\mathbf{f}_{\lambda\nu} = -\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ de acordo com a terceira lei de Newton, em

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} - \mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} = (\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\lambda) \times \mathbf{f}_{\nu\lambda} \tag{7}$$

Então, como se supõe que a força seja central, i.e., $\mathbf{f}_{\nu\lambda}$ tem a mesma direção que $\mathbf{r}_\nu - \mathbf{r}_\lambda$, segue-se que (7) é nula e que a somatória dupla em (5) é também nula. Assim, a equação (5) fica

$$\sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu = \frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)\right\} \quad \text{ou} \quad \mathbf{\Lambda} = \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt}$$

onde $\mathbf{\Lambda} = \sum_\nu \mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$, $\mathbf{\Omega} = \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu)$.

TRABALHO, ENERGIA CINÉTICA E ENERGIA POTENCIAL

7.13. Prove o teorema 7.6: O trabalho total realizado, ao mover-se um sistema de partículas de um estado a outro com energias cinéticas T_1 e T_2, respectivamente, é $T_2 - T_1$.

A equação do movimento da ν-ésima partícula no sistema é

$$\mathscr{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} = \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{1}$$

Tomando o produto escalar de ambos os membros por $\dot{\mathbf{r}}_\nu$, tem-se:

$$\mathscr{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{2}$$

Como

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{m_\nu(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu)\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2)$$

(2) pode ser escrita

$$\mathscr{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2) \tag{3}$$

A somatória sobre ν na equação (3) é

$$\sum_\nu \mathscr{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu m_\nu v_\nu^2\right) \tag{4}$$

Integrando ambos os membros de (4) em relação a t de $t = t_1$ a $t = t_2$, acha-se

$$W_{12} = \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt = \sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt + \sum_\nu \sum_\lambda \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt$$
$$= \frac{1}{2}\sum_\nu \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(m_\nu v_\nu^2)\, dt$$

Usando o fato de que $\dot{\mathbf{r}}_\nu \, dt = d\mathbf{r}_\nu$ e os símbolos 1 e 2, para os estados nos instantes t_1 e t_2, respectivamente, isto pode ser escrito como

$$W_{12} = \sum_\nu \int_1^2 \mathscr{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_\nu \int_1^2 \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu + \sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot d\mathbf{r}_\nu = T_2 - T_1 \tag{5}$$

onde T_1 e T_2 são as energias cinéticas nos instantes t_1 e t_2, respectivamente. Como

$$W_{12} = \sum_\nu \int_1^2 \mathscr{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu \tag{6}$$

é o trabalho total realizado (por fôrças internas e externas) ao se mover o sistema de um estado a outro, o resultado pedido é obtido.

Deve ser notado que a somatória dupla em (5), indicando o trabalho realizado pelas fôrças internas, não pode ser reduzida a zero pelo uso da terceira lei de Newton ou pela hipótese das fôrças centrais. Isto está em contradição com as somatórias duplas dos probls. 7.4 e 7.12, que podem ser reduzidas a zero.

7.14. Considere que as forças internas de um sistema de partículas são conservativas e derivadas de um potencial

$$V_{\lambda\nu}(r_{\lambda\nu}) = V_{\nu\lambda}(r_{\nu\lambda})$$

onde $r_{\lambda\nu} = r_{\nu\lambda} = \sqrt{(x_\lambda - x_\nu)^2 + (y_\lambda - y_\nu)^2 + (z_\lambda - z_\nu)^2}$ é a distância entre as partículas λ e ν do sistema.

(*a*) Prove que $\sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2}\sum_\nu \sum_\lambda dV_{\lambda\nu}$, onde $\mathbf{f}_{\lambda\nu}$ é a fôrça interna sôbre a partícula ν devido à partícula λ.

(*b*) Avalie a somatória $\sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\lambda\nu} \, d\mathbf{r}_\nu$ do probl. 7.13.

(*a*) A força atuante sobre a partícula ν é

$$\mathbf{f}_{\nu\lambda} = -\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}\mathbf{i} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\nu}\mathbf{j} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\nu}\mathbf{k} = -\text{grad}_\nu V_{\lambda\nu} = -\nabla_\nu V_{\lambda\nu} \quad (1)$$

A força atuante sobre a partícula λ é

$$\mathbf{f}_{\lambda\nu} = -\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}\mathbf{i} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\lambda}\mathbf{j} - \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\lambda}\mathbf{k} = -\text{grad}_\lambda V_{\lambda\nu} = -\nabla_\lambda V_{\lambda\nu} = -\mathbf{f}_{\nu\lambda} \quad (2)$$

O trabalho realizado por estas forças, durante os deslocamentos $d\mathbf{r}_\nu$ e $d\mathbf{r}_\lambda$ das partículas ν e λ, respectivamente, é

$$\mathbf{f}_{\nu\lambda} \cdot d\mathbf{r}_\nu + \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\lambda = -\left\{\frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\nu}dy_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\nu}dz_\nu + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial x_\lambda}dx_\lambda + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial y_\lambda}dy_\lambda + \frac{\partial V_{\lambda\nu}}{\partial z_\lambda}dz_\lambda\right\} = -dV_{\lambda\nu}$$

Então, o trabalho total realizado pelas fôrças internas é

$$\sum_\nu \sum_\lambda \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2}\sum_\nu \sum_\lambda dV_{\lambda\nu} \quad (3)$$

o fator $\frac{1}{2}$ à direita da igualdade sendo introduzido, pois, senão, os termos da somatória entrariam em dobro.

(*b*) Pela integração de (3) da parte (*a*), tem-se

$$\sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 \mathbf{f}_{\lambda\nu} \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\frac{1}{2}\sum_\nu \sum_\lambda \int_1^2 dV_{\lambda\nu} = V_1^{(int)} - V_2^{(int)} \quad (4)$$

onde $V_1^{(int)}$ e $V_2^{(int)}$ representam os potenciais internos totais

$$\frac{1}{2}\sum_\nu \sum_\lambda V_{\lambda\nu} \quad (5)$$

nos instantes t_1 e t_2, respectivamente.

7.15. Prove que, se ambas as fôrças externas e internas, para um sistema de partículas, são conservativas, então o princípio de conservação de energia é válido.

Se as fôrças externas são conservativas, então tem-se

$$\mathbf{F}_\nu = -\nabla V_\nu \quad (1)$$

e, assim,

$$\sum_\nu \int_1^2 \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = -\sum_\nu \int_1^2 dV_\nu = V_1^{(ext)} - V_2^{(ext)} \quad (2)$$

onde $V_1^{(ext)}$ e $V_2^{(ext)}$ representam o potencial externo total

$$\sum_\nu V_\nu$$

nos instantes t_1 e t_2, respectivamente.

Usando (2) e a equação (4) do probl. 7.14(*b*) na equação (5) do probl. 7.13, acha-se

$$T_2 - T_1 = V_1^{(ext)} - V_2^{(ext)} + V_1^{(int)} - V_2^{(int)} = V_1 - V_2 \quad (3)$$

onde $\quad V_1 = V_1^{(ext)} + V_1^{(int)} \quad$ e $\quad V_2 = V_2^{(ext)} + V_2^{(int)} \quad (4)$

são as energias potenciais totais respectivas [externa e interna] nos instantes t_1 e t_2. Acha-se, então, de (3),

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \text{ou} \quad T + V = \text{constante}, \quad (5)$$

que é o princípio de conservação de energia.

MOVIMENTO RELATIVO AO CENTRO DE MASSA

7.16. Sejam $\mathbf{r}'_\nu$ e $\mathbf{v}'_\nu$, respectivamente, os vetores-posição e velocidade da partícula ν relativamente ao centro de massa. Prove que (*a*) $\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu = 0$, (*b*) $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = 0$.

(*a*) Seja r_ν o vetor posição da partícula ν relativamente a O e $\bar{\mathbf{r}}$ o vetor posição do centro de massa C relativamente a O. Então da definição do centro de massa,

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}_\nu \quad (1)$$

onde $M = \sum_\nu m_\nu$. Da fig. 7-8, tem-se

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \quad (2)$$

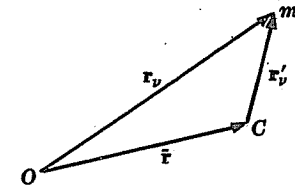



Fig. 7-8

Então, substituindo (2) em (1), acha-se

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{M}\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}$$

de onde

$$\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{0} \quad (3)$$

(*b*) Diferenciando-se ambos os lados de (3) em relação a t, tem-se $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \mathbf{0}$.

7.17. Prove o teorema 7.9: O momentum angular total de um sistema de partículas em tôrno de um ponto qualquer O é igual ao momentum angular da massa total admitida como sendo localizada no centro de massa, mais o momentum angular em tôrno do centro de massa.

Seja $\mathbf{r}_\nu$ o vetor-posição da partícula ν relativamente a O, $\bar{\mathbf{r}}$ o vetor-posição do centro de massa C relativamente a O e $\mathbf{r}'_\nu$ o vetor-posição da partícula ν relativamente a C. Então,

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \tag{1}$$

Diferenciando em relação a t, acha-se

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\mathbf{r}}'_\nu + \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \mathbf{v}'_\nu + \bar{\mathbf{v}} \tag{2}$$

onde $\bar{\mathbf{v}}$ é a velocidade do centro de massa relativamente a O, $\mathbf{v}_\nu$ é a velocidade da partícula ν relativamente a O, e $\mathbf{v}'_\nu$ é a velocidade da partícula ν relativamente a C.

O momentum angular total do sistema em torno de O é

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \sum_\nu m_\nu\{(\mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}}) \times (\mathbf{v}'_\nu + \bar{\mathbf{v}})\} \\ &= \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) + \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \bar{\mathbf{v}}) + \sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}'_\nu) + \sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}})\end{aligned} \tag{3}$$

Ora, pelo probl. 7.16,

$$\sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \bar{\mathbf{v}}) = \{\sum_\nu m_\nu \mathbf{r}'_\nu\} \times \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

$$\sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}'_\nu) = \bar{\mathbf{r}} \times \{\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu\} = \mathbf{0}$$

$$\sum_\nu m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}) = \{\sum_\nu m_\nu\}(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}}) = M(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}})$$

Então, (3) fica, como foi pedido,

$$\Lambda = \sum_\nu m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \times \mathbf{v}'_\nu) + M(\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}})$$

7.18. Prove o teorema 7.10: A energia cinética total de um sistema de partículas em tôrno de um ponto O é igual à energia cinética do centro de massa [admitindo tôda a massa concentrada ali] mais a energia cinética do movimento em tôrno do centro de massa.

A energia cinética relativamente a O [veja a fig. 7-8] é

$$T = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu) \tag{1}$$

Usando a equação (2) do probl. 7.16, acha-se

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\mathbf{r}}'_\nu = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_\nu$$

Assim, (1) pode ser escrita

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu\{(\bar{\mathbf{v}} \times \mathbf{v}'_\nu)\cdot(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_\nu)\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{v}} + \sum_\nu m_\nu \bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}'_\nu + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu\cdot\mathbf{v}'_\nu \\ &= \frac{1}{2}(\sum_\nu m_\nu)\bar{v}^2 + \bar{\mathbf{v}}\cdot\{\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu\} + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v'^2_\nu \\ &= \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_\nu m_\nu v'^2_\nu\end{aligned}$$

pois $\sum_\nu m_\nu \mathbf{v}'_\nu = \mathbf{0}$ pelo probl. 7.16.

IMPULSO

7.19. Prove o teorema 7.12: O impulso linear total é igual à mudança de momentum linear.

A fôrça externa total pela equação (4) do probl. 7.4 é

$$\mathbf{F} = M\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{dt^2} = M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}$$

Então, o impulso linear total é

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}\,dt = M\bar{\mathbf{v}}_2 - M\bar{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$$

onde $\mathbf{p}_1 = M\bar{\mathbf{v}}_1$ e $\mathbf{p}_2 = M\bar{\mathbf{v}}_2$ representa os momentos totais nos instantes t_1 e t_2, respectivamente.

RESTRIÇÕES. RESTRIÇÕES HOLONÔMICAS E NÃO HOLONÔMICAS

7.20. Em cada um dos seguintes casos, verifique se a restrição é holonômica ou não e explique por quê: (*a*) um glóbulo perfurado movendo-se em um fio circular; (*b*) uma partícula deslizando por um plano inclinado, sob a influência da gravidade; (*c*) uma partícula deslizando sobre uma esfera de um ponto próximo ao seu tôpo, sob a influência da gravidade.

(*a*) A restrição é holonômica, pois o glóbulo perfurado, que é considerado uma partícula, é restringido a mover-se em um fio circular.

(*b*) A restrição é holonômica, pois a partícula é restringida a mover-se ao longo de uma superfície que, neste caso, é um plano.

(*c*) A restrição não é holonômica, pois a partícula, após alcançar uma certa posição sobre a esfera, deixá-la-á.

Um outro modo de ver isto é notar que, se $\mathbf{r}$ é o vetor-posição da partícula relativamente ao centro da esfera como origem e a é o raio da esfera;

então, a partícula move-se de modo que $\mathbf{r}^2 > a^2$. Isto é uma restrição não-holonômica, pois ela não é da forma de (26) da introdução deste capítulo. Um exemplo de uma restrição holonômica seria $\mathbf{r}^2 = a^2$.

ESTÁTICA. PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL. ESTABILIDADE

7.21. Prove o princípio do trabalho virtual, teorema 7.14.

Para o equilíbrio, a fôrça resultante $\mathbf{F}_\nu$ em cada partícula deve ser nula, tal que

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{1}$$

Mas, como $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu^{(a)} + \mathbf{F}_\nu^{(c)}$, onde $\mathbf{F}_\nu^{(a)}$ e $\mathbf{F}_\nu^{(c)}$ são as fôrças reais e restritivas atuantes sôbre a ν-ésima partícula, (1) pode ser escrito como

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu + \sum_k \mathbf{F}_\nu^{(c)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{2}$$

Se fôr admitido que o trabalho virtual da força restritiva é nula, a segunda somatória do lado esquerdo da igualdade (2) é nula, ficando-se com

$$\sum_\nu \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0 \tag{3}$$

que é o princípio do trabalho virtual.

7.22. Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão localizadas sôbre uma cunha dupla, sem atrito e conectadas por um fio, inextensível e sem massa, passando por um suporte sem atrito [veja a fig. 7-9]. Use o princípio do trabalho virtual, para mostrar que, para se obter o equilíbrio, deve-se ter

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

onde α_1 e α_2 são os ângulos da cunha dupla.

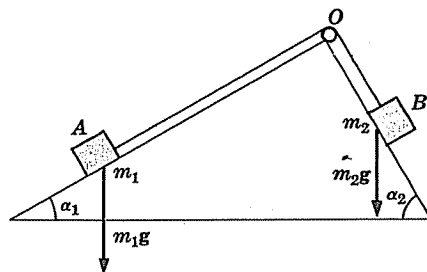



Fig. 7-9

Método 1.

Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ os vetores de posição respectivos das massas m_1 e m_2, relativamente a O.

As forças reais [devido à gravidade] atuantes sobre m_1 e m_2 são, respectivamente,

$$\mathbf{F}_1^{(a)} = m_1\mathbf{g}, \quad \mathbf{F}_2^{(a)} = m_2\mathbf{g} \tag{1}$$

De acôrdo com o princípio do trabalho virtual,

$$\sum \mathbf{F}_\nu^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = 0$$

ou

$$\mathbf{F}_1^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2^{(a)} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \tag{2}$$

onde $\delta\mathbf{r}_1$ e $\delta\mathbf{r}_2$ são os deslocamentos virtuais de m_1 e m_2 descendo os planos inclinados. Usando (1) e (2)

$$m_1\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \tag{3}$$

ou

$$m_1 g\, \delta r_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + m_2 g\, \delta r_2 \operatorname{sen}\alpha_2 = 0 \tag{4}$$

Então, como o fio é inextensível, i.e., $\delta r_1 + \delta r_2 = 0$ ou $\delta r_2 = -\delta r_1$, (4) fica

$$(m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2)\delta r_1 = 0$$

Mas, como δr_1 é arbitrário, deve-se ter

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1} \tag{5}$$

Método 2.

Quando não é óbvio que as fôrças são restritivas, que não realizam trabalho, podem-se levar em conta *tôdas* as forças e, então, aplicar o princípio do trabalho virtual. Assim, por exemplo, levando-se em conta as fôrças de reação $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$ dos planos inclinados sôbre as partículas e as fôrças de tração T_1 e T_2, o princípio do trabalho virtual fica

$$(m_1\mathbf{g} + \mathbf{T}_1 + \mathbf{R}_1) \cdot \delta\mathbf{r}_1 + (m_2\mathbf{g} + \mathbf{T}_2 + \mathbf{R}_2) \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \tag{6}$$

Ora, como os planos inclinados não têm atrito [tais que as fôrças de reação são perpendiculares aos planos inclinados] tem-se

$$\mathbf{R}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 = 0, \quad \mathbf{R}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \tag{7}$$

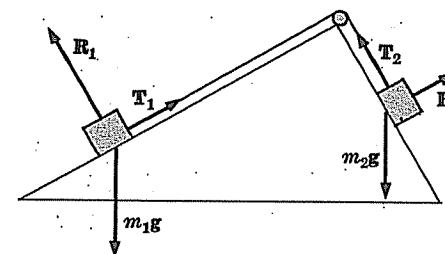



Fig. 7-10

Também, como não há atrito no suporte do fio, as tensões $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ são da mesma magnitude. Assim, tem-se, usando o fato de que $\delta\mathbf{r}_1$ e $\delta\mathbf{r}_2$ são dirigidos para baixo nos respectivos planos inclinados e o fato que $\delta r_2 = -\delta r_1$,

$$\mathbf{T}_1 \cdot \delta\mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_2 \cdot \delta\mathbf{r}_2 = -T_1\delta r_1 - T_2\delta r_2 = (T_2 - T_1)\delta r_1 = 0 \qquad (8)$$

como $T_1 = T_2$. Então, usando (7) e (8), (6) fica

$$m_1\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0$$

como foi obtido em (3).

7.23. Use o teorema 7.15 para resolver o probl. 7.22.

Considere que o fio tem o comprimento l e considere que os comprimentos de OA e OB sobre os planos inclinados [fig. 7-9] são x e l-x, respectivamente. A energia potencial total, usando um plano horizontal por O como nível de referência, é

$$V = -m_1 gx \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g(l-x)\operatorname{sen}\alpha_2$$

Então, para o equilíbrio, deve-se ter

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 + m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Deve-se notar que V não é um mínimo, neste caso. Assim, o equilíbrio não é estável, como é evidente fisicamente também.

PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

7.24. Use o princípio de D'Alembert para descrever o movimento das massas no probl. 7.22.

Introduzem-se as fôrças efetivas invertidas $m_1\ddot{\mathbf{r}}_1$ e $m_2\ddot{\mathbf{r}}_2$ na equação (3) do probl. 7.22, para obter

$$(m_1\mathbf{g} - m_1\ddot{\mathbf{r}}_1) \cdot \delta\mathbf{r}_1 + (m_2\mathbf{g} - m_2\ddot{\mathbf{r}}_2) \cdot \delta\mathbf{r}_2 = 0 \qquad (1)$$

Isto pode ser escrito na forma

$$(m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_1\ddot{r}_1)\delta r_1 + (m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 - m_2\ddot{r}_2)\delta r_2 = 0 \qquad (2)$$

Ora, como o fio é inextensível, tal que $r_1 + r_2$ = constante, tem-se

$$\delta r_1 + \delta r_2 = 0, \qquad \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2 = 0$$

ou $\delta r_2 = -\delta r_1$, $\ddot{r}_2 = -\ddot{r}_1$. Assim, (2) fica, após dividido por $\delta r_1 \neq 0$,

$$m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_1\ddot{r}_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2 - m_2\ddot{r}_1 = 0$$

ou

$$\ddot{r}_1 = \frac{m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2}{m_1 + m_2}$$

Assim, a partícula 1 descerá ou subirá pelo plano inclinado com uma aceleração constante, de acôrdo com a equação $m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 > m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2$ ou $m_1 g \operatorname{sen}\alpha_1 < m_2 g \operatorname{sen}\alpha_2$ respectivamente.

A partícula 2, nestes casos, subirá ou descerá, respectivamente, com a mesma aceleração constante.

Pode-se usar também um método análogo ao do segundo método do probl. 7.22.

PROBLEMAS DIVERSOS

7.25. Duas partículas, tendo massas m_1 e m_2, movem-se de modo que a sua velocidade relativa é $\mathbf{v}$ e a velocidade de seu centro de massa é $\bar{\mathbf{v}}$. Se $M = m_1 + m_2$ é a massa total e $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ é a *massa reduzida* do sistema, prove que a energia cinética total é

$$\tfrac{1}{2}M\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2.$$

Sejam $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\bar{\mathbf{r}}$ os vetores de posição em relação a O das massas m_1, m_2 e do centro de massa C, respectivamente.

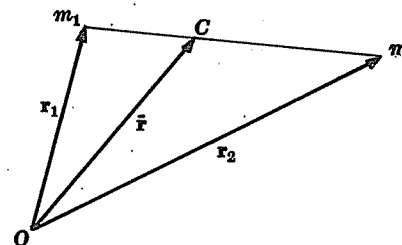



Fig. 7-11

Da definição do centro de massa, tem-se

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2}$$

ou, usando $\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2$, $\bar{\mathbf{v}} = \dot{\bar{\mathbf{r}}}$,

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2)\bar{\mathbf{v}} \qquad (1)$$

Se a velocidade de m_1 relativamente à de m_2 fôr $\mathbf{v}$, então

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

tal que

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \qquad (2)$$

Resolvendo (1) e (2), simultaneamente, acha-se

$$\mathbf{v}_1 = \bar{\mathbf{v}} + \frac{m_2\mathbf{v}}{m_1 + m_2}, \qquad \mathbf{v}_2 = \bar{\mathbf{v}} - \frac{m_1\mathbf{v}}{m_1 + m_2}$$

Então, a energia cinética total é

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\left(\bar{\mathbf{v}} + \frac{m_2 \mathbf{v}}{m_1+m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\bar{\mathbf{v}} - \frac{m_1 \mathbf{v}}{m_1+m_2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1+m_2)\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \end{aligned}$$

7.26. Ache o centróide de um fio semicircular uniforme de raio a.

Por simetria [veja a fig. 7-12], o centróide do fio deve estar no eixo y e, assim, $\bar{x} = 0$. Se σ é a massa por unidade de comprimento do fio, então, se ds representa um elemento de arco, têm-se $ds = a d\theta$ tal que

$$\bar{y} = \frac{\int_C y\sigma\, ds}{\int_C \sigma\, ds} = \frac{\int_0^\pi (a \operatorname{sen}\theta)(a\, d\theta)}{\int_0^\pi a\, d\theta}$$

$$= \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi}$$

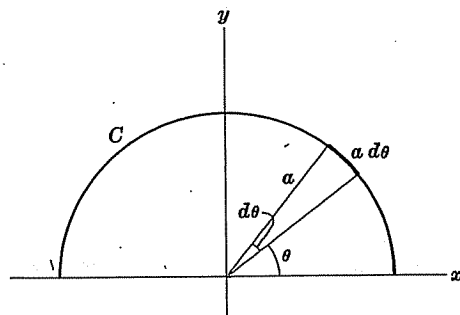



Fig. 7-12

7.27. Considere que n sistemas de partículas sejam dados, tendo centróides em $\bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2, \ldots \bar{\mathbf{r}}_n$; e massas totais $M_1, M_2, \ldots M_n$, respectivamente. Prove que o centróide de todos os sistemas está em

$$\frac{M_1\bar{\mathbf{r}}_1 + M_2\bar{\mathbf{r}}_2 + \ldots + M_n\bar{\mathbf{r}}_n}{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}$$

Seja o sistema 1 composto de massas m_{11} e $m_{12}\ldots$ localizada em $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12},\ldots$ respectivamente. Igualmente, seja o sistema 2 composto de massas $m_{21}, m_{22},\ldots$ localizadas em $\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{22},\ldots$ Então, por definição

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_{11}\mathbf{r}_{11} + m_{12}\mathbf{r}_{12} + \ldots}{m_{11} + m_{12} + \ldots} = \frac{m_{11}\mathbf{r}_{11} + m_{12}\mathbf{r}_{12} + \ldots}{M_1}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_{21}\mathbf{r}_{21} + m_{22}\mathbf{r}_{22} + \ldots}{m_{21} + m_{22} + \ldots} = \frac{m_{21}\mathbf{r}_{21} + m_{22}\mathbf{r}_{22} + \ldots}{M_2}$$

$$\vdots$$

$$\bar{\mathbf{r}}_n = \frac{m_{n1}\mathbf{r}_{n1} + m_{n2}\mathbf{r}_{n2} + \ldots}{m_{n1} + m_{n2} + \ldots} = \frac{m_{n1}\mathbf{r}_{n1} + m_{n2}\mathbf{r}_{n2} + \ldots}{M_n}$$

Assim, o centróide para todos os sistemas está localizado em

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{(m_{11}\mathbf{r}_{11}+m_{12}\mathbf{r}_{12}+\ldots)+(m_{21}\mathbf{r}_{21}+m_{22}\mathbf{r}_{22}+\ldots)+\ldots+(m_{n1}\mathbf{r}_{n1}+m_{n2}\mathbf{r}_{n2}+\ldots)}{(m_{11}+m_{12}+\ldots)+(m_{21}+m_{22}+\ldots)+\ldots+(m_{n1}+m_{n2}+\ldots)}$$

$$= \frac{M_1\bar{\mathbf{r}}_1 + M_2\bar{\mathbf{r}}_2 + \ldots + M_n\bar{\mathbf{r}}_n}{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}$$

7.28. Ache o centróide de um corpo sólido de densidade constante e que consiste em um cilindro de raio a e altura H, preso à uma hemisfera de raio a [veja a fig. 7-13].

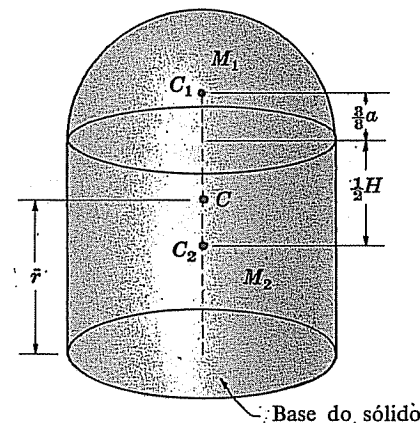



Fig. 7-13

Seja $\bar{r}$ a distância do centróide do corpo à sua base. O centróide do hemisfério de raio a está a uma distância $\frac{3}{8}a + H$ da base do corpo e sua massa é $M_1 = \frac{2}{3}\pi a^3\sigma$ [veja o probl. 7.11].

O centróide do cilindro de raio a e altura H está a uma distância $\frac{1}{2}H$ da base do sólido e sua massa é $M_2 = \pi a^2 H\sigma$.

Então, pelo probl. 7.27,

$$\bar{r} = \frac{(\frac{2}{3}\pi a^3\sigma)(\frac{3}{8}a + H) + (\pi a^2 H\sigma)(\frac{1}{2}H)}{\frac{2}{3}\pi a^3\sigma + \pi a^2 H\sigma} = \frac{3a^2 + 8aH + 6H^2}{8a + 12H}$$

7.29. Um furo circular de raio $a/2$ é cortado de uma região circular de raio a, como é mostrado na fig. 7-14. Ache o centróide da região sombreada assim obtida.

Por simetria, o centróide está localizado no eixo x, tal que $\bar{y} = 0$.

Pode-se trocar a região circular de raio a pela massa $M_1 = \pi a^2 \sigma$ concentrada em seu centróide $x_1 = a$ [fig. 7-15]. Igualmente, pode-se trocar o furo circular de raio $a/2$ pela *massa negativa* $M_2 = -\frac{1}{4}\pi a^2 \sigma$ concentrada em seu centróide em $x_2 = \frac{3}{2}a$. Então, o centróide está localizado no eixo x em

$$\bar{x} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} = \frac{(\pi a^2 \sigma)(a) + (-\frac{1}{4}\pi a^2 \sigma)(\frac{3}{2}a)}{\pi a^2 \sigma - \frac{1}{4}\pi a^2 \sigma} = \frac{5}{6}a$$

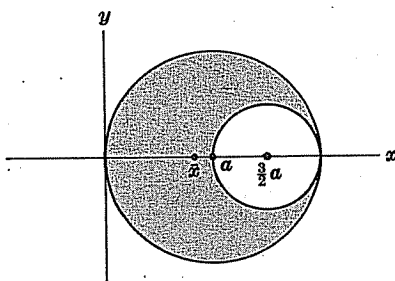
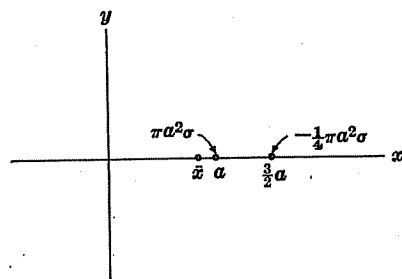



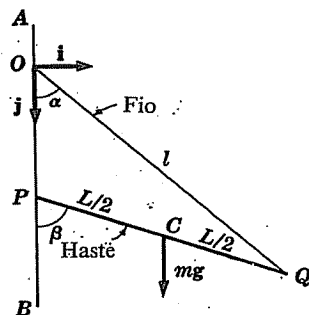
Fig. 7-14 Fig. 7-15

7.30. Uma haste uniforme PQ [veja a fig. 7-16] de massa m e comprimento L tem uma extremidade apoiada em uma parede vertical sem atrito AB, enquanto a sua outra extremidade Q está prêsa por meio de um fio inextensível OQ de comprimento l a um ponto fixo O na parede. Admitindo que o plano de P, Q e O é vertical e perpendicular à parede, mostre que o equilíbrio ocorre se

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{l\sqrt{3}}, \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{4L^2 - l^2}}{L\sqrt{3}}$$

Há somente uma fôrça real, i.e. o pêso mg da haste. As outras fôrças atuantes são a fôrça da parede sôbre a haste e a tração no fio. Entretanto, estas fôrças são restritivas e não podem realizar trabalho. Isto pode ser visto, pois, se P deslizar para baixo na parede, não será executado nenhum trabalho, porque a parede não tem atrito e, assim, a fôrça, devido à parede, sôbre a haste é perpendicular à parede. Igualmente, se Q cair, êle só se pode mover perpendicularmente ao fio Q.

Fig. 7-16

Seja $\mathbf{r}$ o vetor-posição do centro de massa C [neste caso, também centro de gravidade] relativamente a O. Sejam também $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ os vetores unitários nas direções horizontal e vertical, respectivamente, de modo que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Da fig. 7-16,

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} \tag{1}$$

$$\mathbf{OQ} = \mathbf{OC} + \mathbf{CQ} \tag{2}$$

Então, de (1), tomando o produto escalar por $\mathbf{i}$,

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{OP}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{PQ}\cdot\mathbf{i}$$

Como $\mathbf{OP}\cdot\mathbf{i} = 0$, isto se reduz a

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{PQ}\cdot\mathbf{i}$$

ou

$$l \operatorname{sen}\alpha = L \operatorname{sen}\beta \tag{3}$$

Igualmente, tomando-se o produto escalar de ambos os membros de (2) por $\mathbf{j}$

$$\mathbf{OQ}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{OC}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{CQ}\cdot\mathbf{j}$$

ou

$$l\cos\alpha = y + \tfrac{1}{2}L\cos\beta \tag{4}$$

Ora, um deslocamento virtual do centro de massa C é dado por

$$\delta\mathbf{r} = \delta x\,\mathbf{i} + \delta y\,\mathbf{j} \tag{5}$$

Como mg é a única fôrça real, o princípio do trabalho virtual fica

$$m\mathbf{g}\cdot\delta\mathbf{r} = 0 \tag{6}$$

Usando (5), isto fica

$$mg\,\delta y = 0 \quad \text{ou} \quad \delta y = 0 \tag{7}$$

Ora, de (3) e (4), tem-se

$$l\cos\alpha\,\delta\alpha = L\cos\beta\,\delta\beta$$

$$-l\operatorname{sen}\alpha\,\delta\alpha = \delta y - \tfrac{1}{2}L\operatorname{sen}\beta\,\delta\beta$$

pois l e L são constantes e δ tem as mesmas propriedades do operador diferencial d.

Como $\delta y = 0$, de (7), estas equações ficam

$$l\cos\alpha\,\delta\alpha = L\cos\beta\,\delta\beta \tag{8}$$

$$l\operatorname{sen}\alpha\,\delta\alpha = \tfrac{1}{2}L\operatorname{sen}\beta\,\delta\beta \tag{9}$$

De (8) e (9), tem-se, por divisão,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \tag{10}$$

Ora de (3), $$\operatorname{sen}\beta = (l/L)\operatorname{sen}\alpha \tag{11}$$

tal que $$\cos\beta = \sqrt{1-(l^2/L^2)\operatorname{sen}^2\alpha} \tag{12}$$

Assim, a equação (10) pode ser escrita como

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{1}{2}\,\frac{l\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{L^2-l^2\operatorname{sen}^2\alpha}} \tag{13}$$

Dividindo por $\operatorname{sen}\alpha$ e elevando ao quadrado ambos os lados, acha-se

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{l\sqrt{3}} \tag{14}$$

e de (11)

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{4L^2-l^2}}{L\sqrt{3}} \tag{15}$$

como foi pedido.

7.31. Um corpo uniforme consiste em um cilindro de raio a e altura H sôbre um hemisfério de raio a, indicado na fig. 7-17. Prove que o corpo está em equilíbrio estável sôbre um plano horizontal se, e somente se, $a/H > \sqrt{2}$.

Fig. 7-17

Pelo probl. 7.28, o centróide C está a uma distância CB do centro B do hemisfério de

$$H - \frac{3a^2+8aH+6H^2}{8a+12H} = \frac{6H^2-3a^2}{8a+12H}$$

Então, a distância do centróide C acima do plano é

$$CP = CD + DP = CB\cos\theta + BQ$$
$$= \frac{6H^2-3a^2}{8a+12H}\cos\theta + a$$

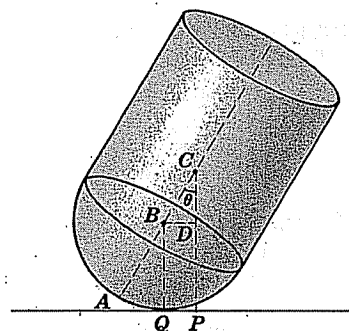
tal que sua energia potencial (ou potencial) é

$$V = Mg\left(\frac{6H^2-3a^2}{8a+12H}\cos\theta + a\right)$$

O equilíbrio ocorre onde $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = 0$ ou $Mg\left(\dfrac{3a^2-6H^2}{8a+12H}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$, i.e., $\theta = 0$.

Então, o equilíbrio será estável, se

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = Mg\left(\frac{3a^2-6H^2}{8a+12H}\right)\cos\theta\Big|_{\theta=0} = Mg\left(\frac{3a^2-6H^2}{8a+12H}\right) > 0$$

i.e., $3a^2-6H^2 > 0$ ou $a/H > \sqrt{2}$.

7.32. Uma corrente uniforme têm suas extremidades suspensas por dois pontos fixos no mesmo nível. Ache uma equação para a curva em que ela fica em repouso.

Sejam A e B [fig. 7-18] os pontos fixos. Um elemento de corrente de comprimento Δs está em equilíbrio sob as tensões de tração de magnitude T e T e ΔT devido ao resto da corrente e também ao peso $\sigma g\,\Delta s$ do elemento de corrente. Ora, da fig. 7-18, se as direções dos vetores correspondentes a T e $T+\Delta T$ fazem ângulos de θ e $\theta+\Delta\theta$ com o eixo x, respectivamente, têm-se como condições de equilíbrio [negligenciando os termos de ordem $(\Delta\theta)^2$ e superiores],

$$(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta)\mathbf{i}+(T+\Delta T)\operatorname{sen}(\theta+\Delta\theta)\mathbf{j}-(T\cos\theta\,\mathbf{i}+T\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{j})-\sigma g\mathbf{j}\,\Delta s=\mathbf{0}$$

ou

$$(T+\Delta T)\cos(\theta+\Delta\theta) = T\cos\theta \tag{1}$$

$$(T+\Delta T)\operatorname{sen}(\theta+\Delta\theta) - T\operatorname{sen}\theta = \sigma g\,\Delta s \tag{2}$$

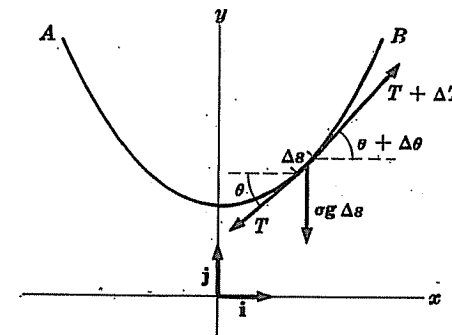



Fig. 7-18

A equação (1) mostra que a componente horizontal $T\cos\theta$ deve ser uma constante, que será tomada como T_0, a qual corresponde à tensão no ponto mais baixo da corrente, onde $\theta = 0$. Assim,

$$T\cos\theta = T_0 \tag{3}$$

De (2) acha-se, dividindo por $\Delta\theta$,

$$\frac{(T+\Delta T)\operatorname{sen}(\theta+\Delta\theta) - T\operatorname{sen}\theta}{\Delta\theta} = \sigma g\frac{\Delta s}{\Delta\theta} \tag{4}$$

E tomando o limite de ambos os lados de (4) como $\Delta\theta \to 0$, acha-se

$$\frac{d}{d\theta}(T\operatorname{sen}\theta) = \sigma\theta\frac{ds}{d\theta} \tag{5}$$

Usando (3) para eliminar T, (5) fica

$$\frac{d}{d\theta}(T_0 \operatorname{tg}\theta) = \sigma g \frac{ds}{d\theta} \tag{6}$$

ou

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{T_0}{\sigma g}\sec^2\theta = b\sec^2\theta \tag{7}$$

onde $b = T_0/\sigma g$. Ora,

$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen}\theta \tag{8}$$

Assim, de (7) e (8),

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\cos\theta)(b\sec^2\theta) = b\sec\theta \tag{9}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{d\theta} = (\operatorname{sen}\theta)(b\sec^2\theta) = b\sec\theta\operatorname{tg}\theta \tag{10}$$

Integrando (9) e (10) em relação a θ, acha-se

$$x = b\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) + c_1 \tag{11}$$

$$y = b\sec\theta + c_2 \tag{12}$$

Seja admitido que, no ponto mais baixo da corrente, i.e., em $\theta = 0$, $x = 0$ e $y = b$. Então, de (11) e (12) acha-se $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Assim,

$$x = b\ln(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta) \tag{13}$$

$$y = b\sec\theta \tag{14}$$

De (13), tem-se

$$\sec\theta + \operatorname{tg}\theta = e^{x/b} \tag{15}$$

Mas

$$\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = (\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)(\sec\theta - \operatorname{tg}\theta) = 1 \tag{16}$$

Então, dividindo (16) por (15), acha-se

$$\sec\theta - \operatorname{tg}\theta = e^{-x/b} \tag{17}$$

Somando (15) a (17) e usando (14), acha-se

$$y = \frac{b}{2}(e^{x/b} + e^{-x/b}) = b\cosh\frac{x}{b} \tag{18}$$

Esta curva é chamada de *catenária* [do Latim, significando corrente].

Problemas Propostos

GRAUS DE LIBERDADE

7.33. Determine o número de graus de liberdade em cada um dos seguintes casos: (*a*) uma partícula movendo-se em uma curva plana; (*b*) duas partículas movendo-se em uma curva espacial e tendo a distância entre elas constante; (*b*); (*c*) três partículas movendo-se no espaço tal que a distância entre duas delas é sempre constante.
Resp. (*a*) 1, (*b*) 1, (*c*) 6.

7.34. Ache o número de graus de liberdade de um corpo rígido que (*a*) se move paralelamente a um plano fixo, (*b*) tenha dois pontos fixos, além dos quais se pode mover livremente.
Resp. (*a*) 3, (1) 1.

7.35. Ache o número de graus de liberdade para um sistema que consiste em uma haste rígida e fina que se possa mover livremente no espaço e uma partícula que tem o movimento restrito sobre a haste.
Resp. 4.

CENTRO DE MASSA E MOMENTUM DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

7.36. Um quadrilátero $ABCD$ tem as massas de 1, 2, 3 e 4 unidades localizadas em seus vértices $A(-1, -2, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$ e $D(3, 1, 2)$. Ache as coordenadas do centro de massa.
Resp. (2, 0, 2).

7.37. Um sistema consiste em duas partículas de massas m_1 e m_2. Prove que o centro de massa do sistema divide a linha que liga m_1 a m_2 em dois segmentos, cuja razão de comprimentos é dada pela razão das massas m_2 por m_1.

7.38. Uma bomba jogada por um avião explode no ar. Prove que, se a resistência do ar for negligenciada, então o centro de massa descreve uma parábola.

7.39. Três partículas de massas 2, 1, 3, respectivamente, têm os vetores de posição $\mathbf{r}_1 = 5t\mathbf{i} - 2t^2\mathbf{j} + (3t-2)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = (2t-3)\mathbf{i} + (12-5t^2)\mathbf{j} + (4+6t-3t^3)\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = (2t-1)\mathbf{i} + (t^2+2)\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$, onde t é o tempo. Ache (*a*) a velocidade do centro de massa no instante $t = 1$ e (*b*) o momentum linear total do sistema em $t = 1$.
Resp. (*a*) $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (*b*) $18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

7.40. Três massas iguais estão localizadas nos vértices de um triângulo. Prove que o centro de massa está localizado na intersecção das medianas do triângulo.

7.41. Uma placa uniforme tem a forma da região limitada pela parábola $y = x^2$ e a linha $y = H$ no plano xy. Ache o centro de massa.
Resp. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{3}{5}H$

7.42. Ache o centro de massa de um cone circular, reto e uniforme de raio a e altura H.
Resp. O ponto está localizado a uma distância $\frac{3}{4}H$ do vértice.

7.43. A região escurecida da fig. 7-19 é uma calota esférica sólida de altura H, cortada de uma esfera sólida e uniforme de raio a. (*a*) Prove que o centróide da

calota está localizado a uma distância $\frac{3}{4}(2a-H)^2/(3a-H)$ da base AB. (*b*) Discuta os casos em que $H = 0$, $H = a$ e $H = 2a$.

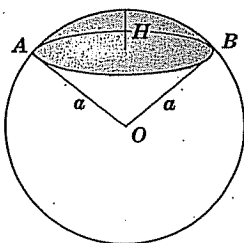



Fig. 7-19

7.44. Ache o centro de massa de uma placa uniforme limitada por $y = \operatorname{sen} x$ e o eixo x.
Resp. $\bar{x} = \pi/2$, $\bar{y} = \pi/8$

7.45. Ache o centro de massa de uma haste de comprimento l, cuja distância é proporcional à distância de uma extremidade 0.
Resp. $\frac{2}{3}l$ da extremidade O.

7.46. Ache o centróide de um sólido uniforme limitado pelos planos $4x+2y+z=8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
Resp. $\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{16}a(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$

7.47. Um sólido uniforme é limitado pelo parabolóide de revolução $x^2 + y^2 = cz$ e o plano $z = H$. [Veja a fig. 7.20]. Ache o centróide.
Resp. $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = \frac{2}{3}H$

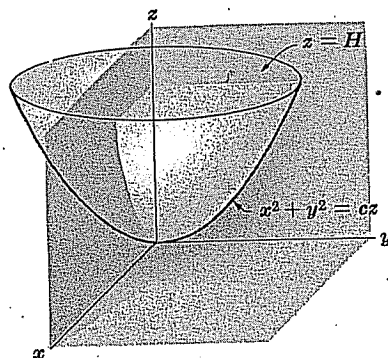



Fig. 7-20

MOMENTUM ANGULAR E TORQUE

7.48. Três partículas de massas 2, 3 e 5 movem-se sob a influência de um campo de força tal que os seus vetores-posição relativamente a um sistema de coordenadas fixo são dados, respectivamente, por $\mathbf{r}^1 = 2t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = (t+1)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}_3 = t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}$, onde t é o tempo. Ache (*a*) o momentum angular total do sistema e (*b*) o torque externo total aplicado ao sistema, tomados em relação à origem.
Resp. (*a*) $(31 - 12t)\mathbf{i} + (6t^2 - 10t - 12)\mathbf{j} + (21 + 5t^2)\mathbf{k}$
(*b*) $-12\mathbf{i} + (12t - 10)\mathbf{j} + 10t\mathbf{k}$

7.49. Faça o probl. 7.48, considerando que o momentum angular total e o torque sejam tomados em relação ao centro de massa.

7.50. Verifique que (*a*) no probl. 7.48 e (*b*) no probl. 7.49, o torque externo total é igual à razão de mudança de momentum angular pelo tempo.

7.51. Ache, no probl. 7.48, (*a*) o momentum angular total e (*b*) o torque externo total, tomados em relação a um ponto tal que o seu vetor-posição seja dado por $\mathbf{r} = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. O torque externo total é igual à razão de mudança do momentum angular pelo tempo em algum caso? Explique.

7.52. Verifique o teorema 7.9 para o sistema de partículas do probl. 7.48.

7.53. Ache e prove um teorema análogo ao teorema 7.9 para o torque externo total aplicado a um sistema.

7.54. O momentum angular é conservado no probl. 7.38? Explique.

TRABALHO, ENERGIA E IMPULSO

7.55. Ache o trabalho total realizado pelo campo de força do probl. 7.48, ao se moverem as partículas de suas posições no instante $t = 1$, às suas posições no instante $t = 2$.
Resp. 42.

7.56. O trabalho realizado no probl. 7.55 é o mesmo, quando é admitido que todas as massas estão concentradas no centro de massa? Explique.

7.57. Ache a energia cinética total das partículas no probl. 7.48 nos instantes (*a*) $t=1$ e (*b*) $t = 2$. Discuta a conexão entre os seus resultados e o resultado do probl. 7.55.
Resp. (*a*) 72,5; (*b*) 30,5.

7.58. Ache o momentum linear total do sistema de partículas no probl. 7.48 nos instantes (*a*) $t = 1$ e (*b*) $t = 2$.
Resp. (*a*) $17\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$, (*b*) $27\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$

7.59. Ache o impulso total aplicado ao sistema do probl. 7.48 de $t = 1$ a $t = 2$ e discuta a conexão do seu resultado com o do probl. 7.58.
Resp. $10\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

7.60. Prove o teorema 7.13.

7.61. Verifique o teorema 7.13 para o sistema de partículas no probl. 7.48.

RESTRIÇÕES, ESTÁTICA, TRABALHO VIRTUAL, ESTABILIDADE E O PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

7.62. Em cada caso, ache se a restrição é holonômica ou não e dê uma razão para a sua resposta: (*a*) uma partícula limitada a mover-se sob gravidade dentro de um parabolóide de revolução na vertical, cujo vértice está para baixo; (*b*) uma partícula deslizando sobre um elipsóide, sob a influência da gravidade; (*c*) uma esfera rolando e, possivelmente, deslizando por um plano inclinado; (*d*) uma esfera rolando, por um plano inclinado, paralelamente a um plano vertical fixo; (*e*) uma partícula deslizando sob gravidade na parte externa de um cone invertido na vertical.
Resp. (*a*) holonômico, (*b*) não-holonômico, (*c*) não-holonômico, (*d*) holonômico, (*e*) holonômico.

7.63. Uma alavanca ABC [fig. 7-21] tem os pesos W_1 e W_2 distantes de a_1 e a_2 do suporte B fixo. Usando o princípio do trabalho virtual, prove que uma condição necessária e suficiente para o equilíbrio é $W_1 a_1 = W_2 a_2$.

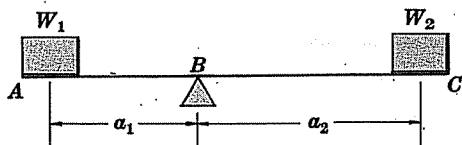



Fig. 7-21

7.64. Faça o probl. 7.63, considerando que um ou mais pesos adicionais sejam colocados na alavanca.

7.65. Um fio inextensível de massa negligenciável, suportado pela polia sem atrito B [veja a fig. 7-22] liga uma massa m_1 a um plano inclinado sem atrito, que faz um ângulo α com a outra massa m_2. Usando o princípio de D'Alembert, prove que as massas estarão em equilíbrio, se $m_2 = m_1 \operatorname{sen} \alpha$.

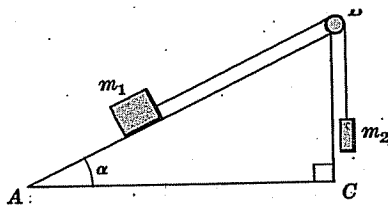



Fig. 7-22

7.66. Faça o probl. 7.65, considerando que o plano inclinado tenha um coeficiente de fricção μ.
Resp. $m_2 = m_1 (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$

7.67. Uma escada AB de massa m tem as suas extremidades em uma parede e no chão [veja a fig. 7-23]. O pé da escada está preso, por uma corda inextensível e sem massa, à base C da parede, tal que a escada faz um ângulo α com o chão. Usando o princípio do trabalho virtual, ache a magnitude da tensão na corda.
Resp. $\frac{1}{2}mg \operatorname{cotg} \alpha$.

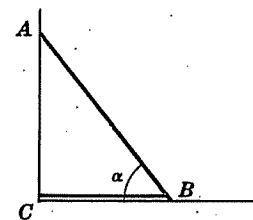



Fig. 7-23

7.68. Faça (*a*) o probl. 7.63 e (*b*) o probl. 7.65, usando o método da energia potencial. Prove que o equilíbrio em cada caso é instável.

7.69. Uma haste fina e uniforme de comprimento l tem as suas duas extremidades limitadas a moverem-se sobre a circunferência, lisa e na vertical, de raio a [veja a fig. 7.24]. Determine as condições de equilíbrio.

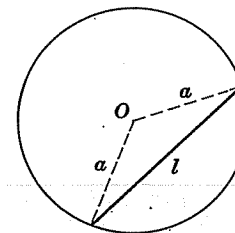



Fig. 7-24

7.70. O equilíbrio da haste do probl. 7.69 é estável? Explique.

7.71. Um hemisfério sólido de raio a está localizado sobre um plano inclinado de ângulo α e bem áspero.
(*a*) Prove que ele está em equilíbrio estável, se $\alpha < \operatorname{sen}^{-1}(3/8)$.
(*b*) Há algum outro valor de α, no qual ocorre equilíbrio? Há algum equilíbrio estável?

7.72. Use o princípio de D'Alembert, para obtêr as equações do movimento das massas m_1 e m_2 do probl. 7.65.

7.73. Faça o problema da máquina de Atwood [veja o probl. 7.22] usando o princípio de D'Alembert.

7.74. Use o princípio de D'Alembert, para detêrminar as equações do movimento de um pêndulo simples.

PROBLEMAS DIVERSOS

7.75. Prove que o centro de massa, de um arco circular e uniforme de raio a e ângulo central α, está localizado no eixo de simetria e a uma distância do centro de $(a \operatorname{sen} \alpha)/\alpha$.

7.76. Discuta os casos (*a*) $\alpha = \pi/2$ e (*b*) $\alpha = \pi$ no probl. 7.75.

7.77. Um círculo de raio a é retirado de uma placa circular e uniforme de raio $b > a$, como é indicado pela fig. 7-25. Se a distância entre os seus centros A e B é D, ache o centro de massa.
Resp. O ponto está a uma distância $a^2 D/(b^2 - a^2)$, abaixo de B.

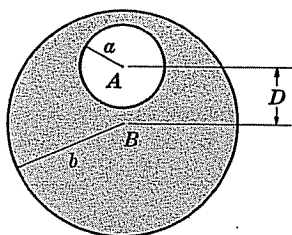



Fig. 7-25

7.78. Faça o probl. 7.77, considerando esferas no lugar de círculos.
Resp. O ponto está a uma distância $a^3 D/(b^3 - a^3)$, abaixo de B.

7.79. Prove que o centro de massa não depende da origem do sistema de coordenadas usado.

7.80. Prove que o centro de massa de uma casca hemisférica, fina e uniforme, de raio a, está localizado a uma distância $a/2$ do centro.

7.81. Considere o momento angular da Lua em torno da Terra como Λ. Ache o momento angular do sistema consistindo em Terra e Lua em torno do centro de massa de ambas. Considere que as massas da Terra e da Lua sejam M_t e M_l, respectivamente.
Resp. $M_t \Lambda/(M_t + M_l)$.

7.82. O teorema 7.13 aplica-se ao caso do momento angular tomado em torno de um ponto arbitrário? Explique.

7.83. Na fig. 7-26, AD, BD e CD são hastes finas e uniformes de mesmo comprimento a e peso w. Elas estão pivotadas sem atrito em D e têm as suas extremidades A, B e C sobre um plano horizontal, sem atrito. Para que as extremidades A, B e C não se movimentem, é usado um fio inextensível ABC de massa desprezível na forma de um triângulo equilátero. Se um peso W está suspenso por D tal que as hastes façam o mesmo ângulo α com o plano horizontal, prove que a magnitude de tensão no fio é $\frac{1}{9}\sqrt{3}\,(W + 3w)\cot\alpha$.

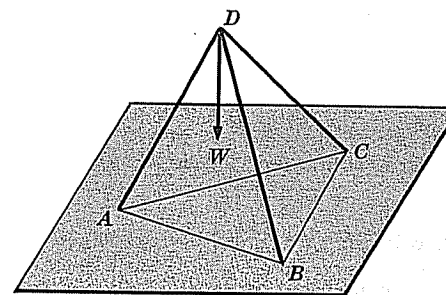



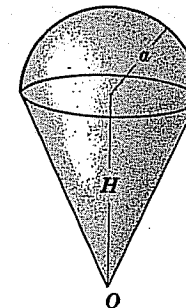
Fig. 7-26

7.84. Faça o probl. 7.83, considerando que o peso W é removido de D e é suspenso pelo centro de uma das hastes.

7.85. Derive uma expressão para (*a*) o momentum angular total e (*b*) o torque total do sistema em torno de um ponto arbitrário.

7.86. Prove que o torque em torno de um ponto qualquer P é igual à razão de mudança do momento angular em torno de P, pelo tempo, se, e somente se, (*a*) P for fixo no espaço (*b*) P coincidir com o centro de massa ou (*c*) P mover-se com uma velocidade que está na mesma direção da velocidade do centro de massa.

Fig. 7-27

7.87. Ache o centróide de um sólido de densidade constante, consistente de um cone circular reto de raio a e altura H, justaposto a um hemisfério de raio a. [veja a fig. 7-27].
Resp. $\frac{3}{4}(a^2 + H^2)/(2a + H)$ acima de O.

7.88. Faça o probl. 7.87, se a densidade do cone for o dobro da densidade do hemisfério.
Resp. $\frac{3}{8}(a^2 + 2H^2)/(a + H)$ acima de O.

7.89. Um hemisfério de raio a é cortado de um cubo sólido e uniforme de lado $b>2a$ [veja a fig. 7.28]. Ache o centro de massa do sólido restante.

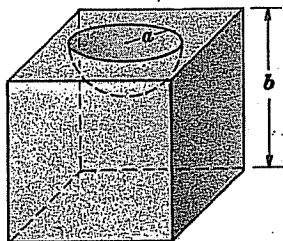



Fig. 7-28

7.90. Uma corrente uniforme de peso 45 kgf está suspensa por dois suportes fixos, distantes entre si de 15 metros. Se a flecha no meio for de 20 cm, ache a tensão nos suportes. *Resp.* 450 kgf.

7.91. Uma corrente de comprimento L e densidade constante σ é suspensa por dois pontos fixos no mesmo nível. Se a flecha da corrente no meio está a uma distância D, abaixo da linha horizontal, pelos pontos fixos, prove que a tensão no ponto mais baixo da corrente é $\sigma(L^2-4D^2)/8D$.

7.92. Três partículas de massas m_1, m_2, m_3 estão localizadas nos vértices opostos aos lados de um triângulo de comprimentos a_1, a_2, a_3, respectivamente. Prove que o centro de massa está na intersecção das bissetrizes do triângulo se, e somente se, $m_1/a_1 = m_2/a_2 = m_3/a_3$.

7.93. As massas m_1 e m_2 estão sôbre um cilindro circular sem atrito, ligadas por um fio inextensível de massa negligenciável [veja a fig. 7.29]. (*a*) Usando o princípio do trabalho virtual, prove que o sistema está em equilíbrio, se $m_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = m_2 \operatorname{sen} \alpha_2$. (*b*) O equilíbrio é estável? Explique.

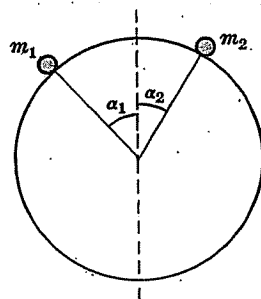



Fig. 7-29

7.94. Faça o probl. 7.93, considerando o atrito.

7.95. Ache uma expressão para a energia cinética total de um sistema de partículas relativamente a um ponto que pode estar se movendo no espaço. Sob que condições a expressão é matemàticamente simplificável? Discuta o significado físico da simplificação.

7.96. Ache o centro de massa de uma placa uniforme mostrada na fig. 7-30 como a parte escurecida que é limitada pela hipociclóide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ e as retas $x = 0$, $y = 0$. [*Sugestão*: as equações paramétricas para a hipociclóide são $x = a\cos^3\theta$, $y = a \operatorname{sen}^3\theta$.]
Resp. $\bar{x} = \bar{y} = 256a/315\pi$

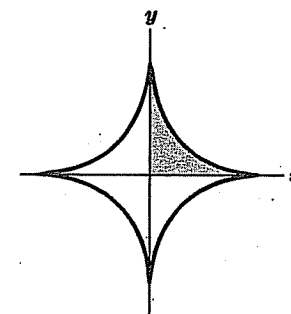



Fig. 7-30

7.97. Sejam m_1, m_2 e m_3 as massas de três partículas e $\mathbf{v}_{12}$, $\mathbf{v}_{23}$, $\mathbf{v}_{13}$ as suas velocidades relativas.
(*a*) Prove que a energia total cinética do sistema em torno do centro de massa é

$$\frac{m_1 m_2 v_{12}^2 + m_2 m_3 v_{23}^2 + m_1 m_3 v_{13}^2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

(*b*) Generalize o resultado de (*a*).

7.98. Uma corrente de densidade variável é suspensa por dois pontos fixos no mesmo nível. Prove que, se a densidade da corrente varia proporcionalmente à distância na horizontal de uma linha vertical pelo seu centro, então a forma da corrente será uma parábola.

7.99. Ache a relação entre o probl. 7.98 e a forma de uma ponte suspensa.

7.100. Um sólido que consiste em um cone circular, reto e uniforme, com ângulo de vértice de α é justaposto a um hemisfério da mesma densidade, como é indicado na fig. 7-31. Prove que este corpo pode estar em equilíbrio estável sobre um plano horizontal se, e sòmente se, $\alpha > 60°$.

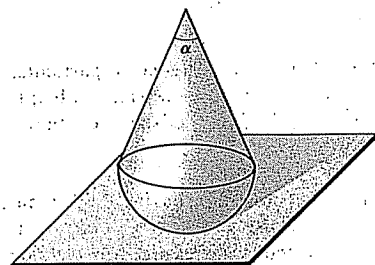



Fig. 7-31

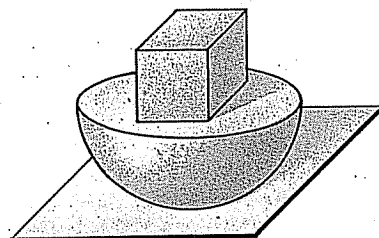



Fig. 7-32

7.101. Um sólido uniforme [veja a fig. 7-32] consiste em um hemisfério de raio a justaposto a um cubo de lado b colocado simetricamente em tôrno do centro da hemisfera. Ache os valores de a e b, para que haja um equilíbrio estável.
Resp. $a/b > \sqrt[4]{2/\pi}$

7.102. Ache o centróide da área limitada pelo ciclóide.

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \qquad y = a(1 - \cos\theta)$$

e o eixo x.
Resp. $(\pi a,\ 5a/6)$

7.103. Prove que, se a componente do torque em torno do ponto P e em uma direção qualquer fôr nula, então a componente do momento angular em torno de P naquela direção é conservada se (a) P fôr um ponto fixo, (b) P coincidir com o centro de massa ou (c) P fôr um ponto que se está movendo na mesma direção que o centro de massa.

7.104. No probl. 7.103, o momento angular é conservado sòmente se (a), (b) ou (c) ocorrem? Explique.

7.105. Prove que o trabalho virtual devido a uma fôrça é igual à soma dos trabalhos virtuais que correspondem às componentes da fôrça.

7.106. Prove que é impossível estar uma esfera em equilíbrio estável sobre uma esfera fixa que é perfeitamente rugosa [i.e., com coeficiente de fricção $\mu = 1$]. É possível ocorrer equilíbrio? Explique.

7.107. Um corpo uniforme tem a forma de um parabolóide de revolução $cz = x^2 + y^2$, $c > 0$ e está sôbre o plano xy, que se encontra na horizontal. Prove que, se a altura do parabolóide é H, então o equilíbrio é estável se, e sòmente se, $H < \frac{3}{4}c$.

7.108. Faça o probl. 7.107, considerando que o plano xy esteja inclinado de um ângulo α com a horizontal.

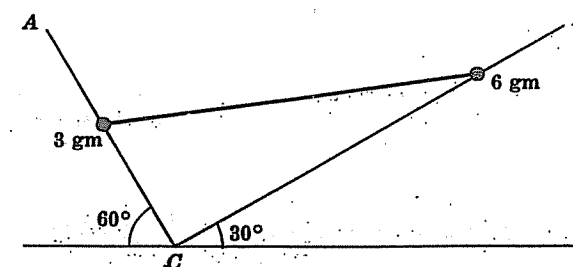



Fig. 7-33

7.109. Na fig. 7-33, AC e BC são fios sem atrito e estão situados em um plano vertical, fazendo os ângulos de 60° e 30°, respectivamente, com a horizontal. Dois glóbulos de massas 3 gramas e 6 gramas estão nos fios, ligados por uma fina haste de massa negligenciável. Prove que o sistema estará em equilíbrio, quando a haste fizer um ângulo com a horizontal de $\operatorname{tg}^{-1}(\frac{5}{9}\sqrt{3})$.

7.110. Prove cada um dos seguintes teoremas de *Pappus.*

(a) Se uma linha C fechada, em um plano, foi girada em torno de um eixo pertencente ao plano, mas não interseccionando a curva, então o volume gerado é igual à área limitada por C multiplicada pela distância percorrida pelo centróide da área.

(b) Se um arco de uma curva plana (fechada ou não) é girado em torno de um eixo de seu plano, mas que a intersecione, então a área da superfície gerada é igual ao comprimento do arco multiplicado pela distância percorrida pelo centróide do arco.

7.111. Use os teoremas de Pappus para achar (a) o centróide de uma placa semicircular, (b) o centróide de um fio semicircular, (c) o centróide de uma placa na forma de um triângulo reto, e (d) o volume de um cilindro.

7.112. Ache (a) a área superficial e (b) o volume do corpo obtido pela revolução de um círculo de raio a, em tôrno de uma linha em seu plano e a uma distância $b > a$ de seu centro.
Resp. (a) $4\pi^2 ab$, (b) $2\pi^2 a^2 b$

Capítulo 8

Aplicações a Sistemas Vibrantes, Foguetes e Colisões

SISTEMAS VIBRANTES DE PARTÍCULAS

Se duas ou mais partículas são conectadas por molas [ou interação entre si de alguma maneira equivalente], então as partículas vibrarão ou oscilarão uma em relação a outra.

Como foi visto no Cap. 4, uma partícula vibrando ou oscilando tal como um oscilador harmônico simples ou tal como o bulbo de um pêndulo tem uma frequência simples de vibração. Nestes tipos de sistemas de partículas, há mais de uma freqüência de vibração. Tais frequências são chamadas *frequências normais.* Os movimentos das partículas nestes casos são, geralmente, chamados de *vibrações periódicas múltiplas.*

Um *modo de vibração* [isto é, um modo particular em que ocorre vibração, devido a condições iniciais particulares, por exemplo] no qual somente uma das frequências normais está presente, é chamado de *modo normal de vibrações* ou, simplesmente, *modo normal.* Veja os probls. 8.1-8.3.

PROBLEMAS ENVOLVENDO MASSAS VARIÁVEIS. FOGUETES

Até aqui, têmo-nos restringido a movimentos de partículas com massa constante. Uma classe importante de problemas envolve massas variáveis. Um exemplo disto é o foguete que, ao se mover para diante, expele partículas de uma mistura de combustível para trás. Veja os probls. 8.4 e 8.5.

COLISÕES DE PARTÍCULAS

Durante o curso de seus movimentos, duas ou mais partículas podem colidir. Os problemas que consideram os movimentos de tais partículas são chamados de *problemas de colisão ou impacto.*

Na prática, pensa-se em objetos colidindo, tais como as esferas, como tendo *elasticidade.* O tempo, durante o qual tais objetos estão em contato, é composto de um *tempo de compressão,* durante o qual uma pequena deformação ocorre, um *tempo de restituição,* durante o qual a forma é restaurada. Admite-se que as esferas são lisas, de modo que as forças exercidas são ao longo da *normal comum* às duas esferas através do ponto de contato [e passando pelos seus centros].

Uma colisão pode ser *direta* ou *obliqua.* Em uma *colisão diretá,* a direção do movimento de ambas as esferas é ao longo da normal comum, no ponto de contato antes e depois da colisão. Uma colisão que não é direta é *obliqua.*

Fundamental em problemas de colisões é o seguinte princípio chamado de *regra de colisão de Newton,* que é baseada na evidência experimental. Ela será tomada como um postulado.

Regra de Colisão de Newton. Seja v_{12} e v'_{12} as velocidades relativas das esferas, ao longo da normal comum, antes e depois do impacto. Então,

$$v'_{12} = -\varepsilon v_{12}.$$

O parâmetro ε, chamado de *coeficiente de restituição,* depende dos materiais de que as esferas são feitas e é, geralmente, tomado como uma constante entre 0 e 1. Se $\varepsilon = 0$, a colisão é *perfeitamente inelástica* ou, simplesmente, *inelástica.* Se $\varepsilon = 1$, a colisão é chamada *perfeitamente elástica* ou, simplesmente, *elástica.*

No caso de colisões perfeitamente elásticas, a energia cinética total, antes e depois do impacto, é a mesma.

SISTEMAS CONTÍNUOS DE PARTÍCULAS

Para alguns problemas, o número de partículas por unidade de comprimento, área ou volume é muito grande, de tal maneira que, para fins práticos, o sistema pode ser considerado com o contínuo. Exemplos disto podem ser as cordas de um violino vibrando, um tambor ou uma membrana, ou uma esfera rolando por um plano o inclinado.

As leis básicas do Cap. 7 mantêm-se para tais sistemas contínuos de partículas. Aplicando-as, entretanto, é necessário usar a integração no lugar da somatória sôbre o número de partículas e conceito de densidade.

O FIO VIBRANTE

Considere um fio elástico, tal como o de um violino ou piano, que está esticado fortemente entre dois pontos fixos $x = 0$ e $x = l$ do eixo x [veja a fig. 8-1]. Se ao fio é dado um deslocamento inicial [tal como, por exemplo, dedilhando-o] e, então, solto, êle vibrará ou oscilará em torno da posição de equilíbrio.

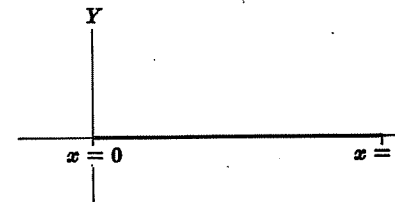
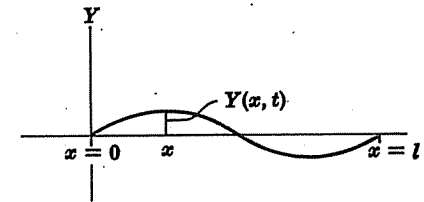



Fig. 8-1 Fig. 8-2

Se $Y(x,t)$ representar o deslocamento de um ponto qualquer x de um fio em relação a posição de equilíbrio no tempo t [veja a fig. 8-2], então a equação que governa as vibrações é dada pela *equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial 2\, Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

onde T é a tensão (constante) no fio e σ é a densidade (constante) [massa por unidade de comprimento do fio],

$$c^2 = T/\sigma. \tag{2}$$

A equação (1) mantém-se no caso de que as vibrações tenham pequenas amplitudes, de modo que a inclinação $\partial Y/\partial x$ em um ponto qualquer do fio é muito menor que 1.

PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO

O problema de resolver uma equação tal como a (1) sujeita a várias condições, chamadas de condições de contorno, é, geralmente, chamado de *problema de valores de contorno.* Um método importante para resolver tais problemas faz uso das *séries de Fourier.*

SÉRIE DE FOURIER

Sob certas condições [usualmente e satisfeitas na prática e descritas a seguir], uma função $f(x)$, definida no intervalo $\gamma < x < \gamma + 2l$ e tendo um período $2l$ fora deste intervalo, tem uma expansão em série de

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{3}$$

onde os coeficientes nas séries, chamados de *coefientes* de Fourier, são dados por

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{5}$$

Tais séries são chamadas de *séries de Fourier* de $f(x)$. Para muitos problemas, $\gamma = 0$ ou $-l$.

FUNÇÕES ÍMPARES E PARES

Se $\gamma = -l$, certas simplificações podem ser feitas nos coeficientes (4) e (5), como aqui indicado:

1. Se $f(-x) = f(x)$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = 0. \tag{6}$$

Em tal caso, $f(x)$ é chamada de *função ímpar* e as séries de Fourier correspondentes a $f(x)$ têm somente termos em co-seno.

2. Se $f(-x) = -f(x)$,

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{7}$$

Em tal caso, $f(x)$ é chamada de *função par* e as séries de Fourier correspondentes a $f(x)$ têm somente termos em seno.

Se $f(x)$ não for par ou ímpar, suas séries de Fourier conterão termos em seno e co-seno.

Exemplos de funções pares são x^4, $3x^6 + 4x^2 - 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ e a função mostrada gràficamente na fig. 8-3. Exemplos de funções ímpares são x^3, $2x^5 - 5x^3 + 4$, $\operatorname{sen} x$, $e^x - e^{-x}$ e a função mostrada graficamente na fig. 8-4.

Exemplo de funções que não são pares e nem ímpares são $x^4 + x^3$, $x + \cos x$ e a função mostrada graficamente na fig. 8-5.

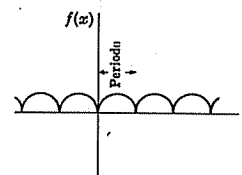
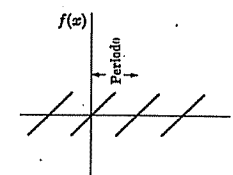
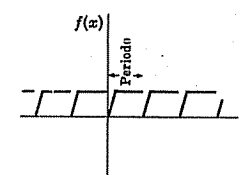



Fig. 8-3 Fig. 8-4 Fig. 8-5

Se uma função é definida no "meio período" de $x = 0$ a $x = l$ e é especificada como ímpar, então a função é conhecida no intervalo $-l < x < l$ e as séries que contêm termos em seno podem ser achadas. Estas séries são, geralmente, chamadas de *séries senoidais de Fourier de meio período.* Igualmente, uma função definida de $x = 0$ a $x = l$, que é especificada como par, tem uma expansão em série chamada de *série co-senoidais de Fourier de meio período.*

CONVERGÊNCIA DE SERIES DE FOURIER

Sejam admitidas as seguintes condições sobre $f(x)$:

1. $f(x)$ é definida em $\gamma < x < \gamma + 2l$.

2. $f(x)$ e sua derivada $f'(x)$ são contínuas por partes em $\gamma < x < \gamma + 2l$. [Uma função é dita *contínua por partes* em um intervalo, se o intervalo puder ser dividido em um número finito de subintervalos, tais que, em cada um, a função seja contínua e limitada, i.e., há uma constante $B > 0$ tal que $-B < f(x) < B$. Um exemplo dessa função é indicado na fig. 8-6].

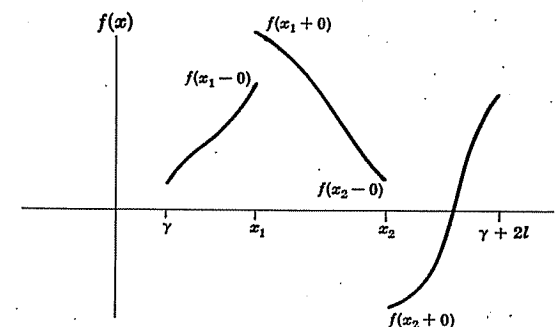



Fig. 8-6

3. Em cada ponto de descontinuidade, por exemplo, x_1 [ou x_2] na fig. 8-6, $f(x)$ tem limites finitos à direita e à esquerda, chamados, respectivamente, de $f(x_1 + 0)$ e $f(x_1 - 0)$ [ou $f(x_2 + 0)$, $f(x_2 - 0)$].

4. $f(x)$ tem um período de $2l$, i.e., $f(x + 2l) = f(x)$.

Estas condições, se satisfeitas, são *suficientes* para garantir a validade da equação (3) [i.e., as séries do lado direito de (3) convergem, realmente, para $f(x)$] em cada ponto em que $f(x)$ seja contínua. Em cada ponto em que $f(x)$ é descontínua, (3) é ainda válida, se $f(x)$ for substituída por $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, o valor médio dos limites à direita e à esquerda.

As condições descritas acima são conhecidas como *condições de Dirichlet*.

Problemas Resolvidos

SISTEMAS VIBRANTES DE PARTÍCULAS

8.1. Duas massas m iguais são conectadas por molas tendo constantes de mola iguais κ, como é mostrado na fig. 8-7, de modo que as massas sejam livres de deslizar sobre uma mesa AB sem atrito. As paredes em A e B, nas quais as extremidades das molas são presas, são fixas. Ache a equação diferencial do movimento das massas.

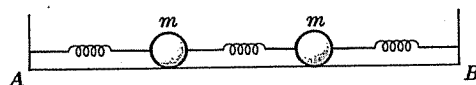



Fig. 8-7

Sejam $x_1 \mathbf{i}$ e $x_2 \mathbf{i}$ [fig. 8-8] os deslocamentos das massas de suas posições de equilíbrio C e D em um instante t.

Considere as fôrças atuantes sôbre a primeira massa em P. Haverá uma fôrça devido à mola da direita dada por $\kappa(x_2 \mathbf{i} - x_1 \mathbf{i}) = \kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i}$, e uma fôrça devido à mola da esquerda dada por $-\kappa x_1 \mathbf{i}$. Assim, a fôrça resultante atuante sôbre a primeira massa em P é

$$\kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i} - 2x_1 \mathbf{i}$$

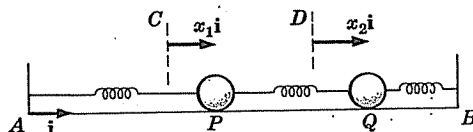



Fig. 8-8

Do mesmo modo, a força resultante atuante sobre a segunda massa em Q é

$$\kappa(x_1 - x_2)\mathbf{i} - \kappa x_2 \mathbf{i}$$

Então, pela segunda lei de Newton, tem-se

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 \mathbf{i}) = \kappa(x_2 - x_1)\mathbf{i} - \kappa x_1 \mathbf{i}$$
$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_2 \mathbf{i}) = \kappa(x_1 - x_2)\mathbf{i} - \kappa x_2 \mathbf{i} \tag{1}$$

ou

$$m\ddot{x}_1 = \kappa(x_2 - 2x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = \kappa(x_1 - 2x_2) \tag{2}$$

8.2. Ache (*a*) as frequências normais e (*b*) os modos normais de vibração para o sistema no probl. 8.1.

(*a*) Substitua $x_1 = A_1 \cos \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t$ nas equações (1) e (2) do probl. 8.1. Então, acha-se, após simplificação,

$$(2\kappa - m\omega^2)A_1 - \kappa A_2 = 0 \tag{1}$$
$$-\kappa A_1 + (2\kappa - m\omega^2)A_2 = 0 \tag{2}$$

Agora, se A_1 e A_2 não forem ambos nulos, deve-se ter

$$\begin{vmatrix} 2\kappa - m\omega^2 & -\kappa \\ -\kappa & 2\kappa - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou $\quad (2\kappa - m\omega^2)(2\kappa - m\omega^2) - \kappa^2 = 0 \quad$ ou $\quad m^2\omega^4 - 4\kappa m\omega^2 + 3\kappa^2 = 0.$

Resolvendo para ω^2, acha-se $\omega^2 = \dfrac{4\kappa m \pm \sqrt{16\kappa^2 m^2 - 12\kappa^2 m^2}}{2m^2}$ dando

$$\omega^2 = \kappa/m \quad \text{e} \quad \omega^2 = 3\kappa/m. \tag{4}$$

Então as frequências normais (ou naturais) do sistema são dadas por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad \text{e} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\kappa}{m}}. \tag{5}$$

As frequências normais são também chamadas de *frequências características* e o determinante (3) é chamado de *determinante característico*.

(*b*) Para achar o modo normal correspondente a $\omega = \sqrt{\kappa/m}$, substitua $\omega^2 = \kappa/m$ nas equações (1) e (2). Então, acha-se

$$A_1 = A_2$$

Neste caso, o modo normal de vibração corresponde ao movimento de massas na *mesma direção* [i.e., ambas para a direita e ambas para a esquerda] como é indicado na fig. 8-9.

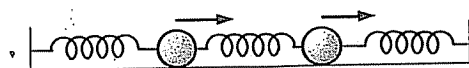



Fig. 8-9

Igualmente, para achar o módulo normal correspondente a $\omega = \sqrt{3\kappa/m}$, substitua $\omega^2 = 3\kappa/m$ nas equações (1) e (2). E achar-se-á

$$A_1 = -A_2$$

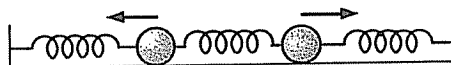



Fig. 8-10

Neste caso, o modo normal de vibração corresponde ao movimento de massas em *direções opostas* [i.e., uma se move para a direita e a outra para a esquerda e vice-versa] como é indicado na fig. 8-10.

Ao resolver-se este problema, pode-se também tão somente admitir $x_1 = B_1 \operatorname{sen} \omega t$, $x_2 = B_2 \operatorname{sen} \omega t$ ou $x_1 = A_1 \cos \omega t + B_1 \operatorname{sen} \omega t$, $x_2 = A_2 \cos \omega t + B_2 \operatorname{sen} \omega t$ ou $x_1 = C_1 e^{i\omega t}$, $x_2 = C_2 e^{i\omega t}$.

8.3. Considere que, no probl. 8.1, a primeira massa é mantida na posição de equilíbrio, enquanto à segunda massa é dado um deslocamento de magnitude $a > 0$ para a direita de sua posição de equilíbrio. As massas são, então, soltas. Ache a posição de cada massa, em um instante qualquer posterior.

Escrevendo $\omega_1 = \sqrt{\kappa/m}$ e $\omega_2 = \sqrt{3\kappa/m}$, o movimento generalizado de ambas as massas é descrito por

$$x_1 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \quad (1)$$

$$x_2 = D_1 \cos \omega_1 t + D_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + D_3 \cos \omega_2 t + D_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \quad (2)$$

onde todos os coeficientes são constantes. Substituindo isto na equação (1) ou na equação (2) do probl. 8.1 [ambas dão o mesmo resultado], acha-se, equacionando os coeficientes correspondentes a $\cos \omega_1 t$, $\operatorname{sen} \omega_1 t$, $\cos \omega_2 t$ e $\operatorname{sen} \omega_2 t$, respectivamente,

$$D_1 = C_1, \quad D_2 = C_2, \quad D_3 = -C_3, \quad D_4 = -C_4$$

Assim, as equações (1) e (2) podem ser escritas

$$x_1 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t + C_3 \cos \omega_2 t + C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \quad (3)$$

$$x_2 = C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \operatorname{sen} \omega_1 t - C_3 \cos \omega_2 t - C_4 \operatorname{sen} \omega_2 t \quad (4)$$

Agora, determinam-se C_1, C_2, C_3 e C_4 sujeitas às condições iniciais

$$x_1 = 0, \quad x_2 = a, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = 0 \quad \text{em} \quad t = 0 \quad (5)$$

Destas condições, acham-se, respectivamente,

$$C_1 + C_3 = 0, \quad C_1 - C_3 = a, \quad C_2\omega_1 + C_4\omega_2 = 0, \quad C_2\omega_1 - C_4\omega_2 = 0 \quad (6)$$

Disto, acham-se

$$C_1 = \tfrac{1}{2}a, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\tfrac{1}{2}a, \quad C_4 = 0 \quad (6)$$

Assim, as equações (3) e (4) dão as equações pedidas

$$x_1 = \tfrac{1}{2}a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \quad (7)$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}a(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \quad (8)$$

onde $\omega_1 = \sqrt{\kappa/m}$, $\omega_2 = \sqrt{3\kappa/m}$

Note que, no movimento descrito por (7) e (8), ambas as frequências normais estão presentes. Estas equações mostram que a equação do movimento generalizada é *uma superposição dos modos normais*. Isto é, algumas vezes, chamado de *princípio da superposição*.

MASSAS VARIÁVEIS. FOGUETES

8.4. Ache uma equação para o movimento de um foguete movendo-se em uma linha reta.

Seja m a massa total do foguete em um instante t. Em um instante posterior $t + \Delta t$, considere que a massa é $m + \Delta m$, devido à expulsão da massa $-\Delta m$ de gás pelos bocais do foguete. Note que $-\Delta m$ é, realmente, uma quantidade positiva; portanto, Δm é admitida como sendo negativa.

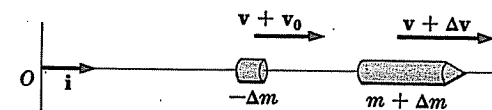



Fig. 8-11

Sejam $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ as velocidades do foguete nos instantes t e $t + \Delta t$ relativamente a um sistema inercial com origem em O. A velocidade da massa de gás expulsa pelos bocais do foguete relativamente a O é $\mathbf{v} + \mathbf{v}_0$, onde $-\mathbf{v}_0$ é a velocidade do gás relativamente ao foguete.

Como a mudança do momentum do sistema é igual ao impulso, tem-se

Momentum total em $t + \Delta t$ − momentum total em t = impulso

$$\{(m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (-\Delta m)(\mathbf{v} + \mathbf{v}_0)\} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}\,\Delta t \quad (1)$$

onde $\mathbf{F}$ é a força resultante externa atuante sobre o foguete.

A equação (1) pode ser escrita como

$$m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} - \mathbf{v}_0\frac{\Delta m}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\Delta m = \mathbf{F}$$

Então, tomando o limite para $\Delta t \to 0$, acha-se

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{v}_0\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} \quad (2)$$

Escrevendo $\mathbf{v} = v\mathbf{i}$, $\mathbf{v}_0 = -v_0\mathbf{i}$, $\mathbf{F} = F\mathbf{i}$, fica

$$m\frac{dv}{dt} + v_0\frac{dm}{dt} = F \quad (3)$$

8.5. Ache a velocidade do foguete do probl. 8.4 admitindo que o gás é expulso pelos bocais a uma razão constante e a uma velocidade constante com relação ao foguete e que ele se move verticalmente para cima, sob um campo gravitacional constante.

Se o gás é expulso a uma razão constante $\alpha > 0$, então $m = m_0 - \alpha t$, onde m_0 é a massa do foguete em $t = 0$. Como $\mathbf{F} = -mg\mathbf{i}$ (ou $F = -mg$) e $dm/dt = -\alpha$, a equação (3) do probl. 8.4 pode ser escrita como

$$(m_0 - \alpha t)\frac{dv}{dt} - \alpha v_0 = -(m_0 - \alpha t)g \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -g + \frac{\alpha v_0}{m_0 - \alpha t}. \quad (1)$$

Integrando, acha-se

$$v = -gt - v_0 \ln(m_0 - \alpha t) + c_1 \quad (2)$$

Se $v = 0$ em $t = 0$, i.e., o foguete parte do repouso, então

$$0 = 0 - v_0 \ln m_0 + c_1 \quad \text{ou} \quad c_1 = v_0 \ln m_0.$$

Assim, (2) fica

$$v = -gt + v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$$

que é a velocidade em módulo em um instante qualquer. A velocidade é $\mathbf{v} = v \cdot \mathbf{i}$.

Note que se deve ter $m_0 - \alpha t > 0$, para que haja gás expelido do foguete, senão o foguete estaria sem combustível.

COLISÕES DE PARTÍCULAS

8.6. Duas massas m_1 e m_2, percorrendo a mesma linha reta, colidem. Ache as velocidades das partículas, após a colisão, em termos das velocidades a ela anteriores.

Admita que a linha reta é tomada como sendo o eixo x e que as velocidades das partículas, antes e após a colisão, são $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$, respectivamente.

Pela regra da colisão de Newton,

$$\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2' = \varepsilon(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (1)$$

Fig. 8-12

Pelo princípio da conservação de momentum,

Momentum total após a colisão = momentum total antes da colisão

$$m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

Resolvendo (1) e (2) simultaneamente,

$$\mathbf{v}_1' = \frac{(m_1 - \varepsilon m_2)\mathbf{v}_1 + m_2(1+\varepsilon)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_2' = \frac{m_1(1+\varepsilon)\mathbf{v}_1 + (m_2 - \varepsilon m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (4)$$

8.7. Discuta o probl. 8.6 para o caso de (*a*) colisão perfeitamente inelástica, (*b*) colisão perfeitamente elástica.

(*a*) Aqui, considera-se $\varepsilon = 0$ em (3) e (4) do probl. 8.6, para obter

$$\mathbf{v}_1' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Assim, após a colisão, as duas partículas se movem com a mesma velocidade, i.e., elas se movem como se estivessem coladas uma à outra ou como se fôssem uma única partícula.

(*b*) Aqui, considera-se $\varepsilon = 1$ em (3) e (4) do probl. 8.6, para obter

$$\mathbf{v}_1' = \frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{v}_2' = \frac{2m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Estas velocidades não são iguais.

8.8. Mostre que, para uma colisão perfeitamente elástica de partículas do probl. 8.6, a energia cinética total, antes da colisão, é igual à energia cinética total após a colisão.

Usando o resultado do probl. 8.7 (*b*), tem-se

$$\text{Energia cinética total após a colisão} = \frac{1}{2}m_1\mathbf{v}_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\mathbf{v}_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left\{\frac{(m_1 - m_2)\mathbf{v}_1 + 2m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}\right\}^2 + \frac{1}{2}m_2\left\{\frac{2m_1\mathbf{v}_1 + (m_2 - m_1)\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}\right\}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

= energia cinética total, antes da colisão

89. Duas esferas, de massas m_1 e m_2, chocam-se obliquamente. Ache suas velocidades após o impacto, em termos de suas velocidades anteriores ao impacto.

Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1'$, $\mathbf{v}_2'$ as velocidades das esferas, antes e após o impacto, respectivamente, como é indicado na fig. 8-13. Escolha um sistema de coorde-

nadas, tal que o plano xy seja o plano de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e tal que, no instante do impacto, o eixo x passe pelos centros C_1 e C_2 das esferas.

Pela conservação de momentum, tem-se

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2'. \tag{1}$$

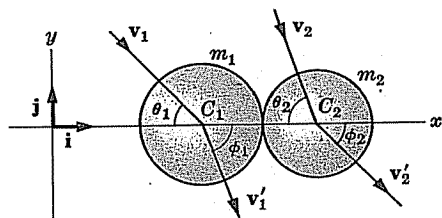



Fig. 8-13

Da fig. 8-13, vê-se que

$$\mathbf{v}_1 = v_1(\cos\theta_1\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta_1\,\mathbf{j}) \tag{2}$$
$$\mathbf{v}_2 = v_2(\cos\theta_2\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\theta_2\,\mathbf{j}) \tag{3}$$
$$\mathbf{v}_1' = v_1'(\cos\phi_1\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\phi_1\,\mathbf{j}) \tag{4}$$
$$\mathbf{v}_2' = v_2'(\cos\phi_2\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\phi_2\,\mathbf{j}) \tag{5}$$

Substituindo-se as equações (2) a (5) em (1) e equacionando os coeficientes de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, tem-se

$$m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2 = m_1 v_1' \cos\phi_1 + m_2 v_2' \cos\phi_2 \tag{6}$$
$$m_1 v_1 \,\text{sen}\,\theta_1 + m_2 v_2 \,\text{sen}\,\theta_2 = m_1 v_1' \,\text{sen}\,\phi_1 + m_2 v_2' \,\text{sen}\,\phi_2 \tag{7}$$

Pela regra de colisão de Newton, tem-se

Velocidade relativa, após o impacto, ao longo do eixo $x = \varepsilon$. {velocidade relativa antes do impacto ao longo do eixo x}

ou
$$\mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{i} = -\varepsilon(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{i} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{i}) \tag{8}$$

na qual, usando-se as equações (2)–(5), fica

$$v_1' \cos\phi_1 - v_2' \cos\phi_2 = -\varepsilon(v_1 \cos\theta_1 - v_2 \cos\theta_2). \tag{9}$$

E, como as velocidades tangenciais, antes e após o impacto, são iguais

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{v}_1' \cdot \mathbf{j} \tag{10}$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{j} = \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{j} \tag{11}$$

ou

$$v_1 \,\text{sen}\,\theta_1 = v_1' \,\text{sen}\,\phi_1 \tag{12}$$
$$v_2 \,\text{sen}\,\theta_2 = v_2' \,\text{sen}\,\phi_2 \tag{13}$$

A equação (7) é, automaticamente, satisfeita pelo uso das equações (12) e (13).

Das equações (6) e (9) achamos

$$v_1' \cos\phi_1 = \frac{(m_1 - m_2\varepsilon)v_1 \cos\theta_1 + m_2(1+\varepsilon)v_2\cos\theta_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' \cos\phi_2 = \frac{m_1(1+\varepsilon)v_1 \cos\theta_1 + (m_2 - m_1\varepsilon)v_2\cos\theta_2}{m_1 + m_2}$$

Então, usando-se (12) e (13) temos

$$\mathbf{v}_1' = v_1'(\cos\phi_1\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\phi_1\,\mathbf{j})$$
$$= \frac{(m_1 - m_2\varepsilon)v_1 \cos\theta_1\,\mathbf{i} + m_2(1+\varepsilon)v_2\cos\theta_2\,\mathbf{i}}{m_1 + m_2} - v_1\,\text{sen}\,\theta_1\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_2' = v_2'(\cos\phi_2\,\mathbf{i} - \text{sen}\,\phi_2\,\mathbf{j})$$
$$= \frac{m_1(1+\varepsilon)v_1 \cos\theta_1\,\mathbf{i} + (m_2 - m_1\varepsilon)v_2\cos\theta_2\,\mathbf{i}}{m_1 + m_2} - v_2\,\text{sen}\,\theta_2\,\mathbf{j}$$

SISTEMAS DE PARTÍCULAS CONTÍNUOS

8.10. Derive a equação diferencial parcial (1), para as vibrações transversais de um fio oscilante.

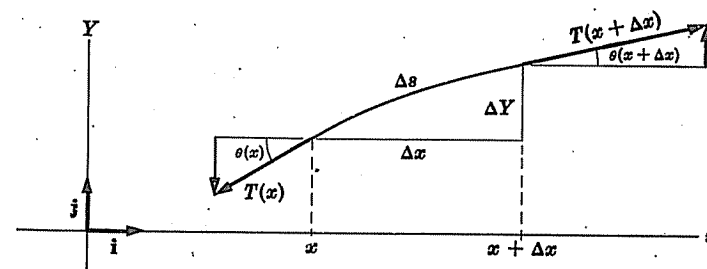



Fig. 8-14

Considere-se o movimento de um elemento do fio de comprimento Δs, em escala maior na fig. 8-14.

As forças atuantes no elemento devido ao restante do fio são dadas pelas tensões, como as mostradas na fig. 8-14, de magnitude $T(x)$ e $T(x + \Delta x)$ nas extremidades x e $x + \Delta x$ do elemento.

A força resultante horizontal na direção $\mathbf{i}$ atuante sobre o elemento é

$$[T(x+\Delta x)\cos\theta(x+\Delta x) - T(x)\cos\theta(x)]\,\mathbf{i}. \tag{1}$$

A força resultante vertical na direção $\mathbf{j}$ atuante sobre o elemento é

$$[T(x+\Delta x)\,\text{sen}\,\theta(x+\Delta x) - T(x)\,\text{sen}\,\theta(x)]\,\mathbf{j} \tag{2}$$

Admitindo-se que o movimento horizontal na direção $\mathbf{i}$ é negligenciável, a força resultante (1) é zero. Usando o fato de que a aceleração do elemento

é $\partial^2 Y/\partial t^2$ aproximadamente e que sua massa é $\sigma \Delta s$, onde σ é a massa por unidade de comprimento, tem-se de (2) e pela segunda lei de Newton,

$$\sigma \Delta s \frac{\partial 2\, Y}{\partial t^2} \mathbf{j} = [T(x+\Delta x) \operatorname{sen} \theta(x+\Delta x) - T(x) \operatorname{sen} \theta(x)]\, \mathbf{j} \tag{3}$$

ou, dividindo-se por $\Delta x \mathbf{j}$,

$$\sigma \frac{\Delta s}{\Delta x} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T(x+\Delta x) \operatorname{sen} \theta(x+\Delta x) - T(x) \operatorname{sen} \theta(x)}{\Delta x} \tag{4}$$

ou

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\Delta Y}{\Delta x}\right)^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{T(x+\Delta x) \operatorname{sen} \theta(x+\Delta x) - T(x) \operatorname{sen} \theta(x)}{\Delta x} \tag{5}$$

Fazendo o limite para $\Delta x \to 0$, fica

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\{T \operatorname{sen} \theta\}$$

Como

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{\partial Y/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Y/\partial x)^2}}$$

a equação (5) pode ser escrita como

$$\sigma \sqrt{1+\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{T\, \partial Y/\partial x}{\sqrt{1+(\partial Y/\partial x)^2}}\right\} \tag{6}$$

Para simplificar esta equação, faz-se a hipótese de que as amplitudes de vibração sejam pequenas tais que a inclinação $\partial Y/\partial x$ seja pequena quando comparada com a unidade em valor absoluto. Então, pode-se negligenciar $(\partial Y/\partial x)^2$ comparada com a unidade e (6) fica

$$\sigma \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial Y}{\partial x}\right) \tag{7}$$

onde $c^2 = T/\sigma$. A menos que se especifique em contrário, ao se falar de fios vibrantes, deve-se referir à equação (8).

8.11. Derive a equação do probl. 8.10 com o fio na horizontal e levando em conta a gravidade.

Neste caso, deve-se adicionar ao lado direito da equação (3) do probl. 8.10 a fôrça da gravidade sôbre o elemento

$$-mg = -\sigma \Delta s\, g \mathbf{j}$$

O efeito disto é a troca da equação (8) do probl. 8.10 pela equação

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g$$

SÉRIES DE FOURIER

8.12. Faça o gráfico das seguintes funções

(a) $f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x < 5 \\ -3 & -5 < x < 0 \end{cases}$ Período $= 10$

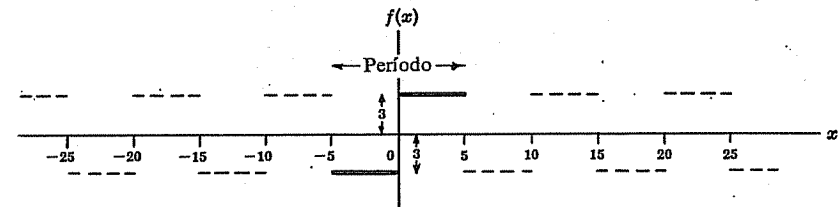



Fig. 8-15

Como o período é 10, a parte do gráfico em $-5 < x < 5$ (indicada com traço mais grosso na fig. 8-15 acima) é estendida periodicamente para fora deste intervalo (indicada pela parte tracejada). Note que $f(x)$ não é definido em $x = 0, 5, -5, 10, -10, 15 -15$ etc. Estes valores são as descontinuidades de $f(x)$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$ Período $= 2\pi$

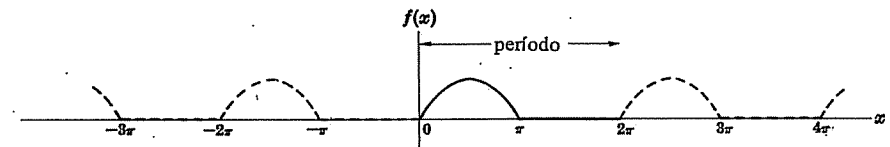



Fig. 8-16

Referindo-se à fig. 8-16, note que $f(x)$ é definida para todo valor de x e é contínua em todos pontos.

8.13. Prove que

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0 \quad \text{se } k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = -\frac{l}{k\pi} \cos k\pi + \frac{l}{k\pi} \cos(-k\pi) = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen} k\pi - \frac{l}{k\pi} \operatorname{sen}(-k\pi) = 0$$

8.14. Prove que

$$(a)\ \int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ l & m = n \end{cases}$$

$$(b)\ \int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

onde m e n podem assumir quaisquer dos valores $1, 2, 3, \ldots$

(*a*) Da trigonometria $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$.

Então, se $m \neq n$, pelo probl. 8.13,

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Igualmente, se $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0$$

Se $m = n$, tem-se

$$\int_{-l}^{l} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 + \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx = l$$

Note que, se $m = n = 0$, estas integrais são iguais a $2l$ e 0, respectivamente.

(*b*) Tem-se $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\}$. Então, pelo probl. 8.13, se $m \neq n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\operatorname{sen}\frac{(m-n)\pi x}{l} + \operatorname{sen}\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx = 0.$$

Se $m = n$,

$$\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \operatorname{sen}\frac{2n\pi x}{l}\,dx = 0.$$

Os resultados dos itens (*a*) e (*b*) permanecem válidos, mesmo quando os limites de integração $-l$, l são substituídos por γ, $\gamma + 2l$, respectivamente.

8.15. Se

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right)$$

prove que, fazendo-se hipóteses convenientes referentes à integração termo a termo de sinais infinitos, para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$(a)\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (b)\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (c)\ A = \frac{a_0}{2}.$$

(*a*) Multiplicando-se

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

por $\cos\frac{m\pi x}{l}$, integrando-se de $-l$ a l e usando o probl. 8.14, tem-se

$$\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx = A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= a_m l \quad \text{se} \quad m \neq 0.$$

Assim,

$$a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

(*b*) Multiplicando-se (1) por $\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}$, integrando-se de $-l$ a l e usando o probl. 8.14, tem-se

$$\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx = A\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx \tag{3}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= b_m l.$$

Assim,

$$b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{l}\,dx.$$

(*c*) A integração de (1) de $-l$ a l, usando o probl. 8.13, dá

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2Al \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx.$$

Pondo $m = 0$ no resultado do item (*a*), acha-se $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$ e, assim, $A = \frac{a_0}{2}$.

Os resultados acima mantêm-se também quando os limites de integração $-l$, l são substituídos por γ, $\gamma + 2l$.

Note que, em todos os itens precedentes, foi admitido ser possível o intercâmbio da somatória pela integração. Mesmo quando esta hipótese não for garantida, os coeficientes a_m e b_m obtidos são chamados de *coeficientes de Fourier* correspondentes a $f(x)$, e a série correspondente com estes valores de a_m e b_m é chamada de *série de Fourier* correspondente a $f(x)$. Um problema importante, neste caso, é a investigação das condições sob as quais esta série realmente converge para $f(x)$. As condições suficientes para esta convergência são as *condições de Dirichlet*.

8.16. (*a*) Ache os coeficientes de Fourier correspondentes à função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \quad \text{Período} = 10$$

(*b*) Escreva a série de Fourier correspondente.
(*c*) Como deve ser definida $f(x)$ em $x = -5$, $x = 0$ e $x = 5$, de maneira que a série de Fourier seja convergente para $f(x)$ com $-5 \leqq x \leqq 5$?

O gráfico de $f(x)$ é mostrado na fig. 8-17.

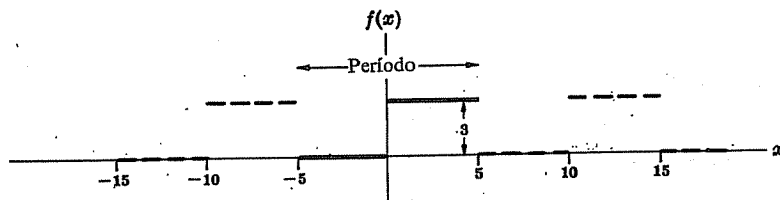



Fig. 8-17

(*a*) Período $= 2l = 10$ e $l = 5$. Escolha o intervalo γ a $\gamma + 2l$ como -5 a 5, tal que $\gamma = -5$. Então,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right\} = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = 0 \quad \text{se} \quad n \neq 0.$$

Se

$$n = 0, \quad a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{\gamma}^{\gamma+2l} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}.$$

(*b*) A série de Fourier correspondente é

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{5} + \ldots\right)$$

(*c*) Como $f(x)$ satisfaz as condições de Dirichlet, pode-se dizer que a série converge para $f(x)$ em todos os pontos contínuos e para $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ nos pontos de descontinuidade. Em $x = -5$, 0 e 5, que são pontos de descontinuidade, a série converge para $(3 + 0)/2 = 3/2$, como é visto no gráfico. Se $f(x)$ for redefinido como segue,

$$f(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \quad \text{Período} = 10$$

então a série convergirá para $f(x)$ com $-5 < x < 5$.

8.17. Se $f(x)$ for par, mostre que (*a*) $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, (*b*) $b_n = 0$.

$$(a)\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

Seja $x = -u$,

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$$

como pela definição de uma função par $f(-u) = f(u)$. Então,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

(*b*) $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (1)$$

Se for feita a transformação $x = -u$ na primeira integral da direita de (1), obtém-se

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(-u)\,\text{sen}\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(-u)\,\text{sen}\,\frac{n\pi u}{l}\,du \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(u)\,\text{sen}\,\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

onde é usado o fato de que, para uma função par $f(-u) = f(u)$ e que na última igualdade a variável de integração u pode ser trocada por um outro símbolo qualquer, em particular o x. Assim, de (1), usando-se (2), tem-se

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0.$$

8.18. Expanda $f(x) = x$, $0 < x < 2$, em um meio período, em (*a*) série senoidal, (*b*) série co-senoidal.

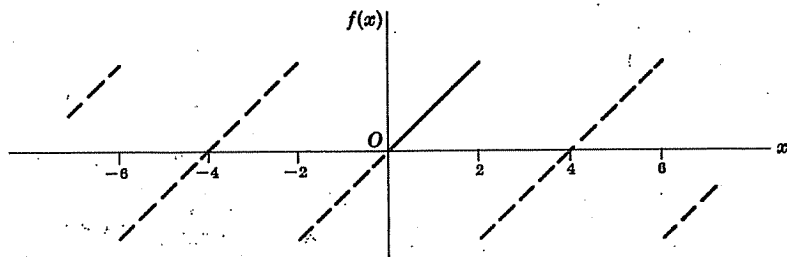



Fig. 8-18

(*a*) Estenda a definição da função dada para a função ímpar de período 4 mostrada na fig. 8-18. Isto é chamado, algumas vezes, *extensão ímpar* de $f(x)$. Então, $2l = 4$, $l = 2$

Assim, $a_n = 0$ e

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi.$$

Então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}\,\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,\frac{3\pi x}{2} - \ldots\right)$$

(*b*) Estenda a definição de $f(x)$ para a função par de período 4 mostrada na fig. 8-19. Isto é a *expansão par* de $f(x)$. Então, $2l = 4$, $l = 2$.

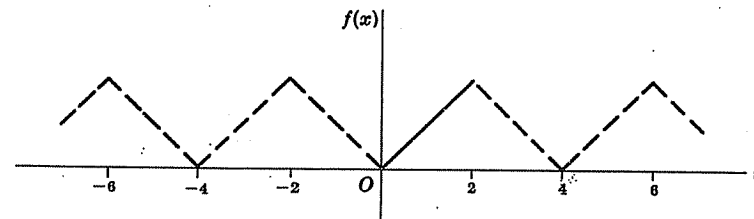



Fig. 8-19

Assim, $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{se} \quad n \neq 0.$$

Se $n = 0$, $a_0 = \int_{0}^{2} x\,dx = 2.$

Então,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \dots\right)$$

Deve-se notar que a função dada $f(x)$, $0 < x < 2$, é *igualmente bem* representada pelas duas séries *diferentes* em (*a*) e (*b*).

SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE FIOS VIBRANTES

8.19. Ache o deslocamento transversal de um fio vibrante de comprimento l com as extremidades fixas e com um deslocamento inicial $f(x)$ de sua posição de equilíbrio.

Seja $Y(x, t)$ o deslocamento transversal em um ponto qualquer x do fio. Como as extremidades $x = 0$ e $x = l$ do fio são fixas, deve-se ter $Y(0, t) = 0$ e $Y(l, t) = 0$. Como o deslocamento inicial é $f(x)$, tem-se $Y(x, 0) = f(x)$; e, como a velocidade inicial é zero, tem-se que $Y_t(x, 0) = 0$, onde Y_t representa a derivada parcial com relação a t. Deve-se resolver assim o problema de valor de contorno:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad Y_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

Admita a solução de (1) como tendo a forma $Y = XT$, onde X depende somente de x e T depende sòmente de t. Então, substituindo em (1), usando X'' para representar d^2X/dx^2 e T'' para representar d^2T/dt^2, tem-se

$$X\,T'' = c^2 X'' T$$

ou

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} \tag{3}$$

Como um lado depende sòmente de x e o outro lado depende de t, enquanto x e t são independentes, o único modo no qual (2) é válido é se cada lado for uma constante, que será tomada como $-\lambda^2$. Assim

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{c^2 T} = -\lambda^2$$

ou

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + \lambda^2 c^2 t = 0$$

Estas equações têm como soluções

$$X = A_1 \cos \lambda x + B_1 \operatorname{sen} \lambda x, \quad T = A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct$$

Assim, a solução é dada por

$$Y(x, t) = XT = (A_1 \cos \lambda x + B_1 \operatorname{sen} \lambda x)(A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct) \tag{4}$$

Da primeira condição em (2), tem-se

$$B_1(A_2 \cos \lambda ct + B \operatorname{sen} \lambda ct) = 0$$

de onde $A_1 = 0$ [pois, se o segundo fator for nulo, então a solução é identicamente nula, o que não se quer]. Assim,

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= B_1 \operatorname{sen} \lambda x (A_2 \cos \lambda ct + B_2 \operatorname{sen} \lambda ct) \\ &= \operatorname{sen} \lambda x (b \cos \lambda ct + a \operatorname{sen} \lambda ct) \end{aligned} \tag{5}$$

fazendo-se

$$B_1 A_2 = b, \quad B_1 B_2 = a.$$

Usando-se a segunda condição de (2) em (5), vê-se que $\operatorname{sen} \lambda l = 0$ ou $\lambda l = n\pi$, onde $n = 1, 2, 3, \dots$ Portanto, $\lambda = n\pi/l$ e a solução será

$$Y(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(b \cos\frac{n\pi ct}{l} + a \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right) \tag{6}$$

Pela diferenciação com relação a t, fica

$$Y_t(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(-\frac{n\pi cb}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l} + \frac{n\pi ca}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

Assim, a quarta condição em (2) dá

$$Y_t(x, 0) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{n\pi ca}{l}\right) = 0,$$

de onde $a = 0$. Então, (6) fica

$$Y(x, t) = b \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{7}$$

Para satisfazer a terceira condição de (2), usa-se o fato de que as soluções de (7), multiplicadas por constantes, assim como as somas de soluções são também soluções [o *teorema ou princípio da superposição* para equações diferenciais lineares]. Assim, escreve-se a solução

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} \tag{8}$$

Usando-se a terceira solução de (2) em (8), deve-se ter

$$Y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

Mas isto é, simplesmente, a expansão de $f(x)$ em uma série de Fourier de senos e os coeficientes são dados por

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Assim, a solução é dada por

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l} \qquad (10)$$

O método de solução supondo $Y = XT$ é, geralmente, chamado de método da *separação de variáveis.*

8.20. Um fio com as extremidades fixas é puxado pelo seu centro de uma distância H da posição de equilíbrio e, então, é solto. Ache o deslocamento em uma posição qualquer e em um instante qualquer.

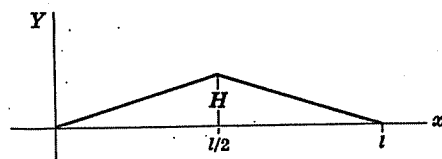



Fig. 8-20

Pela fig. 8-20, vê-se que o deslocamento inicial do fio é dado por

$$Y(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2Hx/l & 0 < x \leqq l/2 \\ 2H(l-x)/l & l/2 \leqq x \leqq l \end{cases}$$

Ora,

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2}{l} \left\{ \int_0^{l/2} \frac{2Hx}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx + \int_{l/2}^l \frac{2H}{l} (l-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx \right\}$$

$$= \frac{8H}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{(n\pi/2)}{n^2}$$

usando a integração por partes para achar as integrais. Empregando-se isto na equação (10) do probl. 8-19, encontramos

$$Y(x, t) = \frac{8H}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}$$

$$= \frac{8H}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{1^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l} - \frac{1}{3^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l} + \frac{1}{5^2} \operatorname{sen} \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5\pi ct}{l} - \dots \right\}$$

8.21. Ache as frequências normais e os modos normais para o fio vibrante do probl. 8.20.

O modo normal correspondente à menor frequência é dado pelo primeiro termo da solução do probl. 8.20, i.e.,

$$\frac{8H}{\pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l}$$

A frequência é dada por f_1, onde

$$2\pi f_1 = \frac{\pi c}{l} \quad \text{ou} \quad f_1 = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

Como o co-seno varia entre -1 e $+1$, o modo é tal que o fio oscila como na fig. 8-21 da curva cheia para a curva tracejada e de volta de nôvo.

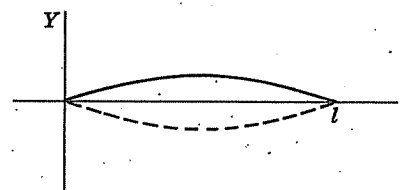
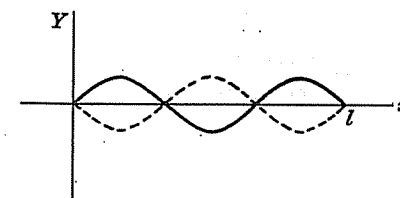



Fig. 8-21 **Fig. 8-22**

A próxima frequencia mais alta é dada pelo modo correspondente ao próximo termo da série, que, por sinal, é

$$\frac{8H}{9\pi^2} \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi ct}{l}$$

Neste caso, a frequência é dada por

$$2\pi f_3 = \frac{3\pi c}{l} \quad \text{ou} \quad f_3 = \frac{3c}{2l} = \frac{3}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

O modo é indicado na fig. 8-22.

As frequências normais mais altas são dadas por

$$f_5 = \frac{5}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad f_7 = \frac{7}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad \dots$$

As amplitudes dos modos correspondentes às frequências pares

$$f_2 = \frac{2}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad f_4 = \frac{4}{2l} \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \quad \dots$$

são nulas, de modo que estas frequências não estão presentes. Em um deslocamento generalizado, entretanto, elas estariam presentes.

Por causa do fato de que todas as frequências normais mais altas são múltiplos inteiros da frequência normal menor, geralmente chamada de *frequência fundamental*, o fio vibrante emite uma *nota musical*. As frequências mais altas são, algumas vezes, chamadas de *sobretons*.

8.22. Ache o deslocamento transversal de um fio vibrante de comprimento l com as extremidades fixas, se o fio estiver inicialmente na posição de equilíbrio e for dada uma distribuição de velocidades definida por $g(x)$.

Neste caso, deve-se resolver o problema de valor de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = g(x) \tag{2}$$

O método de separação de variáveis e a aplicação das primeiras duas condições de (2) leva a, como no probl. 8.19,

$$Y(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\left(b\cos\frac{n\pi ct}{l} + a\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)$$

Entretanto, neste caso, se aplicarmos a terceira condição de (2), acha-se $b = 0$; assim,

$$Y(x,t) = a\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

Para satisfazer a quarta condição, vê-se que o princípio da superposição é aplicável; assim, chega-se à solução

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

Disto se tem por diferenciação com relação a t,

$$Y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c a_n}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$

ou

$$Y_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c a_n}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

Então, pelo método de série de Fourier, vê-se que

$$\frac{n\pi c a_n}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad \text{ou} \quad a_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{4}$$

Assim, a solução pedida é, usando-se (4) em (3),

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l} \tag{5}$$

8.23. Ache o deslocamento transversal de um fio vibrante de comprimento l com as extremidades fixas, se o fio, inicialmente, tiver um deslocamento da posição de equilíbrio dado por $f(x)$ e uma distribuição de velocidades dada por $g(x)$.

A solução deste problema é a soma das soluções do probl. 8.19 e do probl. 8.22.

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}$$

PROBLEMAS DIVERSOS

8.24. Uma partícula é deixada cair verticalmente sobre um plano horizontal fixo. Se ela bate no plano com uma velocidade $\mathbf{v}$, mostre que sairá com velocidade $-\varepsilon\mathbf{v}$ do plano.

A solução deste problema pode ser obtida dos resultados do probl. 8.6, tornando m_2 infinita e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, enquanto $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ [onde os subscritos 1 e 2 referem-se à partícula e ao plano, respectivamente]. Então, as velocidades respectivas, após o impacto, são dadas por

$$\lim_{m_2\to\infty} \mathbf{v}_1' = \lim_{m_2\to\infty}\frac{\{(m_1/m_2)-\varepsilon\}\mathbf{v}}{1+(m_1/m_2)} = -\varepsilon\mathbf{v}$$

$$\lim_{m_2\to\infty} \mathbf{v}_2' = \lim_{m_2\to\infty}\frac{(m_1/m_2)(1+\varepsilon)\mathbf{v}}{1+(m_1/m_2)} = \mathbf{0}$$

Portanto, a velocidade da partícula, após o impacto, é $-\varepsilon\mathbf{v}$. A velocidade do plano naturalmente permanece nula.

8.25. Considere que a partícula do probl. 8.24 é deixada cair, partindo do repouso, de uma altura H, acima do plano. Prove que a distância total teórica percorrida pela partícula, antes de atingir o repouso, é dada por $H(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$.

Seja v o módulo da velocidade da partícula, no momento em que ela começa a tocar no plano. Então, pela conservação de energia $\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + mgH$ ou $v^2 = 2gH$. Assim, pelo probl. 8.24, a partícula sai do plano com um módulo da velocidade de εv e alcança a altura $(\varepsilon v)^2/2g = \varepsilon^2 H$. Ela cairá de novo de uma altura de $\varepsilon^2 H$. Deste modo, na primeira saída do plano, ela percorre $2\varepsilon^2 H$.

Por razões semelhantes, acha-se que, na segunda, terceira, ... saídas do plano, ela percorrerá as distâncias $2\varepsilon^4 H$, $2\varepsilon^6 H$, ... Então, a distância total teórica percorrida antes de alcançar o repouso é

$$H + 2\varepsilon^2 H + 2\varepsilon^4 H + 2\varepsilon^6 H + \ldots = H + 2\varepsilon^2 H(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \ldots)$$
$$= H + \frac{2\varepsilon^2 H}{1-\varepsilon^2} = H\left(\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right),$$

usando o resultado $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = 1/(1-r)$ se $|r| < 1$.

8.26. Duas partículas, tendo massas m e M, estão percorrendo o eixo x (admitido sem atrito) com velocidades $v_1\mathbf{i}$ e $V_1\mathbf{i}$, respectivamente. Considere que elas colidem e que, após a colisão (impacto), suas velocidades sejam $v_2\mathbf{i}$ e $V_2\mathbf{i}$, respectivamente. Prove que as velocidades do centro do centro de massa, antes e após a colisão, são iguais.

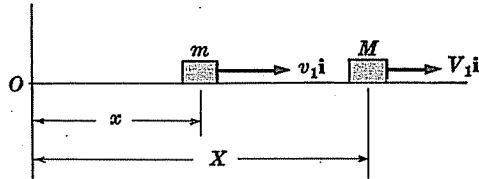



Fig. 8-23

Pela conservação de momentum,

o momentum total antes do impacto = momentum total após o impacto

$$mv_1\mathbf{i} + MV_1\mathbf{i} = mv_2\mathbf{i} + MV_2\mathbf{i}$$

ou

$$mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$$

Seja x e X as coordenadas respectivas das partículas. Então, o centro de massa é dado por $\bar{r} = (mx + MX)/(m + M)$.

A velocidade do centro de massa, antes do impacto, é

$$\dot{\bar{r}}_1 = (mv_1 + MV_1)/(m + M)$$

A velocidade do centro de massa, após o impacto, é $\dot{\bar{r}}_2 = (mv_2 + MV_2)/(m + M)$. Assim, $\dot{\bar{r}}_1 = \dot{\bar{r}}_2$.

8.27. Uma partícula de massa m escorrega por uma cunha, sem atrito, inclinada de um ângulo α, de massa M e comprimento L, que está sobre um plano horizontal sem atrito [veja a fig. 8.24]. Se a partícula parte do repouso no topo da cunha, prove que o tempo para que a partícula alcance a parte inferior da cunha é dado por $\sqrt{\dfrac{2L(M + m\,\text{sen}^2\,\alpha)}{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}}$.

Escolha um sistema de coordenadas xy fixo e na vertical como na fig. 8-24. Seja $\mathbf{R}$ o vetor-posição do centro de massa C da partícula e da cunha, $\mathbf{A}$ o vetor (constante) de C ao tôpo da cunha, e $\mathbf{s}$ o vetor-posição da partícula em relação ao topo da cunha. Então, o vetor-posição da partícula m com relação ao sistema de coordenadas fixo é $\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{s}$. Como a única força atuante sobre a partícula é o próprio peso $m\mathbf{g}$ da partícula, tem-se, pela segunda lei de Newton aplicada à partícula,

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{s}) = m\mathbf{g} \tag{1}$$

ou

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2} = \mathbf{g} \tag{2}$$

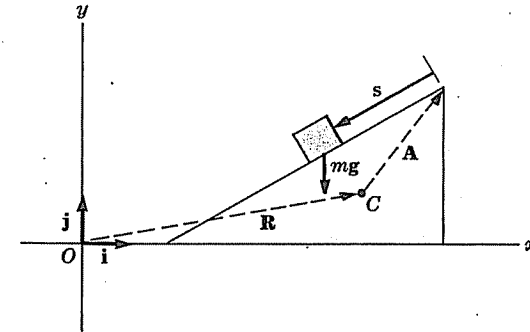



Fig. 8-24

Escrevendo $\mathbf{R} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ e $\mathbf{s} = s\mathbf{s}_1$, onde $\mathbf{s}_1$ é um vetor unitário na direção e sentido de $\mathbf{s}$, (2) transforma-se em

$$\frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{s}_1 = -g\mathbf{j}$$

Multiplicando por $\mathbf{s}_1\cdot$, teremos

$$\frac{d^2X}{dt^2}\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{i} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_1 = -g\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{j}$$

ou

$$-\frac{d^2X}{dt^2}\cos\alpha + \frac{d^2s}{dt^2} = g\,\text{sen}\,\alpha$$

Como a força horizontal resultante atuante sobre o sistema, consistindo na partícula e na cunha, é nula, então o momentum total na direção horizontal, antes e após a partícula começar a escorregar, é nulo. Assim

$$M\frac{d\mathbf{R}}{dt}\cdot\mathbf{i} + m\frac{d}{dt}(\mathbf{R} + \mathbf{A} + \mathbf{s})\cdot\mathbf{i} = 0$$

Isto pode ser escrito como

$$(M + m)\frac{dX}{dt} - m\frac{ds}{dt}\cos\alpha = 0 \tag{4}$$

Diferenciando (4) com relação a t e resolvendo para d^2x/dt^2, achamos

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{m\cos\alpha}{M+m}\frac{d^2s}{dt^2} \tag{5}$$

Substituindo na (3), temos

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}{M + m - m\cos^2\alpha} = \frac{(M+m)g\,\text{sen}\,\alpha}{M + m\,\text{sen}^2\,\alpha} \tag{6}$$

Integrando (6) sujeita às condições $s = 0$, $ds/dt = 0$ em $t = 0$, encontramos

$$s = \frac{1}{2}\left\{\frac{(M+m)g \operatorname{sen}\alpha}{M + m \operatorname{sen}^2\alpha}\right\} t^2,$$

que, quando $s = L$, dá-nos o tempo pedido.

8.28. Resolva o probl. 8.19 de fio vibrante, levando em consideração a gravidade.

O problema do valor de contorno é

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - g \tag{1}$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(l,t) = 0, \quad Y(x,0) = f(x), \quad Y_t(x,0) = 0 \tag{2}$$

Por causa do termo $-g$, o método da separação de variáveis não é aplicável neste caso. Para remover este termo, faz-se

$$Y(x,t) = Z(x,t) + \psi(x) \tag{3}$$

na equação e condições. Assim, achamos

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + c^2\psi'' - g \tag{4}$$

$$Z(0,t) + \psi(0) = 0, \quad Z(l,t) + \psi(l) = 0, \quad Z(x,0) + \psi(x) = f(x), \quad Z_t(x,0) = 0$$

A equação (4) e condições (5) ficam semelhantes ao problema já discutido, se escolhermos ψ, tal que

$$c^2\psi'' - g = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0 \tag{6}$$

Neste caso, (4) e (5) ficam

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \tag{7}$$

$$Z(0,t) = 0, \quad Z(l,t) = 0, \quad Z(x,0) = f(x) - \psi(x), \quad Z_t(x,0) = 0 \tag{8}$$

Agora, de (6) acha-se $\psi'' = g/c^2$ ou $\psi(x) = gx^2/2c^2 + c_1 x + c_2$; e, como $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$, obtém-se $c_2 = 0$, $c_1 = -gl/2c^2$. Assim,

$$\psi(x) = \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)$$

A solução da equação (7) com as condições (8) é, como no probl. 8.19,

$$Z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l}\int_0^l [f(x) - \psi(x)] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l}$$

e, assim,

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2}{l}\int_0^l \left[f(x) - \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l} + \frac{g}{2c^2}(x^2 - lx)$$

8.29. Suponha que um fio contínuo, fixo em suas extremidades e que vibra transversalmente, é substituído por N partículas de massa m e distâncias iguais entre si. Determine as equações do movimento das partículas.

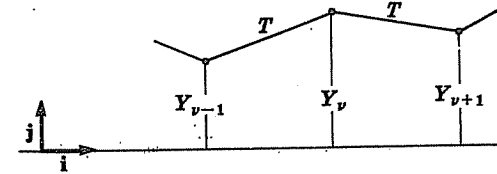



Fig. 8-25

Admitindo que as partículas são ligadas umas às outras por molas elásticas esticadas com uma tensão T constante [veja a fig. 8-25]. Supondo que as distâncias horizontais entre as partículas [i.e., na direção do vetor unitário **j**] da partícula ν é Y_ν. E, por último, admita que nenhuma partícula desloque na direção **i** ou $-$**i**.

Isole-se a partícula de número ν. As forças atuantes nesta partícula são as devidas às partículas de número $(\nu - 1)$ e a de número $(\nu + 1)$. Temos

$$\text{Força transversal devida à partícula de n.° } (\nu-1) = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu-1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

$$\text{Força transversal devida à partícula de n.° } (\nu+1) = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu+1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

Então, pela segunda lei de Newton, a força total transversal atuante sobre a partícula ν é

$$m\frac{d^2 Y_\nu}{dt^2}\mathbf{j} = -T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu-1}}{a}\right)\mathbf{j} - T\left(\frac{Y_\nu - Y_{\nu+1}}{a}\right)\mathbf{j}$$

ou

$$m\frac{d^2 Y_\nu}{dt^2} = \frac{T}{a}(Y_{\nu-1} - 2Y_\nu + Y_{\nu+1})$$

i.e.

$$\ddot{Y}_\nu = \frac{T}{ma}(Y_{\nu-1} - 2Y_\nu + Y_{\nu+1}) \tag{1}$$

Para levar em conta o fato de que as extremidades são fixas, admitem-se duas partículas correspondentes a $\nu = 0$ e $\nu = N + 1$ para as quais $Y_0 = 0$ e $Y_{N+1} = 0$. Então, pondo-se $\nu = 1$ e $\nu = N$ na equação (1), achamos

$$\ddot{Y}_1 = \frac{T}{ma}(-2Y_1 + Y_2), \quad \ddot{Y}_N = \frac{T}{ma}(Y_{N-1} - 2Y_N) \tag{2}$$

8.30. Obtenha a condição de determinante característico para as frequências normais do sistema de partículas no probl. 8.29.

Substitui-se $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t$ nas equações (1) e (2) do probl. 8.29. Então, após simplificação, acha-se

$$-A_{\nu-1} + (2-ma\omega^2/T)A_\nu - A_{\nu+1} = 0 \quad \nu = 2,\ldots,N-1 \tag{1}$$
$$(2-ma\omega^2/T)A_1 - A_2 = 0, \quad -A_{N-1} + (2-ma\omega^2/T)A_N = 0 \tag{2}$$

Pondo

$$2-ma\omega^2/T = c \tag{3}$$

estas equações podem ser escritas como

$$cA_1 - A_2 = 0, \quad -A_1 + cA_2 - A_3 = 0, \quad \ldots, \quad -A_{N-1} + cA_N = 0$$

Então, se se desejarem soluções tais que $A_\nu \neq 0$, deve-se fazer com que o determinante dos coeficientes de ordem enésima seja nulo, i.e.,

$$\Delta_N = \begin{vmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & c & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & c & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & c & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & c \end{vmatrix} = 0$$

As frequências normais são obtidas pela solução desta equação para os N valôres de ω^2.

Embora se tenha usado $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t$, pode-se muito bem admitir que $Y_\nu = B_\nu \operatorname{sen} \omega t$ ou $Y_\nu = A_\nu \cos \omega t + B_\nu \operatorname{sen} \omega t$ ou $Y_\nu = C_\nu e^{i\omega t}$. O determinante característico, assim obtido, seria o mesmo [compare as notas no fim do probl. 8.2(*b*)].

8.31. Prove que as frequências normais no probl. 8.30 são dadas por

$$\omega_\alpha^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{\alpha\pi}{N+1}\right) \quad \alpha = 1,\ldots,N$$

Pela expansão do determinante Δ_N do probl. 8.30 em termos dos elementos da primeira linha, têm-se

$$\Delta_N = c\Delta_{N-1} - \Delta_{N-2} \tag{1}$$

Também

$$\Delta_1 = c, \quad \Delta_2 = c^2 - 1 \tag{2}$$

Pondo $N = 2$ em (1), vemos que as equações (2) são satisfeitas formalmente, se fôr tomado $\Delta_0 = 1$. Assim, as condições consistentes com (1) e (2) são

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_1 = c \tag{3}$$

Para resolver a *equação de diferença de matrizes* (1), suponha que $\Delta_N = p^N$, onde p é uma constante a ser determinada. Substituindo-se isto em (1), acha-se, dividindo por p^{N-2},

$$p^2 - cp + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad p = \frac{c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}$$

Se se chamar $c = 2\cos\theta$, então

$$p = \cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta = e^{\pm i\theta}$$

Assim, as soluções da equação de diferença de matrizes são

$$(e^{i\theta})^N = e^{iN\theta} = \cos N\theta + i \operatorname{sen} N\theta \quad \text{e} \quad (e^{-i\theta})^N = e^{-Ni\theta} = \cos N\theta - i \operatorname{sen} N\theta.$$

Como, multiplicando-se estas soluções por constantes ou somando as soluções obtém-se ainda soluções [como no caso das equações diferenciais lineares], vê-se que a *solução generalizada* é

$$\Delta_N = G\cos N\theta + H \operatorname{sen} N\theta \tag{4}$$

Agora, das equações (3) tem-se $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 2\cos\theta$ tal que $G = 1$, $H = \operatorname{cotg}\theta$. Assim,

$$\Delta_N = \cos N\theta + \frac{\operatorname{sen} N\theta \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}(N+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{5}$$

Istó é igual a zero, quando $\operatorname{sen}(N+1)\theta = 0$ ou $\theta = \alpha\pi/(N+1)$, $\alpha = 1,\ldots,N$. Portanto, usando (3) do probl. 8.30, temos

$$\omega_\alpha^2 = \frac{2T}{ma}\left(1 - \cos\frac{\alpha\pi}{N+1}\right) \tag{6}$$

8.32. Resolva o probl. 8.30, tendo como incógnita A_ν e ache, então, o deslocamento transversal Y_ν da partícula ν.

Das equações (1) e (2) do probl. 8.30 tem-se que [usando as frequências normais (6) do probl. 8.31 e o subscrito α para indicar que os A's dependem de α]

$$-A_{\nu-1}^{(\alpha)} + 2A_\nu^{(\alpha)} \cos\frac{\alpha\pi}{N+1} - A_{\nu+1}^{(\alpha)} = 0 \tag{1}$$

junto com as condições das extremidades

$$A_0^{(\alpha)} = 0, \quad A_{N+1}^{(\alpha)} = 0 \tag{2}$$

A equação (1), sujeita às condições (2), pode ser resolvida de maneira exatamente igual à do probl. 8.31 e acha-se

$$A_\nu^{(\alpha)} = C_\alpha \operatorname{sen}\frac{\alpha\nu\pi}{N+1}$$

onde C_α são constantes arbitrárias. De maneira semelhante, se for admitido que $Y_\nu = B_\nu \operatorname{sen} \omega t$ [veja as notas no fim do probl. 8.30], obter-se-ia

$$B_\nu^{(\alpha)} = D_\alpha \operatorname{sen} \frac{\alpha\nu\pi}{N+1}$$

Dêste modo, as soluções são dadas por

$$C_\alpha \operatorname{sen} \frac{\alpha\nu\pi}{N+1} \cos \omega t \quad \text{e} \quad D_\alpha \operatorname{sen} \frac{\alpha\nu\pi}{N+1} \operatorname{sen} \omega t$$

e, como as somas das soluções são também soluções, têm-se que

$$Y_\nu = \sum_{\alpha=1}^{N} \operatorname{sen} \frac{\alpha\nu\pi}{N+1} (C_\alpha \cos \omega t + D_\alpha \operatorname{sen} \omega t)$$

As constantes C_α e D_α são determinadas das condições iniciais.

A analogia com o fio contínuo vibrante é facilmente vista.

Problemas Propostos

SISTEMAS VIBRANTES DE PARTÍCULAS

8.33. Ache as frequências normais das vibrações no probl. 8.1, considerando que todas as constantes de molas e massas são diferentes.

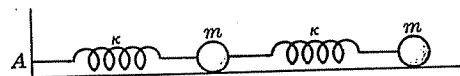



Fig. 8-26

8.34. Duas massas iguais m sobre uma mesa horizontal sem atrito, como é indicado na fig. 8-26, são conectadas por molas iguais. A extremidade de uma mola é fixa em A e as massas são postas em movimento. (*a*) Ache as equações do movimento do sistema. (*b*) Ache as frequências normais de vibração. (*c*) Descreva os modos normais de vibração.

Resp.: (*b*) $f_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}},\ f_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{\kappa}{m}}$

8.35. Faça o probl. 8.34, considerando que as constantes das molas e massas são diferentes entre si.

8.36. Duas massas iguais m são presas às extremidades de uma mola de constante κ, que está sôbre uma mesa horizontal sem atrito. Se as massas são puxadas uma para cada lado e, então, soltas, prove que elas vibrarão uma em relação à outra com um período $2\pi\sqrt{m/2\kappa}$.

8.37. Faça o probl. 8.36, considerando que as massas são diferentes e iguais a M_1 e M_2, respectivamente.

Resp.: $2\pi\sqrt{\mu/\kappa}$, onde $\mu = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$.

8.38. Na fig. 8-27, duas massas iguais m, que estão sobre uma mesa horizontal sem atrito, são conectadas uma à outra e aos pontos fixos A e B por meio de fios elásticos de tensão constante T e comprimento l. Se os deslocamentos da posição de equilíbrio AB das massas são Y_1 e Y_2, respectivamente, mostre que as equações do movimento são dadas por

$$\ddot{Y}_1 = \kappa(Y_2 - 2Y_1), \quad \ddot{Y}_2 = \kappa(Y_1 - 2Y_2)$$

onde $\kappa = 3T/ml$.

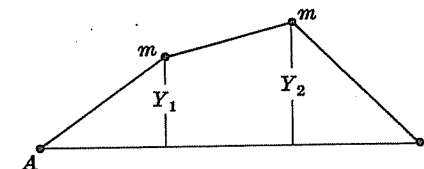



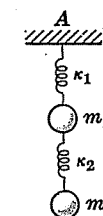
Fig. 8-27

8.39. Prove que as frequências naturais de vibração no probl. 8.38 são dadas, respectivamente, por

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3T}{ml}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9T}{ml}}$$

e descreva os modos de vibração

Fig. 8-28

8.40. Ache as frequências normais e os modos normais de vibração para o sistema de partículas de massas m_1 e m_2, conectadas pelas molas como estão indicadas na fig. 8-28.

MASSAS VARIÁVEIS. FOGUETES

8.41. (*a*) Prove que a distância total percorrida pelo foguete do probl. 8.5 no tempo t é dada por

$$s = v_0\left\{t + \left(\frac{m_0 - \alpha t}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right\} - \frac{1}{2}gt^2$$

(*b*) Qual a máxima altura que o foguete pode alcançar e quanto tempo ele levará para alcançar esta altura máxima?

8.42. Considere que um foguete parte do repouso e cai em um campo gravitacional constante. No instante em que inicia a queda, expele gases a uma razão constante α na direção do campo gravitacional e a uma velocidade em módulo v_0 com relação ao foguete. Ache sua velocidade em módulo, após um tempo t qualquer.

Resp.: $gt - v_0 \ln\left(\dfrac{m_0}{m_0 - \alpha t}\right)$

8.43. Qual a distância percorrida pelo foguete do probl. 8.42, no tempo t?

Resp.: $\dfrac{1}{2}gt^2 - v_0\left\{t + \left(\dfrac{m_0 - \alpha t}{\alpha}\right)\ln\left(\dfrac{m_0 - \alpha t}{m_0}\right)\right\}$

8.44. Descreva como o probl. 8.42 pode ser útil ao se fazer uma aterragem suave em um planêta ou um satélite?

8.45. Discuta o movimento de um foguete de dois estágios, i.e., uma parte cai e a outra parte do foguete é ligada, em seguida.

COLISÕES DE PARTÍCULAS

8.46. Um rifle dispara uma bala de massa m com uma velocidade horizontal $\mathbf{v}$ em um bloco de madeira de massa M, o qual está sobre um plano horizontal sem atrito. Se a bala fica presa à madeira, (*a*) determine a velocidade subsequente do sistema e (*b*) ache a perda de energia cinética.

Resp.: (*a*) $m\mathbf{v}/(M + m)$ (*b*) $mMv^2/2(M + m)$

8.47. Faça o probl. 8.46, considerando que o bloco está se movendo para longe do rifle a uma velocidade $\mathbf{V}$.

8.48. Uma bola que é solta de uma altura H bate no piso, voltando a uma altura $h < H$. Determine o coeficiente de restituição.

Resp.: $\sqrt{h/H}$.

8.49. Uma massa m_1, com uma velocidade em módulo v_1 sobre um plano horizontal, bate em uma outra de massa m_2, que está em repouso. Se o coeficiente de restituição é ε, prove que há uma perda de energia cinética igual a

$$m_1 m_2 (1 - \varepsilon^2) v^2 / 2(m_1 + m_2).$$

8.50. Uma bola de bilhar choca-se com uma outra obliquamente, de um ângulo de 45° com sua linha de centro, no instante de impacto. Se o coeficiente de restituição é 1/2, ache o ângulo em que a primeira bola sairá após o choque.
Resp.: $\text{tg}^{-1}(3/5)$.

8.51. Sejam as massas m_1 e m_2 de duas partículas que se colidem e suas respectivas velocidades $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, antes do impacto. Se o coeficiente de restituição fôr ε, prove que a perda em energia cinética como resultado da colisão é de

$$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2(1 - \varepsilon^2).$$

8.52. Prove que o momentum que é transferido da primeira partícula para a segunda partícula do probl. 8.51 é de

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \varepsilon)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

8.53. Uma bola é solta de uma altura h acima de um plano horizontal, sobre o qual há uma cunha de um ângulo α. Prove que, se o coeficiente de restituição é ε, então a bola baterá de nôvo na cunha, em um ponto distante do ponto do primeiro impacto de $4\varepsilon(1 + \varepsilon)h \operatorname{sen} \alpha$ para baixo.

SÉRIE DE FOURIER, FUNÇÕES ÍMPARES E PARES, SÉRIES DE FOURIER EM SENO E CO-SENO

8.54. Faça um gráfico de cada uma das seguintes funções e ache suas séries de Fourier correspondentes, usando as propriedades das funções pares e ímpares onde aplicáveis.

(*a*) $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Período 4

(*b*) $f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$ Período 8

(*c*) $f(x) = 4x$, $0 < x < 10$, Período 10

(*d*) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Período 6

(*a*) $\dfrac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1 - \cos n\pi)}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{2}$

(*b*) $2 - \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1 - \cos n\pi)}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{4}$

(*c*) $20 - \dfrac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$

(*d*) $\dfrac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{3} - \dfrac{6\cos n\pi}{n\pi}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{3}\right\}$

8.55. Em cada item do probl. 8.54, ache onde estão localizadas as descontinuidades $f(x)$ e qual o valor para o qual a série converge nestas descontinuidades.

Resp.: (*a*) $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots; 0$ (*c*) $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots; 20$
(*b*) não há descontinuidade (*d*) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots; 3$

8.56. Expanda $f(x) = \begin{cases} 2-x & 0 < x < 4 \\ x-6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ em uma série de Fourier de período 8.

Resp.: $\frac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4} + \ldots\right\}$

8.57. (*a*) Expanda $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, em série de Fourier de senos.

(*b*) Quais os valores que devem ser definidos para $f(x)$ em $x \neq 0$ e $x = \pi$ tal que a série seja convergente para $f(x)$ com $0 < x < \pi$?

Resp.: (*a*) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n \operatorname{sen} 2nx}{4n^2-1}$ (*b*) $f(0) = f(\pi) = 0$

8.58. (*a*) Expanda em série de Fourier $f(x) = \cos x$, $0 < x < \pi$, considerando o período de π; e (*b*) compare com o resultado do probl. 8.57, explicando, se houver, as semelhanças e diferenças.
Resp.: A resposta é a mesma que a do probl. 8.57.

8.59. Expanda $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8-x & 4 < x < 8 \end{cases}$ em uma série de (*a*) senos, (*b*) co-senos.

Resp.: (*a*) $\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{8}$ (*b*) $\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\pi/2-\cos n\pi-1}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{8}$.

O FIO VIBRANTE

8.60. (*a*) Resolva o problema de valor de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$Y_x(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = h, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0$$

(*b*) Dê uma interpretação física do problema em (*a*).

Resp.: $Y(x,t) = \frac{8h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})x \operatorname{sen}(2n-1)t$

8.61. Resolva o problema de valor de contorno

$$Y_{tt} = Y_{xx} - g \qquad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 0, \quad Y(x,0) = \mu x(\pi - x), \quad Y_t(x,0) = 0$$

e interprete fisicamente.

Resp.: $Y(x,t) = \frac{4(2\mu x + g)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}(2n-1)x\cos(2n-1)t - \frac{1}{2}gx(\pi - x)$

8.62. (*a*) Ache a solução da equação $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ que satisfaça as condições $Y(0,t)=0$, $Y(\pi,t)=0$, $Y(x,0)=0{,}1 \operatorname{sen} x + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x$, $Y_t(x,0)=0$ para $0<x<\pi, t>0$. (*b*) Interprete fisicamente.

Resp.: (*a*) $Y(x,t) = 0{,}1 \operatorname{sen} x \cos 2t + 0{,}01 \operatorname{sen} 4x \cos 8t$

8.63. (*a*) Resolva o problema de valores de contorno $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, sob as condições $Y(0,t)=0$, $Y(2,t)=0$, $Y(x,0)=0{,}05x(2-x)$, $Y_t(x,0)=0$, onde $0<x<2, t>0$.
(*b*) Interprete fisicamente.

Resp.: (*a*) $Y(x,t) = \frac{1{,}6}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

8.64. Resolva o probl. 8.63 com as condições limites para $Y(x,0)$ e $Y_t(x,0)$, trocadas entre si, i.e., $Y(x,0) = 0$, $Y_t(x,0) = 0{,}05x(2-x)$, e dê uma interpretação física.

Resp.: $Y(x,t) = \frac{3{,}2}{3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2}\operatorname{sen}\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$.

PROBLEMAS DIVERSOS

8.65. Uma gota de chuva caindo sob um campo gravitacional constante cresce, por absorção da umidade do meio circundante, com uma razão proporcional à sua área superficial instantânea. Admita que ela parta com raio nulo e determine sua aceleração.

Resp.: $\frac{1}{8}g$

8.66. Um canhão de massa M está sobre um plano horizontal de coeficiente de fricção μ. O canhão dispara um projétil de massa m, com uma velocidade inicial em módulo na boca do canhão de v_0, fazendo um ângulo α com a horizontal. Determine qual será o recuo do canhão devido ao disparo.

8.67. Uma bola é jogada com uma velocidade em módulo v_0 sobre um plano horizontal liso, em uma direção que faz um ângulo α com o plano. Se ε é o coeficiente de restituição, prove que a velocidade da bola, após o impacto, é dada por $v_0\sqrt{1-(1-\varepsilon^2)\operatorname{sen}^2\alpha}$ em uma direção dada pelo ângulo $\operatorname{tg}^{-1}(\varepsilon \operatorname{tg}\alpha)$, com relação à horizontal.

8.68. Prove que o tempo total teórico gasto pela partícula do probl. 8.67 para alcançar o repouso é $\sqrt{2H/g}\,(1+\varepsilon)/(1-\varepsilon)$.

8.69. Prove que, enquanto a partícula do probl. 8.27 se move do topo à parte inferior da cunha, esta se move de uma distância de $(mL\cos\alpha)/(M+m)$.

8.70. Prove que a perda de energia cinética das esferas do probl. 8.9 é

$$\tfrac{1}{2}\mu(v_1 \cos\theta_1 - v_2 \cos\theta_2)^2 (1-\varepsilon^2),$$

onde μ é a massa reduzida $m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

8.71. Prove que a aceleração de uma cunha dupla de massa M (fig. 8-29), que está sobre uma mesa lisa, é dada por $\dfrac{(m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha_2 \cos\alpha_2)g}{M + m_1 \operatorname{sen}^2\alpha_1 + m_2 \operatorname{sen}^2\alpha_2}$.

8.72. Se A é a aceleração da cunha no probl. 8.71, prove que as acelerações das massas relativamente à cunha são dadas numericamente por

$$\frac{m_1(A\cos\alpha_1 + g \operatorname{sen}\alpha_1) + m_2(A\cos\alpha_2 - g\operatorname{sen}\alpha_2)}{m_1 + m_2}.$$

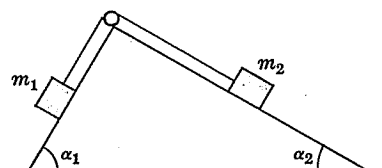



Fig. 8-29

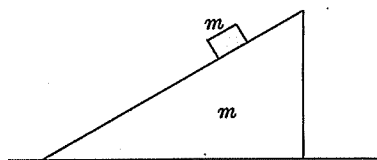



Fig. 8-30

8.73. Uma massa m escorrega por um plano inclinado da mesma massa que está sôbre um plano horizontal com coeficiente de fricção μ. Prove que o plano inclinado se move para a direita, com uma aceleração igual a $(1-3\mu)/(3-\mu)$. Veja a fig. 8-30.

8.74. Um rifle de massa M está prêso a uma cunha de ângulo α, a qual está sôbre um plano horizontal liso. O rifle dispara horizontalmente uma bala de massa m, com velocidade v_0. Ache a velocidade em módulo do recuo do rifle subindo a cunha.

Resp.: $(mv\cos\alpha)/M$ subindo a cunha.

8.75. De quanto subirá o rifle, na cunha do probl. 8.74, até alcançar o repouso, considerando que a cunha (*a*) não tem atrito, (*b*) tem um coeficiente de atrito μ?

8.76. Um peso W é solto de uma altura H acima da placa AB da fig. 8-31, a qual é suportada por uma mola de constante κ. Ache a velocidade em módulo, com a qual o peso sai da placa após a batida.

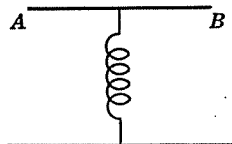



Fig. 8-31

8.77. Uma bola é atirada com o módulo da velocidade de v_0 fazendo um ângulo α com plano horizontal. Se este bate sucessivamente no plano horizontal, determine sua localização, após n batidas. Suponha que o coeficiente de restituição é ε e que a resistência do ar é negligenciável.

8.78. Faça o probl. 8.77, considerando que o plano horizontal é substituído por um plano inclinado de um ângulo β e que a bola é (*a*) atirada subindo o plano. (*b*) atirada descendo o plano.

8.79. Obtenha a equação (1) da introdução deste capítulo para o fio vibrante, pela consideração das equações do movimento das μ partículas do probl. 8.29 e fazendo $N \to \infty$.

8.80. Prove que, com $N \to \infty$, as frequências normais, como são dadas no probl. 8.31, se aproximam daquelas de um fio vibrante contínuo.

8.81. Prove que, para $0 < x < \pi$,

$$(a)\ x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$

$$(b)\ x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^3} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \ldots\right)$$

8.82. Use o probl. 8.81 para mostrar que

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

8.83. Prove que $Y = f(x + ct) + g(x - ct)$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

e discuta a conexão desta solução com a do fio vibrante.

8.84. (*a*) Prove que a energia potencial total de um fio vibrante é $V = \dfrac{T}{2}\displaystyle\int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 dx$.

(*b*) Assim, mostre que $V = \dfrac{\pi^2 T}{4l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)^2$

8.85. (*a*) Prove que a energia cinética total de um fio vibrante é E.C. $= \tfrac{1}{2}\sigma \displaystyle\int_0^l \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 dt$.

(*b*) Assim, mostre que E.C. $= \dfrac{\sigma\pi^2 c^2}{4l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} - b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi ct}{l}\right)^2$.

(*c*) A energia cinética pode ser infinita? Explique.

8.86. Prove que a energia total de um fio vibrante é $E = \dfrac{\pi^2 T}{4l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$.

8.87. Ache a energia potencial, a energia cinética e a energia total para o fio (*a*) do probl. 8.20, (*b*) do probl. 8.28.

8.88. Se um amortecimento proporcional à velocidade transversal instantânea é levado em conta no problema do fio vibrante, prove que sua equação de movimento é $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta \dfrac{\partial Y}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$.

8.89. Prove que as frequências de vibração para o fio amortecido do probl. 8.88 são dadas por $\sqrt{n^2\pi^2 c^2/l^2 - \beta^2/4}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

8.90. Resolva o problema do fio vibrante amortecido, se o fio for fixo em suas extremidades $x = 0$ e $x = l$ e ao fio é (*a*) dada uma forma inicial $f(x)$ e, então, solto, (*b*) dada uma distribuição de velocidades inicial $g(x)$ na posição de equilíbrio, (*c*) dada uma forma inicial $f(x)$ e uma distribuição de velocidades $g(x)$.

8.91. Faça o problema do fio vibrante amortecido, considerando o efeito da gravidade.

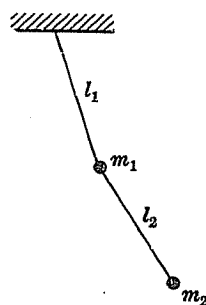
8.92. Faça (*a*) o probl. 8.84(*a*), (*b*) o probl. 8.85(*a*), (*c*) o probl. 8.86 e (*d*) o probl. 8.88, para o caso em que o fio é substituído por N partículas, como no probl. 8.29.

8.93. Na fig. 8.32, o sistema de pêndulo duplo é livre de vibrar em um plano vertical. Ache as frequências normais e os modos normais admitindo pequenos deslocamentos.

Fig. 8-32

8.94. Faça o probl. 8.93, considerando que exista uma massa adicional m_3 suspensa de m_2 por um fio de comprimento l_3.

8.95. Generalize o movimento (*a*) do probl. 8.1 e (*b*) do probl. 8.34, para N partículas e molas iguais.

8.96. No probl. 8.95, investigue o caso limite de $N \to \infty$. Discuta o significado físico dos resultados.

8.97. Resolva o problema de valores de contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \alpha \operatorname{sen} \omega t$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = f(x), \quad Y_t(x, 0) = 0$$

e dê uma interpretação física.

8.98. Faça o probl. 8.97, se a condição $Y_t(x, 0) = 0$ for substituída por $Y_t(x, 0) = g(x)$.

8.99. Faça o probl. 8.97, se a equação diferencial for substituída por

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial Y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \alpha \operatorname{sen} \omega t$$

e interprete fisicamente.

8.100. Ache as equações diferenciais e as condições iniciais para o movimento de um foguete em um campo gravitacional inverso do quadrado. Você acredita que estas equações possam ser resolvidas? Explique.

8.101. Dois corpos [tais como o Sol e a Terra ou a Terra e a Lua] de massas m_1 e m_2 movem-se relativamente entre si, sob suas atrações mútuas do inverso do quadrado, de acordo com a lei universal de gravitação. Se $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são seus vetores-posição relativamente a um sistema de coordenadas e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, prove que suas equações do movimento são dadas por

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{r^3}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{r^3}.$$

Este é o chamado *problema dos dois corpos.*

8.102. No probl. 8.101, escolha uma origem nova no centro de massa dos dois corpos, i.e., tal que $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$. Assim, mostre que, se $\mathbf{r}$ for o vetor-posição de m_1 relativamente a m_2, então

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_1}{r^3}, \qquad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}_2}{r^3}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}}{r^3}$$

ou, subtraindo-se, $\ddot{\mathbf{r}} = -\dfrac{G(m_1 + m_2)\mathbf{r}}{r^3}$.

Assim, mostre que o movimento de m_1 relativamente a m_2 é exatamente o mesmo que se o corpo de massa m_2 fosse fixado e sua massa aumentada para $m_1 + m_2$.

8.103. Usando o probl. 8.102, obtenha a órbita da massa m_1 relativamente a m_2 e compare com os resultados do Cap. 5. A primeira e a segunda lei de Kepler são modificadas de alguma maneira? Explique.

8.104. Se P é o período de revolução de m_1 em torno de m_2 e a é o semi-eixo maior da trajetória elíptica de m_1 em torno de m_2, prove que

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Compare este resultado com a terceira lei de Kepler: No caso da Terra [ou outro planeta] e o Sol, esta lei de Kepler modificada tem muito efeito? Explique.

8.105. Ache as equações que descrevem o movimento de 3 corpos sob as leis de atração mútua do inverso do quadrado.

8.106. Transforme as equações obtidas no probl. 8.105 de modo que as posições dos corpos são descritas relativamente ao seu centro de massa. Você acredita que estas equações podem ser resolvidas exatamente?

8.107. Faça o probl. 8.105 e o probl. 8.106 para N corpos.

Capítulo 9

Movimento em um Plano de Corpos Rígidos

CORPOS RÍGIDOS

Um sistema de partículas, no qual a distância entre duas partículas quaisquer não muda, não obstante as forças atuantes, é chamado de *corpo rígido.* Como um corpo rígido é um caso especial de um sistema de partículas, todos os teoremas desenvolvidos no Cap. 7 são também válidos para corpos rígidos.

TRANSLAÇÕES E ROTAÇÕES

Um *deslocamento* de um corpo rígido é uma mudança de uma posição para outra. Se, durante um deslocamento, todos os pontos do corpo rígido sobre alguma linha permanecerem fixos, o deslocamento é chamado de *rotação* em torno da linha. Se, durante um deslocamento, todos os pontos do corpo rígido se moverem em linhas paralelas umas às outras, o deslocamento é chamado de *translação.*

TEOREMA DE EULER. EIXO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

O seguinte teorema, chamado *teorema de Euler,* é fundamental no movimento de corpos rígidos.

Teorema 9.1. Uma rotação de um corpo rígido em torno de um ponto fixo do corpo equivale a uma rotação em tôrno de uma linha que passa através do ponto. A linha em referência é chamada de *eixo instantâneo de rotação.*

Rotações podem ser consideradas como finitas ou infinitesimais. Rotações finitas não podem ser representadas por vetores, pois as leis de comutação falham. Entretanto, rotações infinitesimais podem ser representadas por vetores.

MOVIMENTO GERAL DE UM CORPO RÍGIDO. TEOREMA DE CHASLE

No movimento generalizado de um corpo rígido, nenhum ponto do corpo pode estar fixo. Nesse caso, o seguinte teorema, chamado *teorema de Chasle,* é fundamental.

Teorema 9.2. O movimento generalizado de um corpo rígido pode ser considerado como uma translação mais uma rotação em tôrno de um ponto adequado, que é, geralmente, tomado como sendo o centro de massa.

MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO EM UM PLANO

O movimento de um corpo rígido é simplificado consideravelmente quando todos os pontos se movem paralelamente a um dado plano fixo. Nesse caso, dois tipos de movimento, chamados de *movimentos planos*, são possíveis.

1. *Rotação em torno de um eixo fixo.* Neste caso, o corpo rígido gira em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano fixo. O sistema tem somente um grau de liberdade (ver, no Cap. 7, sua definição) e, assim, somente uma coordenada é necessária para descrever o movimento.

2. *Movimento generalizado em um plano.* Neste caso, o movimento pode ser considerado como uma translação paralela ao plano fixo dado, mais a rotação ao redor de um eixo adequado, perpendicular ao plano. Esse eixo é sempre escolhido de maneira a passar através do centro de massa. O número de graus de liberdade para tal movimento é 3: duas coordenadas sendo usadas para descrever a translação e um para descrever a rotação.

O referido eixo é o *eixo instantâneo* de rotação e o ponto onde o eixo instantâneo corta o plano fixo é chamado de *centro instantâneo de rotação* (ver sua definição neste mesmo capítulo).

Considerar-se-ão êsses dois tipos de movimento plano neste capítulo. O movimento de um corpo rígido em espaço tridimensional é mais complicado e será considerado no Cap. 10.

MOMENTO DE INÉRCIA

Um valor geométrico que é de grande importância na discussão do movimento de corpos rígidos é chamado de *momento de inércia.*

O *momento de inércia de uma partícula* de massa m em redor de uma linha ou eixo AB é definido como

$$I = mr^2 \qquad (1)$$

onde r é a distância da massa à linha.

O *momento de inércia de um sistema de partículas,* com massas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, em redor da linha ou eixo AB, define-se como

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2 \qquad (2)$$

onde $r_1, r_2, \ldots r_N$ são suas respectivas distâncias de AB.

O *momento de inércia de uma distribuição contínua de massa,* tal como o corpo rígido e sólido $\mathscr{R}$ da fig. 9-1, é dado por

$$I = \int_{\mathscr{R}} r^2\, dm \qquad (3)$$

onde r é a distância entre o elemento de massa dm e AB.

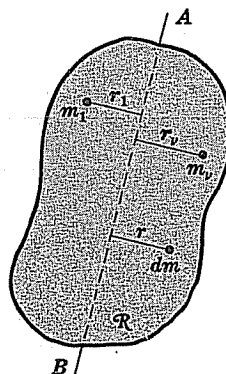



Fig. 9-1

RAIO DE GIRAÇÃO

Seja $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ o momento de inércia de um sistema de partículas em torno de AB, e $M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu$ a massa total do sistema. Então, o valor K tal que

$$K^2 = \frac{I}{M} = \frac{\sum_\nu m_\nu r_\nu^2}{\sum_\nu m_\nu} \qquad (4)$$

é chamado de *raio de giração* do sistema em torno de AB.

Para distribuições contínuas de massa, êle é calculado por

$$K^2 = \frac{I}{M} = \frac{\int_{\mathscr{R}} r^2\, dm}{\int_{\mathscr{R}} dm} \qquad (5)$$

TEOREMAS SOBRE MOMENTOS DE INÉRCIA

1. *Teorema* 9.3: *Teorema do Eixo Paralelo.* Seja I o momento de inércia de um sistema em torno do eixo AB e seja I_c o momento de inércia do sistema em torno de um eixo paralelo a AB, passando através do centro de massa do sistema. Então, se b é a distancia entre os eixos e M é a massa total do sistema, tem-se

$$I = I_C + Mb^2 \qquad (6)$$

2. *Teorema* 9.4: *Teorema dos Eixos Perpendiculares.* Considere uma distribuição de massa no plano xy de um sistema de coordenadas xyz. Sejam I_x, I_y e I_z a designação dos momentos de inércia em torno dos eixos x, y e z, respectivamente. Então,

$$I_z = I_x + I_y \qquad (7)$$

MOMENTOS DE INÉRCIA ESPECIAIS

A seguinte tabela mostra os momentos de inércia de vários corpos rígidos que aparecem na prática. Em todos os casos, é admitido que o corpo tenha densidade uniforme (isto é, constante).

Corpo Rígido	*Momento de Inércia*
1. *Cilindro Circular Sólido* de raio a e massa M, em tôrno do eixo do cilindro.	$\frac{1}{2}Ma^2$
2. *Cilindro Circular Oco* de raio a e massa M, em torno do eixo do cilindro. A espessura da parede é desprezível.	Ma^2
3. *Esfera Sólida* de raio a e massa M, em torno de um diâmetro.	$\frac{2}{5}Ma^2$
4. *Esfera Oca* de raio a e massa M, em torno de um diâmetro. A espessura da esfera é desprezível.	Ma^2
5. *Placa Retangular* de lados a e b e massa M, em torno de um eixo perpendicular à placa e através do centro de massa.	$\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$
6. *Haste fina* de comprimento a e massa M, em torno de um eixo perpendicular à haste e através do centro da massa	$\frac{1}{12}Ma^2$

BINÁRIOS

Um conjunto de duas forças iguais e paralelas que agem em direções opostas, mas não têm a mesma linha de ação (ver fig. 9-2), é chamado *binário.* Tal binário tem um efeito de rotação e o *momento* ou *torque do binário* é dado por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

O teorema seguinte é importante.

Fig. 9-2

Teorema 9.5. Qualquer sistema de forças que age sobre um corpo rígido pode ser equivalentemente substituído por uma força única, que age em um ponto específico, junto com um binário adequado.

ENERGIA CINÉTICA E MOMENTO ANGULAR EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Considere que um corpo rígido esteja girando em torno de um eixo fixo, com velocidade angular ω que tem a direção

do eixo AB (ver fig. 9-3). Então, a *energia cinética de rotação* é dada por

$$T = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad (8)$$

onde I é o momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo.

Igualmente, o momento angular é dado por

$$\Omega = I\omega \qquad (9)$$

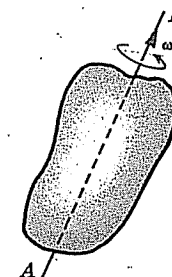



Fig. 9-3

MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

Dois métodos importantes para tratar do movimento de um corpo rígido em torno de um eixo fixo são dados pelos seguintes teoremas.

Teorema 9.6: *Princípio do Momento Angular.* Se Λ é o *torque* ou o momento de todas as forças externas em torno do eixo e $\Omega = I\omega$ é o momento angular, então

$$\Lambda = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\dot{\omega} = I\alpha \qquad (10)$$

onde α é a aceleração angular.

Teorema 9.7: *Princípio de Conservação de Energia.* Se as forças atuantes sobre o corpo rígido são conservativas tais que o corpo rígido tenha uma energia potencial V, tem-se

$$T + V = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + V = E = \text{constante} \qquad (11)$$

TRABALHO E POTÊNCIA

Considere-se um corpo rígido $\mathscr{R}$ capaz de girar em um plano, em torno de um eixo O perpendicular ao plano, como indicado na fig. 9-4. Se Λ é a magnitude do torque aplicado ao corpo sob a influência da força $\mathbf{F}$ no ponto $\mathbf{A}$, o *trabalho executado na rotação do corpo* de um ângulo $d\theta$ é

$$dW = \Lambda\, d\theta \qquad (12)$$

e a potência instantânea desenvolvida é

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \Lambda\omega$$

onde ω é a velocidade angular.

Temos o seguinte

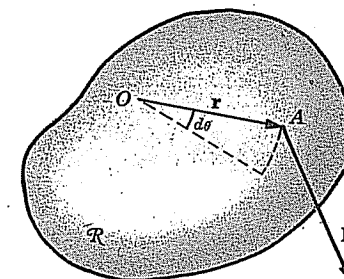



Fig. 9-4

Teorema 9.8. O trabalho totál executado na rotação de um corpo rígido de um ângulo θ_1, onde a velocidade angular é ω_1, para o ângulo θ_2 onde a velocidade angular é ω_2, é a diferença de energia cinética de rotação em ω_1 e ω_2. Em símbolos,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Lambda\, d\theta = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2 \tag{14}$$

IMPULSO. CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

A integra temporal do torque

$$\mathscr{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Lambda\, dt \tag{15}$$

é chamada de *impulso angular* do instánte t_1 ao t_2.

Temos os seguintes teoremas:

Teorema 9.9. O impulso angular é igual à mudança do momento angular. Simbolizando,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Lambda\, dt = \Omega_2 - \Omega_1 \tag{16}$$

Teorema 9.10. *Conservação do Momento Angular.* Se o torque resultánte aplicado a um corpo rígido for nulo, então o momento angular é constánte, isto é, ele é mantido.

O PÊNDULO COMPOSTO

Seja $\mathscr{R}$ (fig. 9-5) um corpo rígido, o qual é livre de oscilar em um plano vertical, em torno de um eixo fixo horizontál por O e sob a influência da gravidade. Chama-se a esse corpo rígido de *pêndulo composto.*

Seja C o centro de massa e considere que o ângulo entre OC e a vertical OA seja θ. Então, se I_0 é o momento de inércia de $\mathscr{R}$ em torno do eixo horizontál, através de O, M é a massa do corpo rígido e a é a distância OC, têm-se, para a equação de movimento,

Fig. 9-5

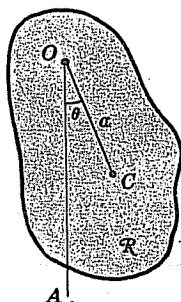
$$\ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{17}$$

Para pequenas oscilações, o período de oscilação é

$$P = 2\pi\sqrt{I_0/Mga} \tag{18}$$

O comprimento do pêndulo simples equivalente é

$$l = I_0/Ma \tag{19}$$

O teorema seguinte é importánte.

Teorema 9.11. O período de oscilação de um pêndulo composto é mínimo, quando a distância $OC = a$ é igual ao raio de giração do corpo em torno do eixo horizontal, através do centro da massa.

MOVIMENTO GENERALIZADO DE UM CORPO RÍGIDO EM UM PLANO

O movimento generalizado de um corpo rígido em um plano pode ser considerado como uma translação paralela ao plano, mais a rotação em tôrno de um eixo adequado perpendicular ao plano. Dois métodos importántes para tratar do movimento generalizado de um corpo rígido em um plano são dados pelos teoremas que seguem.

Teorema 9.12. *Princípio do Momento Linear.* Se $\mathbf{r}$ é o vetor-posição do centro de massa de um corpo rígido em relação a uma origem O, têm-se

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{r}}) = M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{20}$$

onde M é a massa totál, assumida constánte e $\mathbf{F}$ é a força externa resultánte sobre o corpo.

Teorema 9.13. *Princípio do Momento Angular.* Se I_C é o momento de inércia do corpo rígido em torno do centro de massa, ω a velocidade angular e Λ_C o torque ou momento totál das forças externas em torno do centro de massa, têm-se

$$\Lambda_C = \frac{d}{dt}(I_C\omega) = I_C\dot{\omega} \tag{21}$$

Teorema 9.14. *Princípio da Conservação de Energia.* Se as forças externas são conservativas, de modo que a energia potencial do corpo rígido seja V, então

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + V = E = \text{constánte} \tag{22}$$

Note-se que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}mv^2$ é a *energia cinética de translação* e $\frac{1}{2}I_C\omega^2$ é a *energia cinética de rotação* do corpo rígido em torno do centro de massa.

CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO. CENTRÓIDES DO ESPAÇO E DO CORPO

Considere que um corpo rígido $\mathscr{R}$ se mova paralelamente a um plano fixo dado, por exemplo, o plano xy da fig. 9-6. Considere um plano $x'y'$ paralelo ao plano xy e rigidamente ligado ao corpo. À medida que o corpo se move, em um instánte qualquer t, há um ponto do plano $x'y'$ em movimento que está instántaneamente em repouso em relação ao plano fixo xy. Este ponto, que pode ou não pertencer ao corpo, é chamado de *centro instántâneo de rotação.* A linha perpendicular ao plano e que passa através do centro instántâneo de rotação é chamada *eixo instántâneo* de rotação.

À medida que o corpo se move, o centro instántâneo de rotação também se move. A trajetória do centro instántâneo de rotação em relação ao plano fixo é chamada *centróide do espaço.* A trajetória em relação ao plano móvel é chamada de *centróide*

do corpo. O movimento do corpo rígido pode ser descrito como um rolamento do centróide do corpo sobre o centróide do espaço.

O centro instântâneo de rotação pode ser considerado como o ponto em torno do qual há rotação sem translação. Em uma translação pura de um corpo rígido, o centro instântâneo está no infinitivo.

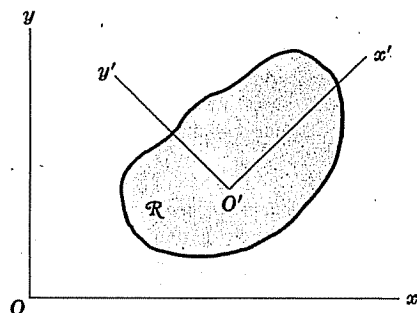



Fig. 9-6

ESTÁTICA DE UM CORPO RÍGIDO

A estática ou equilíbrio de um corpo rígido é o caso especial em que não há movimento. O teorema que segue é fundamental.

Teorema 9.15. Uma condição necessária e suficiente para que um corpo rígido esteja em equilíbrio é que

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{0} \tag{23}$$

onde $\mathbf{F}$ é a força extêrna resultante atuante sobre o corpo e $\mathbf{\Lambda}$ é o torque extêrno resultante.

PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL E PRINCÍPIO DE D'ALEMBERT

Como um corpo rígido é apenas um caso especial de um sistema de partículas, o princípio de trabalho virtual e o princípio de D'Alembert aplicam-se também aos corpos rígidos.

PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL. ESTABILIDADE

Em uma posição de equilíbrio, a força extêrna resultante é nula, tal que, se as forças são conservativas e V é a energia potencial,

$$\mathbf{F} = -\nabla V = \mathbf{0} \tag{24}$$

ou, em componentes,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{25}$$

Neste caso, V pode ser ou não um mínimo. Se for um mínimo, o equilíbrio é chamado *estável* e uma mudança desprezível da configuração devolverá o corpo à sua posição original. Se não for um mínimo, o corpo está em *equilíbrio instável* e uma mudança desprezível da configuração fará com que o corpo não retôrne à sua posição original. Tem-se o teorema a seguir.

Teorema 9.16. Uma condição necessária e suficiente para que um corpo rígido esteja em equilíbrio estável é que sua energia potencial seja mínima.

Problemas Resolvidos

CORPOS RÍGIDOS

9.1. Um corpo rígido em forma de um triângulo ABC (fig. 9-7) é movido em um plano para a posição DEF, isto é, os vértices A, B e C são levados para D, E e F respectivamente. Mostrar que o movimento pode ser considerado como uma translação mais uma rotação em torno de um ponto apropriado.

Escolha no triângulo ABC um ponto G que corresponda ao ponto H no triângulo DEF. Efetue a translação na direção GH, de maneira que o triângulo ABC seja transportado para $A'B'C'$. Usando H como centro de rotação, efetue a rotação do triângulo $A'B'C'$ de um ângulo θ como indicado, de maneira que $A'B'C'$ seja transferido para DEF. Então, o movimento foi consumado por uma translação mais uma rotação.

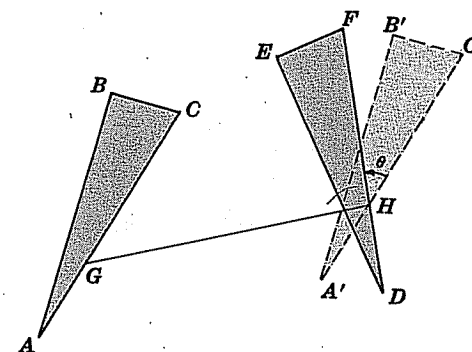



Fig. 9-7

9.2. Dê um exemplo para mostrar que rotações finitas não podem ser representadas por vetôres.

Seja a rotação de um corpo em torno do eixo x representada por $\mathcal{A}_x$ (como o paralelepípedo retangular da fig. 9-8(a)) enquanto que $\mathcal{A}_y$ representa uma

rotação em torno do eixo y. Considera-se que tais rotações ocorram em um sentido positivo ou em sentido anti-horário, de acordo com a regra da mão direita.

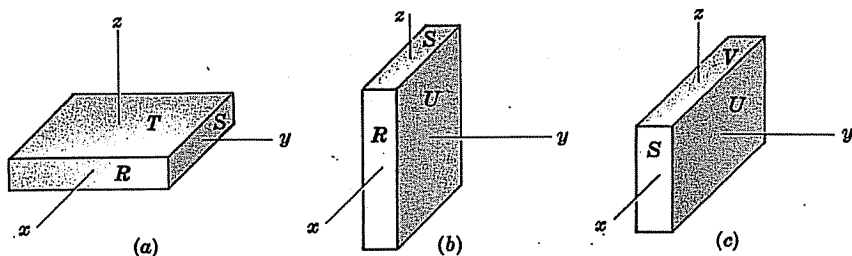



Fig. 9-8

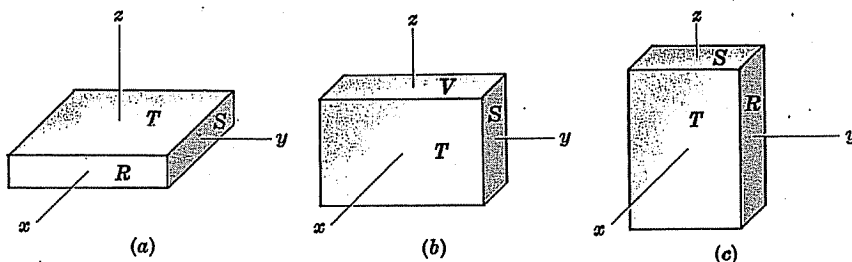



Fig. 9-9

Na fig. 9-8(a), inicia-se com o paralelepípedo na posição indicada e efetua-se a rotação A_x em torno do eixo x, como indicado na fig. 9-8(b) e, então, a rotação em torno do eixo y, como indicado na fig. 9-8(c). Então, a fig. 9-8(c) é o resultado da rotação $A_x + A_y$ da fig. 9-8(a).

Na fig. 9-9(a), inicia-se com o paralelepípedo na mesma posição que na fig. 9-8(a), mas, agora, efetua-se primeiro a rotação A_y em torno do eixo y como indicado na fig. 9-9(b) e, então, a rotação A_x em torno do eixo x como indicado na fig. 9-9(c). Então, a fig. 9-9(c) é o resultado da rotação $A_y + A_x$ na fig. 9-9(a).

Como a posição do paralelepípedo da fig. 9-8(c) não é a mesma que a da fig. 9-9(c), concluímos que a operação $A_x + A_y$ não é a mesma que $A_y + A_x$. Então, a lei da comutação não é satisfeita e, assim, A_x e A_y não podem ser representados por vetores.

MOMENTOS DE INÉRCIA

9.3. Duas partículas de massa m_1 e m_2, respectivamente, são conectadas por um plano. Mostrar que o momento de inércia do sistema em torno de um eixo

perpendicular ao plano e que passa através do centro de massa é μa^2, onde a *massa reduzida* $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$.

Seja r_1 a distância da massa m_1 ao centro da massa C. Então, $a - r_1$ é a distância da massa m_2 a C. Como o C é o centro da massa,

$$m_1 r_1 = m_2(a - r_1) \quad \text{de onde se tira} \quad r_1 = \frac{m_2 a}{m_1 - m_2} \quad \text{e} \quad a - r_1 = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2}$$

Assim, o momento de inércia em torno de um eixo por C é

$$m_1 r_1^2 + m_2(a - r_1)^2 = m_1 \left(\frac{m_2 a}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 a}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a^2 = \mu a^2$$

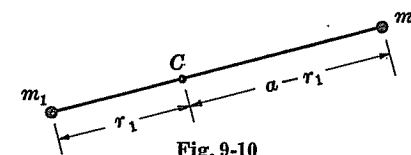



Fig. 9-10

9.4. Achar o momento de inércia de um cilindro circular sólido de raio a, altura h e massa M em torno do eixo do cilindro.

Método 1, usando integração simples.

Subdivida o cilindro, uma secção transversal do qual aparece na fig. 9-11, em anéis concêntricos, um dos quais é o elemento sombreado mostrado. O volume desse elemento é

$$(\text{Área})(\text{espessura}) = (2\pi r\, dr)(h) = 2\pi r h\, dr$$

e o elemento de massa é $dm = 2\pi\sigma r h\, dr$.

O momento de inércia de dm é

$$r^2\, dm = 2\pi\sigma r^3 h\, dr$$

onde σ é a densidade e, assim, o momento de inércia total é

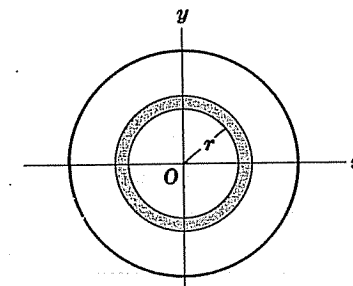
Fig. 9-11

$$I = \int_{r=0}^{a} 2\pi\sigma r^3 h\, dr = \tfrac{1}{2}\pi\sigma h a^4 \qquad (1)$$

Então, desde que a massa seja

$$M = \int_{r=0}^{a} 2\pi\sigma r h\, dr = \sigma\pi a^2 h \qquad (2)$$

acha-se $I = \frac{1}{2}Ma^2$.

Método 2, usando integração dupla.

Usando coordenadas polares (r, θ) vê-se, da fig. 9-12, que o momento de inércia do elemento de massa dm distante r do eixo é

$$r^2\,dm = r^2\,\sigma h r\,dr\,d\theta = \sigma h r^3\,dr\,d\theta$$

como $hr\,dr\,d\theta$ é o elemento volume e σ é a massa por unidade de volume (densidade). Então, o momento de inércia total é

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \sigma h r^3\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sigma h a^4 \qquad (1)$$

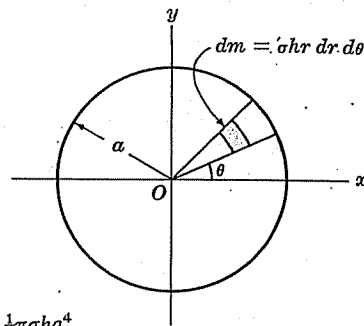



Fig. 9-12

A massa do cilindro é dada por

$$M = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a} \sigma h r\,dr\,d\theta = \sigma\pi a^2 h \qquad (2)$$

que pode também ser achado ao se notar que o volume do cilindro é $\pi a^2 h$. Dividindo a equação (1) por (2), acha-se $I/M = \frac{1}{2}a^2$ ou $I = \frac{1}{2}Ma^2$.

9.5. Ache o raio de giração, K, do cilindro do probl. 9.4.

Como $K^2 = I/M = \frac{1}{2}a^2$, $K = a/\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

9.6. Ache (*a*) o momento de inércia e (*b*) o raio de giração em torno de um dos lados de uma placa retangular de lados a e b.

Método 1, usando integração simples.

(*a*) A massa do elemento mostrado na fig. 9-13 é $\sigma b\,dx$, e seu momento de inércia em torno do eixo y é $(\sigma b\,dx)x^2 = \sigma b x^2\,dx$. Assim o momento de inércia total é

$$I = \int_{x=0}^{a} \sigma b x^2\,dx = \tfrac{1}{3}\sigma b a^3$$

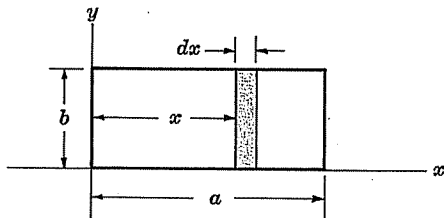



Fig. 9-13

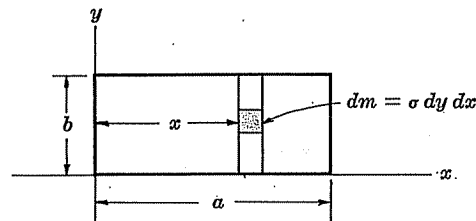



Fig. 9-14

Como a massa total da placa é $M = ab\sigma$, tem-se $I/M = \frac{1}{3}a^2$ ou $I = \frac{1}{3}Ma^2$.

(*b*) $K^2 = I/M = \frac{1}{3}a^2$ ou $K = a/\sqrt{3} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

Método 2, usando integração dupla.

Considere que a placa tenha espessura unitária. Se $dm = \sigma\,dy\,dx$ é um elemento de massa (veja a fig. 9-14), o momento de inércia de dm em torno do lado sobre o eixo y é $x^2\,dm = \sigma x^2\,dy\,dx$. Assim, o momento de inércia total é

$$I = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b} \sigma x^2\,dy\,dx = \tfrac{1}{3}\sigma b a^3$$

A massa total da placa é $M = ab\sigma$. Então, como no método 1, acha-se $I = \frac{1}{3}Ma^2$ e $K = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$.

9.7. Ache o momento de inércia de um cone circular reto de altura h e raio a em torno de seu eixo.

Método 1, usando integração simples

O momento de inércia de um disco circular cilíndrico, um quarto do qual está representado por PQR na fig. 9-15, é, pelo probl. 9.4,

$$\tfrac{1}{2}(\pi r^2\,\sigma\,dz)(r^2) = \tfrac{1}{2}\pi\sigma r^4\,dz$$

pois este disco tem volume $\pi r^2\,dz$ e raio r.

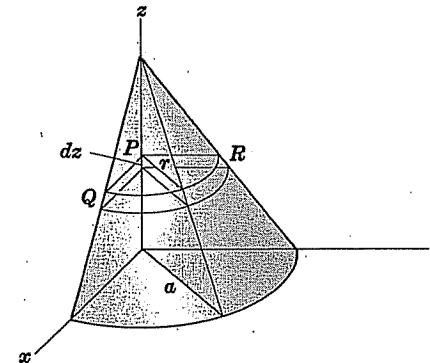



Fig. 9-15

Da fig. 9-15, $\dfrac{h-z}{h} = \dfrac{r}{a}$ ou $r = a\left(\dfrac{h-z}{h}\right)$. Então, o momento de inércia total em torno do eixo z é

$$I = \tfrac{1}{2}\pi\sigma\int_{z=0}^{h}\left\{a\left(\frac{h-z}{h}\right)\right\}^4 dz = \tfrac{1}{10}\pi a^4\sigma h$$

como também

$$M = \pi\sigma \int_{z=0}^{h} \left\{a\left(\frac{h-z}{h}\right)\right\}^2 dz = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h\sigma$$

Assim, $I = \frac{3}{10}Ma^2$.

Método 2, usando integração tripla

Subdivida o cone, um quarto do qual está representado na fig. 9-16, em elementos de massa dm, como é indicado na figura.

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) o elemento de massa dm do cilindro é $dm = \sigma r\, dr\, d\theta\, dz$, onde σ é a densidade. O momento de inércia de dm em torno do eixo z é

$$r^2\, dm = \sigma r^3\, dr\, d\theta\, dz$$

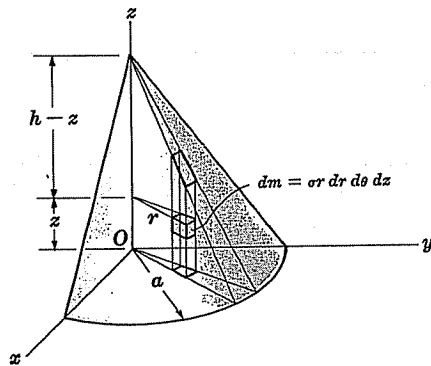



Fig. 9-16

Como no método 1, $\dfrac{h-z}{h} = \dfrac{r}{a}$ ou $z = h\left(\dfrac{a-r}{a}\right)$. Então, o momento de inércia total do eixo z é

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{h(a-r)/a} \sigma r^3\, dr\, d\theta\, dz = \tfrac{1}{10}\pi a^4 \sigma h$$

A massa total do cone é

$$M = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \int_{z=0}^{h(a-r)/r} \sigma r\, dr\, d\theta\, dz = \tfrac{1}{3}\pi a^2 h\sigma$$

a qual pode ser obtida notando-se que o volume do cone é $\frac{1}{3}\pi a^2 h$. Assim, $I = \frac{3}{10}Ma^2$.

9.8. Ache o raio de giração K do cone do probl. 9.7.

$$K^2 = I/M = \tfrac{3}{10}a^2 \quad \text{e} \quad K = a\sqrt{\tfrac{3}{10}} = \tfrac{1}{10}a\sqrt{30}.$$

TEOREMAS SOBRE MOMENTOS DE INÉRCIA

9.9. Prove o teorema dos eixos paralelos (teorema 9.3).

Seja OQ um eixo qualquer e ACP um eixo paralelo pelo centróide C e distante b de OQ. Na fig. 9-17, OQ foi escolhido como sendo o eixo z tal que AP seja perpendicular ao plano xy em P.

Se b_1 for um vetor unitário na direção OP, então o vetor OP é dado por

$$\mathbf{b} = b\mathbf{b}_1 \tag{1}$$

onde b é uma constante e a distância entre os eixos.

Sejam $\mathbf{r}_\nu$ e $\mathbf{r}'_\nu$ os vetores de posição da massa m_ν, relativamente a O e C, respectivamente. Se $\bar{\mathbf{r}}$ for o vetor-posição de C relativamente a O, então tem-se

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}'_\nu + \bar{\mathbf{r}} \tag{2}$$

O momento de inércia total de todas as massas m_ν em torno do eixo OQ é

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 \tag{3}$$

O momento de inércia total de todas as massas em torno do eixo ACP é

$$I_C = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 \tag{4}$$

Então, usando (2), acha-se

$$I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1)^2$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)^2 + 2\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\mathbf{r}'_\nu \cdot \mathbf{b}_1)(\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1) + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1)^2$$

$$= I_C + 2b\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu\right) \cdot \mathbf{b}_1 + b^2 \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = I_C + Mb^2$$

como $\bar{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{b}_1 = b$, $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu = M$ e $\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \mathbf{r}'_\nu = \mathbf{0}$ (probl. 7-16).

O resultado é facilmente estendido para sistemas de massas contínuas, usando a integração no lugar da somatória.

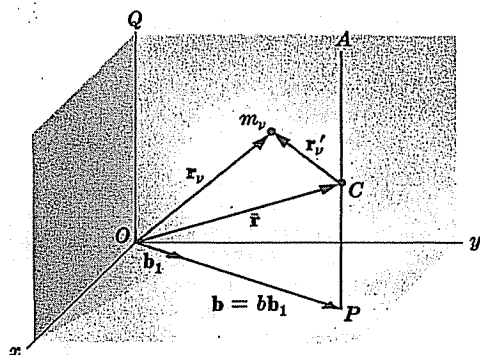



Fig. 9-17

9.10. Use o teorema dos eixos paralelos para achar o momento de inércia de um cilindro circular e sólido em torno de uma linha sobre a superfície do cilindro e paralelo ao eixo do mesmo.

Considere a seção transversal do cilindro representada na fig. 9-18. Então, o eixo é representado por C, enquanto que a linha sobre a superfície do cilindro é representada por A.

Se a for o raio do cilindro, então, pelo probl. 9.4 e pelo teorema dos eixos paralelos, tem-se

$$I_A = I_C + Ma^2 = \tfrac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \tfrac{3}{2}Ma^2$$

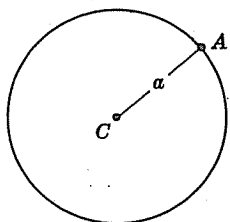



Fig. 9-18

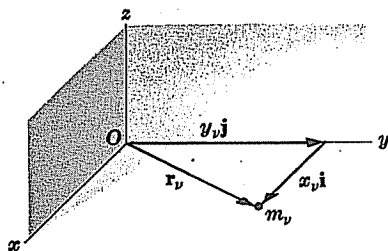



Fig. 9-19

9.11. Prove o teorema dos eixos perpendiculares. [Teorema 9.4]

Seja o vetor de posição da partícula com massa m_ν no plano xy.

$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j}$$

(veja a fig. 9-19). O momento de inércia de m_ν em torno do eixo z é

$$m_\nu|\mathbf{r}_\nu|^2.$$

Então, o momento de inércia total de todas as partículas em torno do eixo z é

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu|\mathbf{r}_\nu|^2 = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu x_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu y_\nu^2 = I_x + I_y$$

onde I_x e I_y são os momentos de inércia totais em torno dos eixos x e y, respectivamente.

O resultado é facilmente estendido para sistemas contínuos.

9.12. Ache o momento de inércia de uma placa retangular, de lados a e b, em torno de um eixo perpendicular à placa e que passa por um vértice.

Escolha a placa retangular (veja fig. 9-20) no plano xy com os lados sobre os eixos x e y. Escolha o eixo z perpendicular à placa por um de seus vértices.

Do probl. 9.6, têm-se, para os momentos de inércia em torno dos eixos x e y,

$$I_x = \tfrac{1}{3}Mb^2, \quad I_y = \tfrac{1}{3}Ma^2$$

Então, pelo teorema dos eixos perpendiculares, o momento de inércia em tôrno do eixo z é

$$I_z = I_x + I_y = \tfrac{1}{3}M(b^2 + a^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

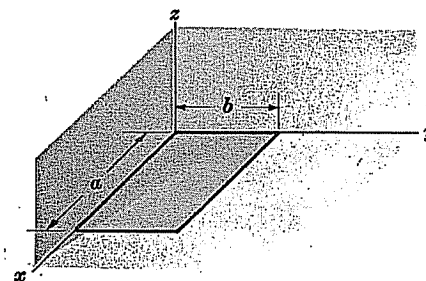



Fig. 9-20

BINÁRIOS

9.13. Prove que uma força atuante em um ponto de um corpo rígido pode ser substituída equivalentemente por uma simples força atuante em um dado ponto, junto com um binário apropriado.

Seja a força $\mathbf{F}_1$ atuante no ponto P_1 como é indicado na fig. 9-21. Se Q

for um ponto dado, pode-se ver que o efeito de $\mathbf{F}_1$ continua o mesmo após aplicação das duas forças $\mathbf{f}_1$ e $-\mathbf{f}_1$ em Q.

Em particular, se escolhermos $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{F}_1$, i.e., se $\mathbf{f}_1$ tiver a mesma magnitude de $\mathbf{F}_1$ mas em direção oposta, vê-se que o efeito de $\mathbf{F}_1$ é o mesmo que o efeito do binário formado por $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{F}_1$ (que tem um momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$) junto com a força $-\mathbf{f}_1 = \mathbf{F}_1$.

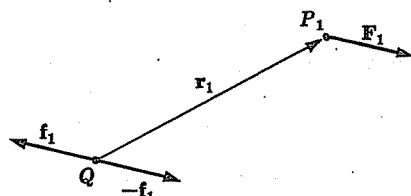



Fig. 9-21

9.14. Prove o teorema 9.5: qualquer sistema de forças que atue sobre um corpo rígido pode ser equivalentemente substituído por uma simples força que atue em um dado ponto, junto com um binário apropriado.

Pelo probl. 9.13 pode-se trocar a força $\mathbf{F}_\nu$ em P_ν pela força $\mathbf{F}_\nu$ em Q mais um binário de momento $\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{F}_\nu$. Então, o sistema de forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ podem ser combinadas em forças $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_N$ em Q, tendo resultante

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_N$$

juntamente com binários com os momentos

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1, \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_N$$

que podem ser somados, para formar um simples binário. Assim, o sistema de força pode ser trocado equivalentemente por uma simples força $\mathbf{F}$ atuante em Q, junto com um binário.

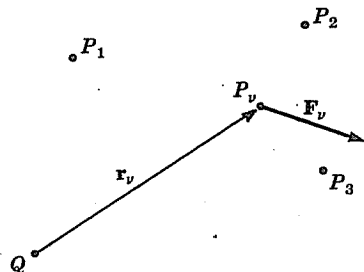



Fig. 9-22

ENERGIA CINÉTICA E MOMENTO ANGULAR

9.15. Se um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com velocidade angular ω, prova que a energia cinética de rotação é $T = \frac{1}{2}I\omega^2$, onde I é o momento de inércia em torno do eixo.

Escolha o eixo como sendo AB na fig. 9-23. Uma partícula P de massa m_ν girará em tôrno do eixo, com velocidade angular em módulo ω. Então, ela descreverá um círculo $PQRSP$, com velocidade linear em módulo $v_\nu = \omega r_\nu$, onde r_ν é a sua distância ao eixo AB. Assim, sua energia cinética de rotação em torno de AB é $\frac{1}{2}m_\nu v_\nu^2 = \frac{1}{2}m_\nu \omega^2 r_\nu^2$, e a energia cinética total de tôdas as partículas,

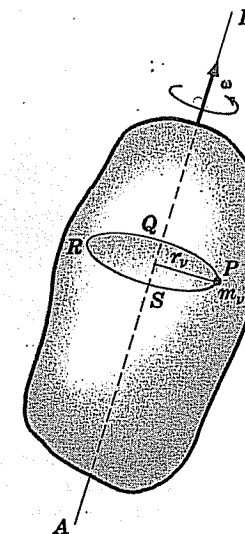



Fig. 9-23

$$T = \sum_{\nu=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_\nu \omega^2 r_\nu^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2\right)\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

onde $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ é o momento de inércia em torno de AB.

O resultado poderia ser provado também com o uso da integração em lugar da somatória.

9.16. Prove que o momento angular do corpo rígido do probl. 9.15 é $\Omega = I\omega$.

O momento angular da partícula P em torno do eixo AB é $m_\nu r_\nu^2 \omega$. Então, o momento angular total de todas as partículas em torno do eixo AB é

$$\Omega = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2 \omega = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2\right)\omega = I\omega$$

onde $I = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu r_\nu^2$ é o momento de inércia em tôrno de AB.

O resultado poderia ser provado também com o uso de integração no lugar de somatória.

MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

9.17. Prove o princípio do momento angular para um corpo rígido que gire em torno de um eixo fixo (teorema 9.6).

Pelo probl. 7.12, como um corpo rígido é um caso especial de sistema de partículas, $\Lambda = d\Omega/dt$, onde Λ é o torque ou momento de todas as forças externas em torno do eixo e Ω é o momento angular em torno do eixo.

Como $\Omega = I\omega$ pelo probl. 9.16, $\Lambda = \dfrac{d}{dt}(I\omega) = I\dfrac{d\omega}{dt} = I\dot{\omega}$.

9.18. Prove o princípio da conservação de energia para um corpo rígido que gire em torno de um eixo fixo (teorema 9.7), desde que as forças atuantes sejam conservativas.

O princípio de conservação de energia aplica-se a um sistema qualquer de partículas, no qual as forças atuantes sejam conservativas. Assim, ele se aplica em partículas no caso especial de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo. Se T e V são as energias cinética e potencial totais, tem-se

$$T + V = \text{constante} = E.$$

Usando o resultado do probl. 9.15, isto pode ser dito como $\frac{1}{2}I\omega^2 + V = E$.

TRABALHO, POTÊNCIA E IMPULSO

9.19. Prove a equação (12), da introdução deste capítulo, para o trabalho realizado em girar um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

Refira-se à fig. 9-4. Seja $\omega = \omega \mathbf{k}$ a velocidade angular do corpo, onde k é um vetor unitário na direção do eixo de rotação. O trabalho realizado por $\mathbf{F}$ é

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\,dt = \mathbf{F}\cdot(\omega\times\mathbf{r})\,dt \\ &= (\mathbf{r}\times\mathbf{F})\cdot\omega\,dt = \Lambda\cdot\omega\,dt = \Lambda\omega\,dt = \Lambda\,d\theta \end{aligned}$$

onde, nos dois últimos estágios, usam-se $\Lambda = \Lambda\mathbf{k}$, $\omega = \omega\mathbf{k}$ e $\omega = d\theta/dt$.

9.20. Prove a equação (13), da introdução deste capítulo, para a potência desenvolvida.

Do probl. 9.19 e do fato de que $d\theta/dt = \omega$,

$$\mathcal{P} = dW/dt = \Lambda\,d\theta/dt = \Lambda\omega$$

9.21. Prove o teorema 9.8.

Tem-se $\Lambda = I\,d\omega/dt$ tal que $\Lambda = I\,d\omega/dt$. Então, do probl. 9.19. e do fato de que $d\theta = \omega\,dt$, tem-se

$$\text{Trabalho realizado} = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\Lambda\,d\theta = \int_{t_1}^{t_2} I\frac{d\omega}{dt}\omega\,dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2.$$

9.22. Prove o teorema 9.9. O impulso angular é igual à mudança de momento angular.

$$\int_{t_1}^{t_2}\Lambda\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\Omega}{dt}dt = \Omega_2 - \Omega_1$$

9.23. Prove o teorema 9.10, sobre a conservação de momento angular, desde que o torque resultante seja nulo.

Do probl. 9.22, se $\Lambda = \mathbf{0}$ então $\Omega_2 = \Omega_1$.

O PÊNDULO COMPOSTO

9.24. Obtenha a equação de movimento (17), da introdução deste capítulo, para um pêndulo composto.

Método 1.

Suponha que o plano vertical de vibração do pêndulo seja escolhido como o plano xy (fig. 9.24), onde o eixo z pela origem O é o eixo horizontal de suspensão.

Considere-se que o ponto C tenha o vetor-posição $\mathbf{a}$ relativamente à O. Como o corpo é rígido, $|\mathbf{a}| = a$ é constante e é a distância de O a C.

A única força externa atuante sôbre o corpo é o seu peso $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{j}$ atuante na vertical e para baixo. Assim, tem-se

Fig. 9-24

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{torque externo total em torno do eixo } z. \\ &= \mathbf{a}\times M\mathbf{g} = -\mathbf{a}\times Mg\mathbf{j} = aMg\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k} \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\mathbf{k}$ é um vetor unitário na direção positiva de z (para fora do plano do papel em direção ao leitor).

Também se tem que a velocidade angular instantânea é

$$\omega = -\omega\mathbf{k} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{k} = -\dot{\theta}\mathbf{k} \tag{2}$$

tal que, se I_0 é o momento de inércia em torno do eixo z,

$$\Omega = \text{momento angular em torno do eixo } z = I_0\omega = -I_0\dot{\theta}\mathbf{k}$$

Substituindo de (1) e (2) em $\Lambda = d\Omega/dt$,

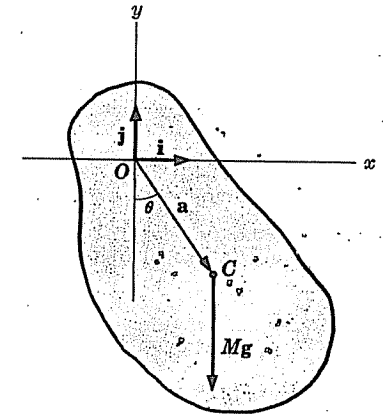
$$aMg\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(-I_0\dot{\theta}\mathbf{k}) \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\text{sen}\,\theta = 0 \tag{3}$$

Método 2.

A força $M\mathbf{g} = -Mg\mathbf{j}$ é conservativa, assim a energia potencial V é tal que

$$-\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} = -Mg\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial y} = Mg,\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

de onde

$$V = Mgy + c = -Mga\cos\theta + c$$

pois $y = -a\cos\theta$. Isto poderia ser visto diretamente, pois $y = -a\cos\theta$ é a altura de C acima do eixo x tomado como nível de referência.

Pelo probl. 9.15, a energia cinética de rotação é $\frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$. Então, o princípio de conservação de energia dá

$$T + V = \tfrac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 - Mga\cos\theta = \text{constante} = E \tag{5}$$

Diferenciando a equação (5) em relação à t,

$$I_0\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mga\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta} = 0$$

ou, como $\dot{\theta}$ não é identicamente nulo, $I_0\ddot{\theta} + Mga\,\text{sen}\,\theta = 0$, como foi pedido.

9.25. Mostre que, para pequenas vibrações, o pêndulo do probl. 9.24. têm período $P = 2\pi\sqrt{Mga/I_0}$.

Para pequenas vibrações, pode-se fazer a aproximação $\text{sen}\,\theta = \theta$ tal que a equação do movimento fica

$$\ddot{\theta} + \frac{Mga}{I_0}\theta = 0 \tag{1}$$

Então, como no probl. 4.23, acha-se que o período é $P = 2\pi\sqrt{I_0/Mga}$.

9.26. Mostre que o comprimento l de um pêndulo simples equivalente ao pêndulo composto do probl. 9.24 é $l = I_0/Ma$.

A equação do movimento correspondente a um pêndulo simples de comprimento l, suspenso verticalmente por O, é [veja o probl. 4.23, equação (2)]

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0 \tag{1}$$

Comparando esta equação com (1) do probl. 9.25, vê-se que $l = I_0/Ma$.

MOVIMENTO GENERALIZADO EM UM PLANO DE UM CORPO RÍGIDO

9.27. Prove o princípio do momento linear, teorema 9.12, para o movimento generalizado em um plano de um corpo rígido.

Isto sai imediatamente do teorema correspondente para sistemas de partículas (teorema 7.1), pois os corpos rígidos são casos particulares.

9.28. Prove o princípio do momento angular, Teorema 9.13, para o movimento generalizado em um plano de um corpo rígido.

Isto sai imediatamente do teorema correspondente para sistemas de partículas (Teorema 7.4), pois os corpos rígidos são casos particulares.

9.29. Um cilindro sólido de raio a e massa M rola sem deslizamento por um plano inclinado de ângulo α. Mostre que a aceleração é constante e igual a $\frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\alpha$.

Considere que, inicialmente, o cilindro tenha o ponto O em contacto com o plano e que, após o tempo t, tenha girado de um ângulo θ (veja a fig. 9-25).

As forças atuantes sobre o cilindro no instante t são: (*i*) o peso $M\mathbf{g}$ atuante verticalmente para baixo no centro de massa C; (*ii*) a reação $\mathbf{R}$ do plano inclinado atuante perpendicularmente ao plano; (*iii*) a força de atrito $\mathbf{f}$ atuando para cima, ao longo do plano inclinado.

Escolha o plano no qual o movimento ocorre como o plano xy, onde o eixo x é tomado como positivo para baixo no plano inclinado e a origem está em O.

Se $\mathbf{r}$ é a posição do centro de massa no instante t, então, pelo princípio do momento linear,

$$M\ddot{\mathbf{r}} = M\mathbf{g} + \mathbf{R} + \mathbf{f} \tag{1}$$

Mas, $\mathbf{g} = g\,\text{sen}\,\alpha\,\mathbf{i} - g\cos\alpha\,\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = R\mathbf{j}$, $\mathbf{f} = -f\mathbf{i}$. Então, (1) pode ser escrito como

$$M\ddot{\mathbf{r}} = (Mg\,\text{sen}\,\alpha - f)\mathbf{i} + (R - Mg\cos\alpha)\mathbf{j} \tag{2}$$

O torque externo total em torno do eixo horizontal pelo centro de massa é

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{0}\times M\mathbf{g} + \mathbf{0}\times\mathbf{R} + \mathbf{CB}\times\mathbf{f} = \mathbf{CB}\times\mathbf{f} = (-a\mathbf{j})\times(-f\mathbf{i}) = -af\mathbf{k} \tag{3}$$

O momento angular total em torno do eixo horizontal pelo centro de massa é

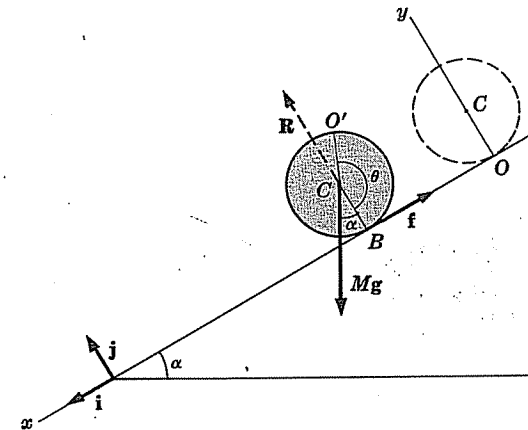
$$\mathbf{\Omega} = I_C\boldsymbol{\omega} = I_C(-\dot{\theta}\mathbf{k}) = -I_C\dot{\theta}\,\mathbf{k} \tag{4}$$

onde I_C é o momento angular do cilindro em tôrno de seu eixo.

Substituindo (3) e (4) em $\mathbf{\Lambda} = d\mathbf{\Omega}/dt$, acha-se $-af\mathbf{k} = -I_C\ddot{\theta}\mathbf{k}$ ou $I_C\ddot{\theta} = af$. Usando $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ em (2), obtém-se

$$M\ddot{x} = Mg\,\text{sen}\,\alpha - f, \qquad M\ddot{y} = R - Mg\cos\alpha \tag{5}$$

Ora, se não houver deslizamento, $x = a\theta$ ou $\theta = x/a$. Igualmente, como o cilindro permanece sobre o plano inclinado, $\ddot{y} = 0$; assim, de (5), $R = Mg\cos\alpha$.

Usando $\theta = x/a$ em $I_C\ddot{\theta} = af$, tem-se $f = I_C\ddot{x}/a^2$. Do probl. 9.4, $I_C = \frac{1}{2}Ma^2$. Então substituindo $f = \frac{1}{2}M\ddot{x}$ na primeira equação de (5), obtém-se $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\,\text{sen}\,\alpha$, como foi pedido.

9.30. Prove que, no probl. 9.29, o coeficiente de fricção deve ser, pelo menos, $\frac{1}{3}$tg α.

O coeficiente de fricção é $\mu = f/R$.

Do probl. 9.29, tem-se $f = \frac{1}{2}M\ddot{x} = \frac{1}{3}Mg \operatorname{sen} \alpha$ e $R = Mg \cos \alpha$. Assim, para que o deslizamento não ocorra, μ deve ser, pelo menos, $f/R = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$.

9.31. (*a*) Faça o probl. 9.29 considerando que o coeficiente de fricção entre o cilindro e o plano inclinado seja μ e (*b*) discuta o movimento para diferentes valores de μ.

(*a*) Na equação (5) do probl. 9.29, substitua $f = \mu R = \mu Mg \cos \alpha$, obtendo

$$\ddot{x} = g(\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)$$

Note que, neste caso, o centro de massa do cilindro move-se como uma partícula que deslize por um plano inclinado. Entretanto, o cilindro pode tanto deslizar como rolar.

A aceleração devida ao rolamento é $a\ddot{\theta} = \dfrac{a^2 f}{I_C} = \dfrac{a^2 \mu Mg \cos \alpha}{\frac{1}{2}Ma^2} = 2\mu g \cos \alpha$.

A aceleração devida ao deslizamento é $\ddot{x} - a\ddot{\theta} = g(\operatorname{sen} \alpha - 3\mu \cos \alpha)$.

(*b*) Se $(\operatorname{sen} \alpha - 3\mu \cos \alpha) > 0$, i.e. $\mu < \frac{1}{3} \operatorname{tag} \alpha$, então ocorre deslizamento. Se $(\operatorname{sen} \alpha - 3\mu \cos \alpha) \leqq 0$, i.e., $\mu \geqq \frac{1}{3} \operatorname{tag} \alpha$, então ocorre rolamento, mas não deslizamento. Estes resultados são compatíveis com os do probl. 9.30.

9.32. Prove o princípio de conservação de energia (teorema 9.14).

Isto sai do teorema correspondente para sistemas de partículas, teorema 7.7. A energia cinética total T é a soma da energia cinética de translação do centro de massa mais a energia cinética de rotação em torno do centro de massa, i.e.,

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2$$

Se V é a energia potencial, então o princípio da conservação de energia estabelece que, se E fôr uma constante,

$$T + V = \tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + V = E$$

9.33. Faça o probl. 9.29. usando o princípio da conservação de energia.

A energia potencial é composta da energia potencial devida às forças externas (neste caso, a gravidade) e a energia potencial devida às forças internas (que é uma constante e pode ser omitida). Tomando o nível de referência como a base do plano e considerando que a altura do centro de massa acima deste plano, inicialmente e após um tempo t qualquer como sendo H e h, respectivamente, têm-se

$$\tfrac{1}{2}M\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + Mgh = MgH$$

ou, usando $H - h = x \operatorname{sen} \alpha$ e $\dot{r}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2$ como $\dot{y} = 0$,

$$\tfrac{1}{2}M\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 = Mgx \operatorname{sen} \alpha$$

Substituindo $\omega = \dot{\theta} = \dot{x}/a$ e $I_C = \frac{1}{2}Ma^2$, acha-se $\dot{x}^2 = \frac{4}{3}gx \operatorname{sen} \alpha$. Diferenciando em relação a t, obtém-se

$$2\dot{x}\ddot{x} = \tfrac{4}{3}g\dot{x} \operatorname{sen} \alpha \quad \text{ou} \quad \ddot{x} = \tfrac{2}{3}g \operatorname{sen} \alpha$$

CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO. CENTRÓIDES DO ESPAÇO E DO CORPO

9.34. Ache o vetor-posição do centro instantâneo de rotação para um corpo rígido movendo-se paralelamente a um plano fixo dado.

Escolha o plano XY da fig. 9-26 como o plano fixo e o plano xy como o plano preso ao corpo rígido $\mathcal{R}$. Considere o ponto P do plano xy [que pode ou não estar no corpo rígido] como tendo os vetores de posição $\mathbf{R}$ e $\mathbf{r}$ em relação aos planos XY e xy, respectivamente. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}_A$ são as velocidades respectivas de P e A relativamente ao sistema XY,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \omega \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_A + \omega \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) \tag{1}$$

onde $\mathbf{R}_A$ é o vetor-posição de A relativamente a O. Se P for o centro instantâneo de rotação, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ tal que

$$\omega \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A) = -\mathbf{v}_A \tag{2}$$

Multiplicando ambos os membros de (2) por $\omega \times$ e usando (7), da introdução do primeiro capítulo,

$$\omega\{\omega \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)\} - (\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)(\omega \cdot \omega) = -\omega \times \mathbf{v}_A$$

Então, como ω é perpendicular a $\mathbf{R} - \mathbf{R}_A$, fica

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_A)\omega^2 = \omega \times \mathbf{v}_A \quad \text{ou} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_A + \frac{\omega \times \mathbf{v}_A}{\omega^2} \tag{3}$$

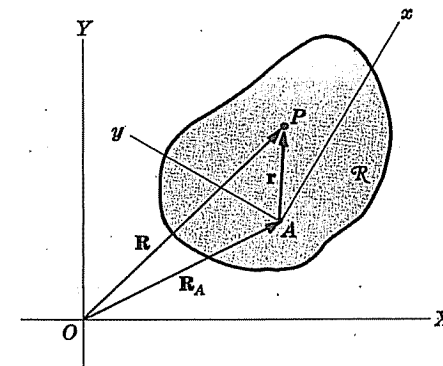



Fig. 9-26

9.35. Um cilindro move-se ao longo de um plano horizontal. Ache (*a*) o centróide do espaço (*b*) o centróide do corpo. Discuta o caso em que o deslizamento pode ocorrer.

(*a*) O movimento generalizado é aquele em que pode ocorrer tanto rolamento, como deslizamento. Considere que o cilindro esteja movendo-se para a direita, com velocidade $\mathbf{v}_A$ [a velocidade do centro de massa] e esteja girando em torno de A, com velocidade angular ω.

Como $\omega = -\omega\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_A = v_A\mathbf{i}$, tem-se $\omega \times \mathbf{v}_A = -\omega v_A\mathbf{j}$ tal que (3) do probl. 9.34 fica

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_A - \frac{(\omega v_A)\mathbf{j}}{\omega^2} = \mathbf{R}_A - \frac{v_A}{\omega}\mathbf{j}$$

Em forma de componentes,

$$X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} = X_A\mathbf{i} + a\mathbf{j} - (v_A/\omega)\mathbf{j} \quad \text{ou} \quad X = X_A, \quad Y = a - v_A/\omega$$

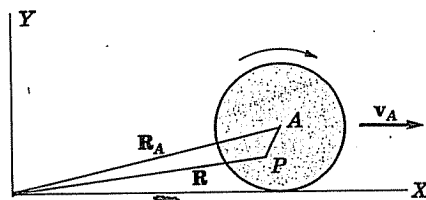



Fig. 9-27

Portanto, o centro instantâneo de rotação está localizado verticalmente acima do ponto de contato do cilindro com o piso e a uma altura $a - v_A/\omega$ acima dele.

Assim, o centróide do espaço é uma linha paralela à horizontal e a uma distância $a - v_A/\omega$ acima dela. Se não houver deslizamento, então $v_A = a\omega$ e o centróide do espaço é o eixo X, enquanto que o centro instantâneo de rotação é o ponto de contacto do cilindro com o eixo X.

(*b*) O centróide do corpo é dado por $|\mathbf{r}| = v_0/\omega$, ou um círculo de raio v_0/ω. No caso de não haver deslizamento, $v_0 = a\omega$ e o centróide do corpo é a circunferência do cilindro.

9.36. Resolva o probl. 9.29, usando o centro instantâneo de rotação.

Pelo probl. 9.35, se não houver deslizamento, então o ponto de contacto P do cilindro com o plano é o centro instantâneo de rotação. O movimento de P é paralelo ao movimento do centro de massa, por conseguinte, pode-se usar o resultado do probl. 7.86(*c*).

O momento de inércia do cilindro em torno de P, pelo teorema dos eixos

paralelos, é $\frac{1}{2}Ma^2 + Ma^2 = \frac{3}{2}Ma^2$. O torque em torno do eixo horizontal por P é $Mga \operatorname{sen}\alpha$. Assim,

$$\frac{d}{dt}(\tfrac{3}{2}Ma^2\dot{\theta}) = Mga \operatorname{sen}\theta$$

ou

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3a}\operatorname{sen}\theta$$

Como $x = a\theta$, a aceleração é $\ddot{x} = \frac{2}{3}g \operatorname{sen}\theta$.

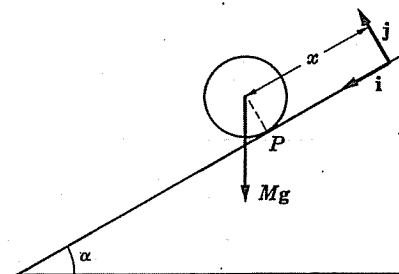



Fig. 9-28

ESTÁTICA DE UM CORPO RÍGIDO

9.37. Uma escada de comprimento l e peso W_l tem uma extremidade contra uma parede vertical, a qual não tem atrito, e a outra extremidade sobre o piso, que é considerado horizontal. A escada faz um ângulo α com o piso. Prove que um homem de peso W_m será capaz de subir a escada sem que ela escorregue, se o coeficiente de fricção μ, entre a escada e o piso, for, pelo menos,

$$\frac{W_m + \frac{1}{2}W_l}{W_m + W_l}\cot g\,\alpha.$$

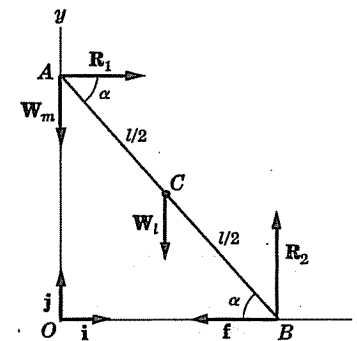



Fig. 9-29

Seja a escada representada por AB na fig. 9-29 e escolha um sistema de coordenadas xy, como é indicado.

A situação mais perigosa, na qual a escada deslizaria, ocorre quando o homem está no topo da escada. Assim, é preciso que a escada esteja em equilíbrio em tal caso.

As forças atuantes sobre a escada são: (*i*) a reação $\mathbf{R}_1 = R_1\mathbf{i}$ da parede; (*ii*) o peso do homem $\mathbf{W}_m = -W_m\mathbf{j}$; (*iii*) o peso da escada $\mathbf{W}_l = -W_l\mathbf{j}$ concen-

trado em C, o centro de gravidade; (*iv*) a reação do solo $\mathbf{R}_2 = R_2\mathbf{j}$; (*v*) a força de atrito $\mathbf{f} = -f\mathbf{i}$.

Para o equilíbrio, requer-se que

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \Lambda = \mathbf{0} \tag{1}$$

onde $\mathbf{F}$ é a força externa total sobre a escada e Λ o torque externo total tomado em torno de um eixo apropriado, que se tornará como o eixo horizontal por A perpendicular ao plano xy. Tem-se

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{W}_m + \mathbf{W}_l + \mathbf{R}_2 + \mathbf{f} = (R_1 - f)\mathbf{i} + (-W_m - W_l + R_2)\mathbf{j} = \mathbf{0}$$

se

$$R_1 - f = 0 \quad \text{e} \quad -W_m - W_l + R_2 = 0 \tag{2}$$

Também,

$$\begin{aligned}\Lambda &= (\mathbf{0}) \times \mathbf{R}_1 + (\mathbf{0}) \times \mathbf{W}_m + (\mathbf{AC}) \times \mathbf{W}_l + (\mathbf{AB}) \times \mathbf{R}_2 + (\mathbf{AB}) \times \mathbf{f}\\ &= (\mathbf{0}) \times (R_1\mathbf{i}) + (\mathbf{0}) \times (-W_m\mathbf{j}) + (\tfrac{1}{2}l\cos\alpha\,\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}l \operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}) \times (-W_l\mathbf{j})\\ &\quad + (l\cos\alpha\,\mathbf{i} - l\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}) \times (R_2\mathbf{j}) + (l\cos\alpha\,\mathbf{i} - l\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{j}) \times (-f\mathbf{i})\\ &= -\tfrac{1}{2}lW_l\cos\alpha\,\mathbf{k} + lR_2\cos\alpha\,\mathbf{k} - lf\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{k} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

se

$$-\tfrac{1}{2}W_l\cos\alpha + R_2\cos\alpha - f\operatorname{sen}\alpha = 0 \tag{3}$$

Resolvendo simultaneamente as equações (2) e (3), acha-se

$$f = R_1 = (W_m + \tfrac{1}{2}W_l)\operatorname{cotg}\alpha \quad \text{e} \quad R_2 = W_m + W_l$$

Então, o coeficiente mínimo de fricção necessário para que não ocorra o deslizamento da escada é

$$\mu = \frac{f}{R_2} = \frac{W_m + \frac{1}{2}W_l}{W_m + W_l}\operatorname{cotg}\alpha$$

PROBLEMAS DIVERSOS

9.38. Duas massas m_1 e m_2 são ligadas por um fio inextensível de massa negligenciável, que passa por uma polia (sem atrito, de massa M, raio a e raio de giração K) que pode girar em torno de um eixo horizontal por C e perpendicular à polia. Discuta o movimento.

Se representarmos a aceleração da massa m_1 por $A\mathbf{j}$, então a aceleração da massa m_2 é $-A\mathbf{j}$.

Escolha as tensões $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ no fio, como é mostrado na figura. Pela segunda lei de Newton,

$$m_1A\mathbf{j} = \mathbf{T}_1 + m_1\mathbf{g} = -T_1\mathbf{j} + m_1g\mathbf{j} \tag{1}$$

$$-m_2A\mathbf{j} = \mathbf{T}_2 + m_2\mathbf{g} = -T_2\mathbf{j} + m_2g\mathbf{j} \tag{2}$$

Assim,

$$m_1A = m_1g - T_1; \quad m_2A = T_2 - m_2g \tag{3}$$

ou

$$T_1 = m_1(g - A), \quad T_2 = m_2(g + A) \tag{4}$$

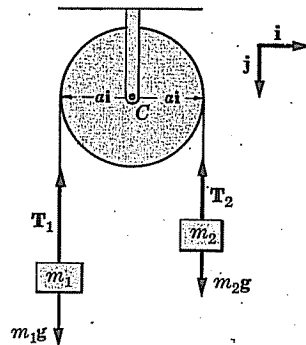



Fig. 9-30

O torque externo resultante em torno do eixo que passa por C é

$$\Lambda = (-a\mathbf{i}) \times (-T_1\mathbf{j}) + (a\mathbf{i}) \times (-T_2\mathbf{j}) = a(T_1 - T_2)\mathbf{k} \tag{5}$$

O momento angular total em torno de O é

$$\Omega = I_C\omega = I_C\omega\mathbf{k} = I_C\dot{\theta}\mathbf{k} \tag{6}$$

Como $\Lambda = d\Omega/dt$, acha-se de (5) e (6),

$$a(T_1 - T_2) = I_C\ddot{\theta} = MK^2\ddot{\theta} \tag{7}$$

Se não houver deslizamento em torno da polia, têm-se também

$$A = a\ddot{\theta} \tag{8}$$

Usando (8) em (7),

$$T_1 - T_2 = \frac{MK^2}{a^2}A \tag{9}$$

Usando (4) em (9)

$$A = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + MK^2/a^2} \tag{10}$$

Assim, as massas movem-se com aceleração constante, dada em magnitude por (10). Note que, se $M = 0$, o resultado (10) reduz-se ao do probl. 3.22.

9.39. Ache o momento de inércia de uma esfera sólida em torno de um diâmetro.

Seja O o centro da esfera e AOB o diâmetro em torno do qual o momento de inércia é tomado (fig. 9-31). Divida a esfera em discos tais como $QRSTQ$ perpendicular a AOB e tendo centro sobre AOB em P.

Tome o raio da esfera igual a a, $OP = z$, $SP = r$ e a espessura do disco igual a dz. Então, pelo probl. 9.4. o momento de inércia do disco em torno de AOB é

$$\tfrac{1}{2}(\pi r^2\sigma\,dz)r^2 = \tfrac{1}{2}\pi\sigma r^4\,dz \tag{1}$$

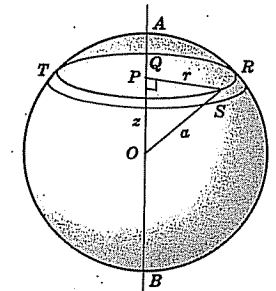
Do triângulo OSP, $r^2 = a^2 - z^2$. Substituindo em (1), o momento de inércia total é

Fig. 9-31

$$I = \int_{z=-a}^{a} \tfrac{1}{2}\pi\sigma(a^2 - z^2)^2\,dz = \tfrac{8}{15}\pi\sigma a^5 \tag{2}$$

A massa da esfera é

$$M = \int_{z=-a}^{a} \pi\sigma(a^2 - z^2)\,dz = \tfrac{4}{3}\pi a^3\sigma \tag{3}$$

que poderia ser achada também, notando-se que o volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi a^3$. De (2) e (3) têm-se $I/M = \frac{2}{5}a^2$ ou $I = \frac{2}{5}Ma^2$.

9.40. Um cubo de lado s e massa M é suspenso verticalmente por um de seus lados. (*a*) Mostre que o período para pequenas vibrações é $P = 2\pi\sqrt[4]{2}\sqrt{s/3g}$. (*b*) Qual é o comprimento do pêndulo simples equivalente?

(*a*) Como a diagonal de um quadrado de lado s tem comprimento $\sqrt{s^2 + s^2} = s\sqrt{2}$, a distância OC do eixo O ao centro de massa é $\frac{1}{2}s\sqrt{2}$.

O momento de inércia I de um cubo em torno de uma aresta é o mesmo que o de uma placa quadrada em torno de um lado. Assim, pelo probl. 9.6,

Fig. 9-32

$$I = \tfrac{1}{3}M(s^2 + s^2) = \tfrac{2}{3}Ms^2.$$

Então, o período para pequenas oscilações é, pelo probl. 9.25,

$$P = 2\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}Ms^2/[Mg(\tfrac{1}{2}s\sqrt{2})]} = 2\pi\sqrt[4]{2}\sqrt{s/3g}$$

(*b*) O comprimento de um pêndulo simples equivalente é, pelo probl. 9.26,

$$l = \tfrac{2}{3}Ms^2/[M(\tfrac{1}{2}s\sqrt{2})] = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}s$$

9.41. Prove o teorema 9.11: O período de vibrações de pequena amplitude de um pêndulo composto é mínimo, quando a distância $OC = a$ for igual ao raio de giração do corpo em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro de massa.

Se I_C é o momento de inércia em torno do eixo pelo centro de massa e I_0 é o momento de inércia em torno do eixo de suspensão, então, pelo teorema dos eixos paralelos, tem-se

$$I_0 = I_C + Ma^2$$

Por isto, o quadrado do período para pequenas oscilações é dado por

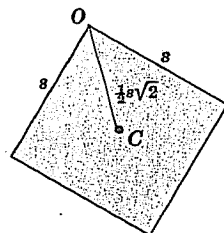
$$P^2 = \frac{4\pi^2 I_0}{Mga} = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{I_C}{Ma} + a\right) = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{K_C^2}{a} + a\right)$$

onde $K_C^2 = I_C/M$ é o quadrado do raio de giração em torno do eixo pelo centro de massa.

Achando a derivada de P^2 em relação a a e igualando a zero, acha-se

$$\frac{d}{da}(P^2) = \frac{4\pi^2}{g}\left(-\frac{K_C^2}{a^2} + 1\right) = 0$$

de onde $a = K_C$. Pode ser mostrado que isto é o valor mínimo, pois $d^2(P^2)/da^2 < 0$. Assim, o teorema está provado.

O teorema é verdadeiro, mesmo que as vibrações não sejam consideradas de pequena amplitude. Veja o probl. 9.147.

9.42. Uma esfera de raio a e massa m repousa sobre uma outra esfera fixa e rugosa de raio b. A primeira esfera é deslocada ligeiramente, de modo que role sem deslizar sobre a segunda esfera. Onde a primeira esfera deixará a segunda?

Seja escolhido o plano xy, que passa pelos centros das duas esferas, com a origem O no centro da esfera fixa (veja a fig. 9-33). Seja a posição do centro de massa C da primeira esfera medida pelo ângulo θ e considere que o vetor-posição do seu centro de massa C em relação a O seja $\mathbf{r}$. Sejam $\mathbf{r}_1$ e θ_1 os vetores unitários, como indicados na fig. 9-33.

Achando os componentes do peso $\mathbf{W} = -mg\mathbf{j}$ nas direções $\mathbf{r}_1$ e $\boldsymbol{\theta}_1$, tem-se [compare com o probl. 1.43].

$$\begin{aligned}\mathbf{W} &= (\mathbf{W}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (\mathbf{W}\cdot\theta_1)\theta_1 \\ &= (-mg\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}_1)\mathbf{r}_1 + (-mg\mathbf{j}\cdot\theta_1)\theta_1 \\ &= -mg \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{r}_1 - mg\cos\theta\, \theta_1\end{aligned}$$

A força de reação $\mathbf{N}$ e a força de atrito $\mathbf{f}$ são $\mathbf{N} = N\mathbf{r}_1$, $\mathbf{f} = f\theta_1$. Usando o teorema 9.12, junto com o resultado do probl. 1.49, chegar-se-á

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = m\mathbf{a} &= m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\theta_1] \\ &= \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f} \\ &= (N - mg\operatorname{sen}\theta)\mathbf{r}_1 + (f - mg\cos\theta)\theta_1\end{aligned}$$

de onde

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\operatorname{sen}\theta, \qquad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = f - mg\cos\theta \tag{1}$$

Como $r = a + b$ [a distância de O a C], estas equações ficam

$$-m(a+b)\dot{\theta}^2 = N - mg\operatorname{sen}\theta, \qquad m(a+b)\ddot{\theta} = f - mg\cos\theta$$

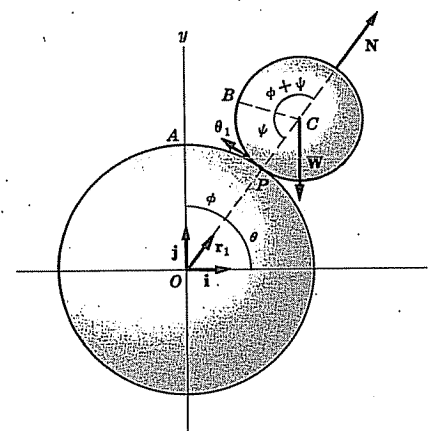



Fig. 9-33

Aplica-se, agora, o teorema 9.13. O torque externo total de todas as forças em torno do centro de massa C é (pois $\mathbf{W}$ e $\mathbf{N}$ passam por C),

$$\Lambda = (-a\mathbf{r}_1) \times \mathbf{f} = (-a\mathbf{r}_1) \times (f\boldsymbol{\theta}_1) = -af\mathbf{k}$$

Também, a aceleração angular da primeira esfera em torno de C é

$$\alpha = -\frac{d^2}{dt^2}(\phi + \psi)\mathbf{k} = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\mathbf{k}$$

Como há somente rolamento e não deslizamento, segue-se que o arco AP é igual ao arco BP ou $b\phi = a\psi$. Então, $\phi = \pi/2 - \theta$ e $\psi = (b/a)(\pi/2 - \theta)$, de modo que

$$\alpha = -(\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\mathbf{k} = -\left(-\ddot{\theta} - \frac{b}{a}\ddot{\theta}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{a+b}{a}\right)\ddot{\theta}\mathbf{k}$$

Como o momento de inércia da primeira esfera em torno do eixo horizontal de rotação por C é $I = \frac{2}{5}ma^2$, tem-se, pelo teorema 9.13,

$$\Lambda = I\alpha, \quad -af\mathbf{k} = \tfrac{2}{5}ma^2\left(\frac{a+b}{a}\right)\ddot{\theta}\mathbf{k} \quad \text{ou} \quad f = -\tfrac{2}{5}m(a+b)\ddot{\theta}$$

Usando este valor de f na segunda equação de (1), acha-se

$$\ddot{\theta} = -\frac{5g}{7(a+b)}\cos\theta \tag{2}$$

Multiplicando-se ambos os membros por $\dot{\theta}$ e integrando, acha-se, após usar o fato de que $\dot{\theta} = 0$ em $t = 0$ ou $\theta = \pi/2$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{10g}{7(a+b)}(1 - \operatorname{sen}\theta) \tag{3}$$

usando (3) na primeira das equações de (1), acha-se $N = \frac{1}{7}mg(17\operatorname{sen}\theta - 10)$. Então, a primeira esfera deixa a segunda quando $N = 0$, i.e., quando $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 10/17$.

Problemas Propostos

CORPOS RÍGIDOS

9.43. Mostre que a região $\mathscr{R}$ da fig. 9.34 pode ser levada à região $\mathscr{R}'$ por meio de uma translação, mais uma rotação em torno de um ponto apropriado.

9.44. Faça o probl. 9.1, aplicando primeiro uma translação do ponto A do triângulo ABC.

9.45. Se A_x, A_y, A_z representam as rotações de um corpo rígido em torno dos eixos x, y e z respectivamente, é verdade que a lei associativa se aplica, i.e., $A_x + (A_y + A_z) = (A_x + A_y) + A_z$? Justifique a sua resposta.

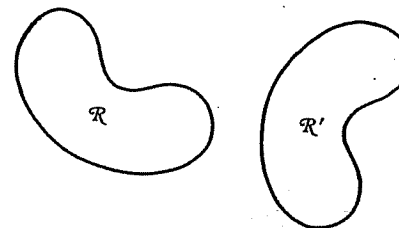



Fig. 9-34

MOMENTOS DE INÉRCIA

9.46. Três partículas de massas 3, 5 e 2 estão localizadas nos pontos $(-1, 0, 1)$, $(2, -1, 3)$ e $(-2, 2, 1)$, respectivamente. Ache (*a*) o momento de inércia e (*b*) o raio de giração em torno do eixo x.
Resp. 71.

9.47. Ache o momento de inércia do sistema de partículas no probl. 9.46. em torno (*a*) do eixo y (*b*) do eixo z.
Resp. (*a*) 81, (*b*) 44.

9.48. Ache o momento de inércia de uma haste, uniforme e de comprimento l, em torno de um eixo perpendicular a ela e passando (*a*) pelo centro de massa, (*b*) por uma extremidade, (*c*) por um ponto distante $l/4$ de uma das extremidades.
Resp. (*a*) $\frac{1}{12}Ml^2$, (*b*) $\frac{1}{3}Ml^2$, (*c*) $\frac{7}{48}Ml^2$

9.49. Ache (*a*) o momento de inércia e (*b*) o raio de giração de um quadrado de lado a, em torno de uma diagonal.
Resp. (*a*) $\frac{1}{12}Ma^2$, (*b*) $\frac{1}{6}a\sqrt{3}$

9.50. Ache o momento de inércia de um cubo, de aresta a, em torno de uma aresta.
Resp. $\frac{2}{3}Ma^2$

9.51. Ache o momento de inércia de uma placa retangular de lados a e b, em torno de uma diagonal.
Resp. $\frac{1}{6}Ma^2b^2/(a^2 + b^2)$

9.52. Ache o momento de inércia de um paralelogramo, de lados a e b e ângulo interno α, em torno de um eixo perpendicular a ele e passando pelo seu centro.
Resp. $\frac{1}{12}M(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\alpha$

9.53. Ache o momento de inércia de um cubo de lado a, em torno de uma diagonal.

9.54. Ache o momento de inércia de um cilindro, de raio a e altura h, em torno de um eixo paralelo ao eixo do cilindro e passando a uma distância b do seu centro.
Resp. $\frac{1}{2}M(a^2 + 2b^2)$

9.55. Um sólido de densidade constante é formado de um cilindro de raio a e altura h e uma semi-esfera de raio a, como é mostrado na fig. 9-35. Ache o seu momento de inércia em torno de um eixo vertical passando pelo seus centros.
Resp. $M(2a^3 + 15a^2 h)/(10a + 15h)$

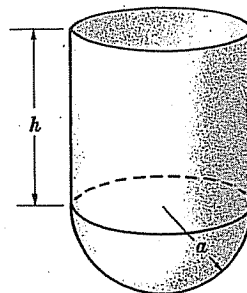



Fig. 9-35

9.56. Faça o probl. 9.55. considerando que o cilindro seja trocado por um cone de raio a e altura h.

9.57. Ache o momento de inércia de uma região, sólida e uniforme, limitada pelo parabolóide $cz = x^2 + y^2$ e o plano $z = h$, em torno do eixo z.
Resp. $\frac{1}{3}Mch$

9.58. Como se pode definir o momento de inércia de um sólido em torno (*a*) de um ponto, (*b*) de um plano? Têm algum significado físico estes resultados? Explique.

9.59. Use as suas definições do probl. 9.58. para achar o momento de inércia de um cubo de lado a, em torno (*a*) de um vértice e (*b*) de uma face.
Resp. (*a*) Ma^2, (*b*) $\frac{1}{3}Ma^2$

ENERGIA CINÉTICA E MOMENTO ANGULAR

9.60. Uma haste uniforme de comprimento 2m e massa 6kg gira com velocidade angular 10 radianos por segundo em torno de um eixo perpendicular a ela e passando pelo seu centro. Ache a energia cinética de rotação.
Resp. $100\text{kg m}^2/\text{s}^2$.

9.61. Faça o probl. 9.60. considerando que o eixo de rotação seja perpendicular à haste e passe por uma de suas extremidades.
Resp. $400\text{kg m}^2/\text{s}^2$.

9.62. Um disco cilíndrico furado de raio a e massa M rola ao longo de um plano horizontal com velocidade em módulo v. Ache a energia cinética total.
Resp. Mv^2

9.63. Faça o probl. 9.62. para um disco cilíndrico sólido, de raio a.
Resp. $\frac{3}{4}Mv^2$

9.64. Um volante, tendo um raio de giração de 2m e massa de 10kg gira a uma velocidade angular em módulo de 5 radianos/s, em torno de um eixo que lhe é perpendicular e passando pelo seu centro. Ache a energia cinét ca de rotação.
Resp. 1000 joules.

9.65. Ache o momento angular (*a*) da haste do probl. 9.60. e (*b*) do volante do probl. 9.64.
Resp. (*a*) $20\text{kg m}^2/\text{s}$, (*b*) $200\text{kg m}^2/\text{s}$.

9.66. Prove o resultado (*a*) do probl. 9.15, (*b*) do probl. 9.16, usando integração no lugar de somatória.

9.67. Derive um "teorema dos eixos paralelos" para (*a*) energia cinética e (*b*) momento angular e explique o significado físico.

MOVIMENTO DE UM CORPO RÍGIDO. O PÊNDULO COMPOSTO. TRABALHO, POTÊNCIA E IMPULSO.

9.68. Uma força constante de magnitude F_0 é aplicada tangencialmente a um volante que gira em torno de um eixo fixo que lhe é perpendicular e passando pelo seu centro. Se o volante têm um raio a, raio de giração K e massa M, prove que a aceleração angular é dada por $F_0 a/MK^2$.

9.69. Quanto tempo gastará o volante do probl. 9.68. para alcançar uma velocidade angular ω_0, se ele partir do repouso?
Resp. $MK^3 \omega_0/F_0 a$

9.70. Considere que o volante do probl. 9.68. parta do repouso, ache (*a*) o trabalho total realizado, (*b*) o trabalho total desenvolvido e (*c*) o impulso total aplicado para alcançar a velocidade angular ω_0.
Resp. (*a*) $\frac{1}{2}MK^2\omega_0^2$, (*b*) $F_0 a\omega_0$, (*c*) $MK^2\omega_0$

9.71. Faça (*a*) o probl. 9.68, (*b*) o probl. 9.69, e (*c*) o probl. 9.70, considerando que $F_0 = 10$ newtons, $a = 1$m, $K = 0{,}5$m, $M = 20$kg e $\omega_0 = 20$ rad/s.
Resp. (*a*) 2rad/s^2; (*b*) 10s; (*c*) 250 joules, 200 joules/s, 100 newton s.

9.72. Ache o período para pequenas oscilações de um pêndulo simples, considerando que o fio suporte do bulbo seja trocado por uma haste uniforme de comprimento l e massa M considerando o bulbo de massa m.

Resp. $2\pi\sqrt{\dfrac{2(M + 3m)l}{3(M + 2m)g}}$

9.73. Discuta os casos (*a*) $M = 0$ e (*b*) $m = 0$ no probl. 9.72.

9.74. Uma placa retangular, tendo lados de comprimentos a e b, está presa pela aresta de lado a. Ache (*a*) o período para pequenas oscilações em um plano vertical e (*b*) o comprimento do pêndulo simples equivalente.
Resp. $2\pi\sqrt{2b/3g}$, (*b*) $\frac{2}{3}b$

9.75. Uma esfera sólida e uniforme, de raio a e massa M está suspensa por um ponto de sua superfície. (a) Ache o período para pequenas oscilações em um plano e (b) o comprimento do pêndulo simples equivalente.
Resp. (a) $2\pi\sqrt{7a/5g}$, (b) $7a/5$

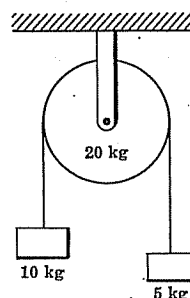
9.76. Um ioiô consiste em um cilindro de massa 80g, em torno da qual um fio de 60 cm está enrolado. Se a extremidade do fio permanecer fixa e ao ioiô fôr permitido cair verticalmente, partindo do repouso, ache sua velocidade em módulo, quando êle alcançar a extremidade do fio.
Resp. 280 cm/s.

9.77. Ache a tensão do fio no probl. 9.76.

9.78. Um disco cilíndrico e furado de massa M, movendo-se com velocidade constante v_0, chega a um plano inclinado de ângulo α. Prove que, se não houver deslizamento, ele alcançará uma distância $v_0^2/(g \operatorname{sen} \alpha)$ sobre o plano inclinado.

9.79. Se o disco furado do probl. 9.78. for trocado por um disco sólido, quanto ele subirá pelo plano inclinado?
Resp. $3v_0^2/(4g \operatorname{sen} \alpha)$

Fig. 9-36

9.80. Na fig. 9-36. a polia, considerada sem atrito, têm raio 0,2 m e o seu raio de giração é de 0,1 m. Qual é a aceleração da massa de 5 kg.?
Resp. 2,45 m/s^2.

CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO. CENTRÓIDES DO ESPAÇO E DO CORPO

9.81. Uma escada de comprimento l move-se de modo que uma de suas extremidades está sobre uma parede vertical e a outra sobre um piso horizontal. Ache (a) o centróide do espaço e (b) o centróide do corpo.
Resp. (a) Um círculo de raio l e centro no ponto O, onde o piso e a parede se encontram. (b) Um círculo com a escada como diâmetro.

9.82. Uma longa haste AB move-se de tal maneira que permanece em contacto com o topo de um poste de altura h, enquanto o seu pé B se move sobre uma linha horizontal CD (fig. 9-37). Supondo que o movimento seja em um plano, ache o lugar geométrico do centro instantâneo de rotação.

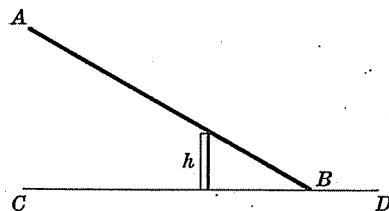



Fig. 9-37

9.83. Ache (a) o centróide do corpo e (b) o centróide do espaço no probl. 9.82.

9.84. Faça os probls. 9.82 e 9.83., considerando que o poste seja trocado por um cilindro fixo de raio a.

ESTÁTICA DE UM CORPO RÍGIDO

9.85. Uma escada uniforme de peso W e comprimento l tem o seu topo contra uma parede lisa e o seu pé sobre um piso que tem coeficiente de atrito μ. (a) Ache o menor ângulo α que a escada pode fazer com a horizontal e ainda permanecer em equilíbrio. (b) O equilíbrio pode ocorrer, se $\mu = 0$? Explique.

9.86. Faça o probl. 9.85. considerando que a parede tenha um coeficiente de atrito μ_1.

9.87. Na fig. 9-38, AB é uma barra uniforme de comprimento l e peso W suportada por C. Ela tem os pesos W_1 em A e W_2 em D tal que $AC = a$ e $CD = b$. Onde deve ser posto o peso W_3 sobre a AC de modo que o sistema fique em equilíbrio?

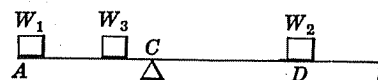
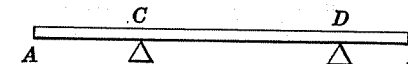



Fig. 9-38 Fig. 9-39

9.88. Uma placa fina de forma triangular está presa a um ponto O pelos fios OA, OB e OC de comprimentos a, b e c, respectivamente. Prove que as tensões T_1, T_2 e T_3 nos fios são tais que $T_1/a = T_2/b = T_3/c$.

9.89. Uma prancha uniforme AB de comprimento l e peso W está suspensa pelos pontos C e D distantes a de A e b de B, respectivamente (veja a fig. 9-39). Determine as forças de reação em C e D.

9.90. Na fig. 9-40. OA e OB são hastes uniformes que têm a mesma densidade e são conectadas em O de modo que AOB forme um ângulo reto. O sistema é suportado em O de tal forma que AOB está em um plano vertical. Ache os ângulos α e β, para que ocorra o equilíbrio.
Resp. $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(a/b)$, $\beta = \pi/2 - \operatorname{tg}^{-1}(a/b)$

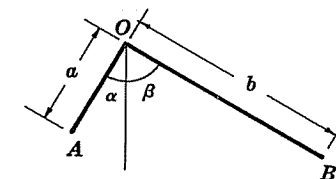



Fig. 9-40

PROBLEMAS DIVERSOS

9.91. Um cilindro tem raio a e altura h. Prove que o momento de inércia em torno de um eixo perpendicular ao eixo do cilindro e passando pelo centróide é $\frac{1}{12}M(h^2 + 3a^2)$.

9.92. Prove que o efeito de uma força sobre um corpo rígido não é modificado, se ela for deslizada ao longo de sua linha de ação.

9.93. Um cilindro de raio a e raio de giração K rola sem deslizamento por um plano inclinado de um ângulo α e de comprimento l, partindo do repouso no topo do plano inclinado. Prove que, girando, ele alcança a extremidade inferior do plano inclinado com a velocidade de $\sqrt{(2gla^2 \operatorname{sen}\alpha)/(a^2 + K^2)}$.

9.94. A um cilindro em repouso no topo de um cilindro fixo é dado um ligeiro deslocamento, tal que ele role sem deslizamento. Determine onde ele deixa o cilindro fixo.
Resp. $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 4/7$, onde θ é medido como na fig. 9-33.

9.95. Faça o probl. 9.42, considerando que a esfera tenha uma velocidade inicial v_0.

9.96. Faça o probl. 9.94, considerando que o cilindro tenha uma velocidade inicial v_0.

9.97. Uma esfera, de raio a e raio de giração K em torno de um diâmetro, rola sem deslizar por um plano inclinado de ângulo α. Prove que ela desce com aceleração constante, dada por $(ga^2 \operatorname{sen}\alpha)/(a^2 + K^2)$.

9.98. Faça o probl. 9.97, considerando que a esfera seja (*a*) sólida, (*b*) ôca e de espessura negligenciável.
Resp. (*a*) $\frac{5}{7}g \operatorname{sen}\alpha$, (*b*) $\frac{3}{5}g \operatorname{sen}\alpha$

9.99. Uma esfera oca tem o raio interno a e o raio externo b. Prove que, se M é a sua massa, então o momento de inércia em torno de um eixo pelo centro é

$$\frac{2}{5}M\left(\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{a^2 + ab + b^2}\right)$$ Discuta os casos $b = 0$ e $a = b$.

9.100. Placas de madeira, tôdas tendo a mesma forma retangular, são empilhadas uma acima da outra, como é indicado na fig. 9-41. (*a*) Se o comprimento de cada placa é $2a$, prove que as condições de equilíbrio prevalecem se $a(n+1)$-ésima placa estender-se a uma distância máxima de a/n além da n-ésima placa, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$ (*b*) Qual é a máxima distância horizontal que pode ser alcançada, se mais e mais placas fossem acrescentadas?

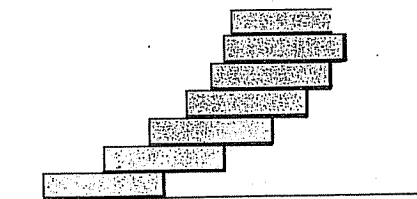



Fig. 9-41

9.101. Faça o probl. 9.100, considerando que as placas sejam empilhadas sobre uma esfera de raio R, em vez de uma superfície plana como foi considerado naquêle problema.

9.102. Um cilindro de raio a rola sobre a superfície interna de um cilindro liso de raio $2a$. Prove que o período de oscilações pequenas é $2\pi\sqrt{3a/2g}$.

9.103. Uma escada de comprimento l e peso negligenciável está em repouso, com uma de suas extremidades contra uma parede que tem um coeficiente de atrito μ_1 e a outra extremidade contra um piso que tem um coeficiente de atrito μ_2. Ela faz um ângulo α com o piso. (*a*) Quanto pode um homem subir pela escada, sem que ela deslize? (*b*) Qual é a condição para que a escada não deslize, podendo o homem ficar em qualquer posição sobre a escada?
Resp. (*a*) $\mu_2 l(\mu_1 + \operatorname{tag}\alpha)/(\mu_1\mu_2 + 1)$, (*b*) $\operatorname{tag}\alpha > 1/\mu_2$.

9.104. Faça o probl. 9.103, considerando que o peso da escada não seja negligenciável.

9.105. Uma escada AB de comprimento l (veja a fig. 9-42) tem uma de suas extremidades A sobre um plano inclinado de ângulo α e a outra extremidade β sobre uma parede vertical. Se a parede for lisa e o plano inclinado tiver um coeficiente de atrito μ, ache o menor valor de μ de modo que um homem de peso W_m seja capaz de subir a escada sem que ela deslize. Compare a sua resposta com o resultado do probl. 9.37, como um caso especial.

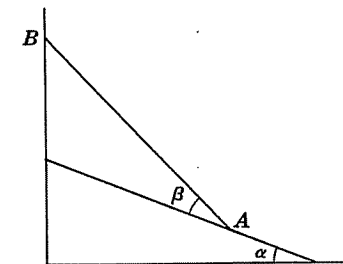



Fig. 9-42

9.106. Faça o probl. 9.105, considerando que a parede tenha um coeficiente de atrito μ_1.

9.107. Uma haste uniforme AB, com o ponto A fixo, gira em torno de um eixo vertical tal que ela faça um ângulo constante α com a vertical (fig. 9-43). Se o comprimento da haste for l, prove que a velocidade angular necessária para que isto ocorra é $\omega = \sqrt{(3g \sec\alpha)/2l}$.

9.108. Um cilindro circular de massa m e raio a está preso ao teto por um fio, como mostra a fig. 9-44. Ao cilindro é dado uma torção de ângulo θ_0 e, então, solto. Se o torque for considerado como porporcional ao ângulo de que o cilindro seja rodado e a constante de proporcionalidade seja λ, prove que o cilindro sofrerá um movimento harmônico simples com período $2\pi a\sqrt{m/2\lambda}$.

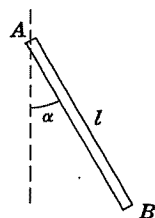



Fig. 9-43

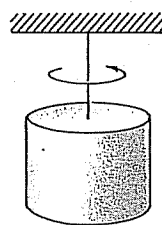



Fig. 9-44

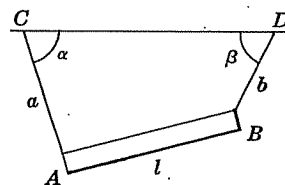



Fig. 9-45

9.109. Ache o período do probl. 9.108, considerando que o cilindro seja trocado por uma esfera de raio a.
Resp. $2\pi a\sqrt{2m/5\lambda}$

9.110. Faça (a) o probl. 9.108, e (b) o probl. 9.109, considerando um amortecimento proporcional à velocidade angular instantânea. Discuta fisicamente.

9.111. Uma barra uniforme AB de comprimento l e peso W (fig. 9-45) é suportada pelas cordas AC e BD de comprimentos a e b, respectivamente, fazendo ângulos α e β com o teto CD, ao qual estão presas. Considerando uma condição de equilíbrio, ache as tensões nessas cordas.

9.112. Na fig. 9-46, a massa m está ligada a uma corda enrolada em uma polia, de raio a, massa M e raio de giração K, que pode girar livremente em torno do ponto O. Se a massa for solta a partir do repouso, ache (a) a velocidade angular da polia após um tempo t e (b) a tensão na corda.

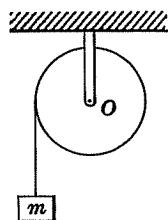



Fig. 9-46

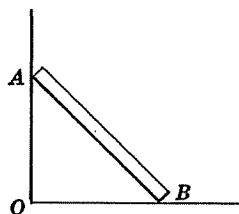



Fig. 9-47

9.113. Prove que a aceleração da massa $m = M$ no probl. 9.112 é $ga^2/(a^2 + K^2)$.

9.114. Descreva como o probl. 9.112 pode ser usado para determinar o raio de giração da polia.

9.115. Uma haste AB uniforme (fig. 9-47) de comprimento l e peso W, tendo as suas extremidades sobre uma parede OA, sem atrito e o piso OB, respectivamente, desliza partindo do repouso quando seu pé B está a uma distância d a partir de O. Prove que a outra extremidade A deixará a parede quando o pé B estiver a uma distância a partir de O, dada por $\frac{1}{3}\sqrt{5l^2 + 4d^2}$.

9.116. Um cilindro de massa 10 kg, raio 20 cm e raio de giração 10 cm, gira em torno de um eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro e lhe é perpendicular. Uma corda enrolada em torno dele está presa a uma massa de 10 kg. Considerando que a massa parta do repouso, ache a sua velocidade, após 5 segundos.
Resp. 39,2 m/s.

9.117. Qual deve ser o comprimento de uma haste suspensa por uma extremidade, tal que ela seja um pêndulo de segundos ao oscilar em um plano com pequena amplitude?
Resp. 149 cm.

9.118. Uma esfera sólida e uma esfera oca do mesmo raio, ambas partindo do repouso no topo de um plano inclinado de ângulo α, rolam sem deslizar por um plano inclinado. Qual chega primeiro ao pé do plano inclinado? Explique.
Resp. A esfera sólida.

9.119. Um pêndulo composto de massa M e raio de giração K em torno de um eixo horizontal é deslocado de tal maneira que ele faz um ângulo θ_0 com a vertical e, então, é solto. Prove que, se o centro de massa estiver a uma distância a do eixo, então a força de reação sobre o eixo é dada por

$$\frac{Mg}{K^2 + a^2}\sqrt{([K^2 + 2a^2]\cos\theta - a^2\cos\theta_0)^2 + (K^2 \operatorname{sen}\theta)^2}$$

9.120. Um paralepípedo de lados a, b e c está suspenso verticalmente por um lado de comprimento a. Ache o período para pequenas oscilações.

9.121. Ache o coeficiente de atrito mínimo necessário para que um arco circular não deslize por um plano inclinado de ângulo α.
Resp. $\frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha$

9.122. Ache o período para vibrações de pequenas amplitudes de uma haste de comprimento l, suspensa verticalmente por um ponto $\frac{1}{3}l$ a partir de uma extremidade.

9.123. Um sistema de polias consiste em dois discos sólidos de raios r_1 e r_2 rigidamente ligados um ao outro e capaz de girar livremente em torno de um eixo

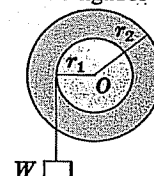



Fig. 9-48

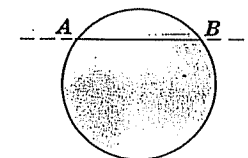



Fig. 9-49

horizontal pelo centro O. Um peso W está suspenso por um fio enrolado em torno do disco menor, como é mostrado na fig. 9-48. Se o raio de giração do sistema de polias for K e o seu peso w, ache (*a*) a aceleração angular com que o peso desce e (*b*) a tensão no fio.
Resp. (*a*) $Wgr_1/(Wr_1^2 + wK^2)$, (*b*) $WwK^2/(Wr_1^2 + wK^2)$

9.124. Uma esfera sólida de raio b rola dentro de uma esfera ôca e liza, de raio a. Prove que o período para pequenas oscilações é dado por $2\pi\sqrt{7(a-b)/5g}$.

9.125. Uma placa circular, sólida e fina, de raio a, está suspensa na vertical por um eixo horizontal que passa pela corda AB (veja a fig. 9-49). Se ela oscilar com pequena amplitude em torno deste eixo, prove que a freqüência de tais oscilações é maior, quando AB está a uma distância $a/2$ do centro.

9.126. Uma haste uniforme de comprimento $5l$ está suspensa na vertical por um fio de comprimento $2l$, que tem a outra sua extremidade fixa. Prove que as freqüências normais para oscilações de pequena amplitude em um plano são

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{5l}} \text{ e } \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{l}},$$ e descreva os modos normais.

9.127. Uma haste uniforme de massa m e comprimento l está suspensa por uma de suas extremidades. Qual é a mínima velocidade com que a outra extremidade deve ser impulsionada, para que ela descreva um círculo completo na vertical?

9.128. (*a*) Se o bulbo de um pêndulo simples for uma esfera sólida e uniforme de raio a e não mais uma massa pontual, prove que o período para pequenas oscilações é $2\pi\sqrt{l/g + 2a^2/5gl}$. (*b*) Para que valor de l o período em (*a*) é mínimo?

9.129. Uma esfera de raio a e massa M rola ao longo de um plano horizontal, com velocidade constante v_0. Ela alcança, assim, um plano inclinado de ângulo α. Considerando que role sem deslizar, quanto ela subirá pelo plano inclinado?
Resp. $10v_0^2/(7g \text{ sen } \alpha)$

9.130. Prove que o *toróide* da fig. 9-50 tem um momento de inércia, em torno de seu eixo, dado por $\frac{1}{4}M(3a^2 + 4b^2)$.

Fig. 9-50

9.131. Um cilindro de massa m e raio a rola sem deslizar por um plano inclinado de 45° (cunha) e massa M, o qual está sobre uma mesa horizontal sem atrito. Prove que, enquanto o cilindro rola, o plano inclinado move-se com uma aceleração dada por $mg/(3M + 2m)$.

9.132. Faça o probl. 9.131, com uma cunha de ângulo α.
Resp. $(mg \text{ sen } 2\alpha)/(3M + 2m - m \cos 2\alpha)$

9.133. Ache (*a*) a tensão na corda e (*b*) a aceleração do sistema mostrado na fig. 9-51, se o raio de giração da polia for 0,5 m e sua massa for 20 kg.

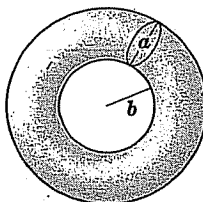
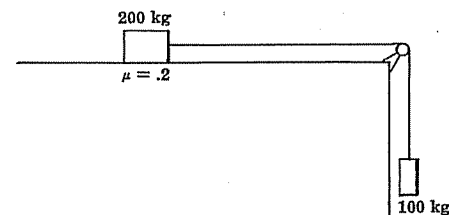



Fig. 9-51

9.134. Compare o resultado do probl. 9.133 com o obtido, considerando-se a polia de massa negligenciável.

9.135. Prove que, se o torque externo resultante em torno de um eixo for nulo, então ele será nulo também em torno de um outro eixo qualquer.

9.136. Um disco cilíndrico sólido de raio a tem um furo circular de raio b, cujo centro está a uma distância c do centro do disco. Se o disco rola por um plano inclinado de ângulo α, ache sua aceleração. (veja a fig. 9-52).

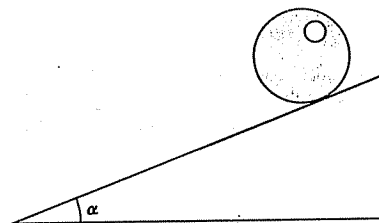
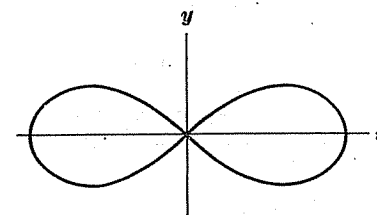



Fig. 9-52 **Fig. 9-53**

9.137. Ache o momento de inércia de uma região limitada pela lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (veja a fig. 9-53) em torno do eixo x.
Resp. $Ma^2(3\pi - 8)/48$

9.138. Ache o maior ângulo de um plano inclinado, pelo qual rola um cilindro sem deslizar, considerando que o coeficiente de atrito seja μ.

9.139. Faça o probl. 9.138 para uma esfera sólida.

9.140. Discuta o movimento de um cilindro furado de raio interno a e raio externo b, quando ele rola por um plano inclinado de ângulo α.

9.141. Um tampo de mesa de peso negligenciável tem a forma de um triângulo equilátero ABC, de lado s. As pernas da mesa são perpendiculares ao tampo da mesa em seus vértices. Um peso W é colocado sobre o tampo da mesa, em

um ponto distante a do lado BC e b do lado AC. Ache as componentes do peso suportadas pelas pernas A, B e C, respectivamente.

Resp. $\dfrac{2Wa}{s\sqrt{3}}, \dfrac{2Wb}{s\sqrt{3}}, W\left(1-\dfrac{2a+2b}{s\sqrt{3}}\right)$

9.142. Discuta o movimento do disco do probl. 9.136 por um plano inclinado, se o coeficiente de atrito for μ.

9.143. Uma colina tem uma seção na forma de uma ciclóide $x = a(\theta + \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$, como é indicado na fig. 9-54. Uma esfera sólida de raio b parte do repouso no topo da colina e é dado um ligeiro deslocamento para que ela role sem deslizar pela colina. Ache a velocidade em módulo do seu centro, quando ela alcança o pé da colina.
Resp. $\sqrt{10g(2a-b)/7}$

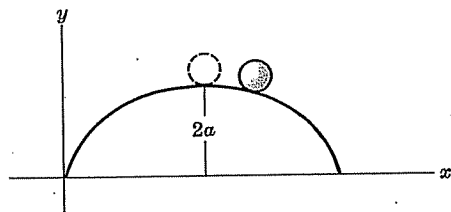



Fig. 9-54

9.144. Faça o probl. 3.108, considerando as massas e momentos de inércia das polias.

9.145. Faça o probl. 9.38, se for considerado o atrito.

9.146. Uma haste uniforme de comprimento l é colocada em cima de uma mesa e, então, deixada cair. Considerando que o seu ponto de contacto com a mesa não se mova, prove que sua velocidade angular, no instante em que faz um ângulo θ com a vertical, é dada em magnitude por $\sqrt{3g(1-\cos\theta)/2l}$.

9.147. Prove o teorema 9.11 para o caso em que as vibrações não são necessariamente pequenas. Compare com o probl. 9.41.

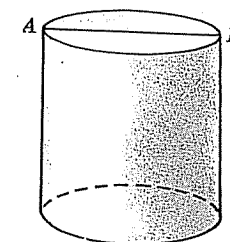
9.148. Um corpo rígido move-se paralelamente a um dado plano fixo. Prove que há um, e somente um, ponto do corpo rígido em que a aceleração instantânea é nula.

9.149. Uma semi-esfera sólida de raio a repousa em uma superfície convexa sobre uma mesa horizontal. Se ela for deslocada ligeiramente, prove que oscilará com período igual ao de um pêndulo simples de comprimento equivalente $4a/3$.

9.150. Um cilindro sólido de raio a e altura h está suspenso por um eixo AB, como é indicado na fig. 9-55. Ache o período de pequenas oscilações em torno deste eixo.

Fig. 9-55

9.151. Prove que uma esfera sólida rolará sem deslizar por um plano inclinado de ângulo α, se o coeficiente de atrito for, pelo menos, $\frac{2}{7}\operatorname{tg}\alpha$.

9.152. Ache o mínimo coeficiente de atrito de um plano inclinado de ângulo α, de maneira que um cilindro sólido role pelo plano sem deslizar.
Resp. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Capítulo 10

O Movimento Espacial de Corpos Rígidos

MOVIMENTO LIVRE DE CORPOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

No Cap. 9 foi restringido o movimento de corpos rígidos à translação do centro de massas mais a rotação em torno do centro de massas e perpendicular a um plano fixo.

Neste capítulo trata-se do movimento livre de um corpo rígido no espaço. Tal movimento livre é composto de uma translação de um ponto do corpo (geralmente o centro de massa) mais a rotação em torno de um eixo que passa pelo ponto escolhido do corpo, não sendo necessariamente restrita a sua direção.

GRAUS DE LIBERDADE

O número de graus de liberdade (veja a instrução do Cap. 7) para o movimento livre no espaço de um corpo rígido é 6, i.e., são necessárias 6 coordenadas para especificar o movimento. Escolhe-se, geralmente, 3 destas para serem as coordenadas de um ponto do corpo (geralmente o centro de massa) e as 3 restantes para serem ângulos (por exemplo, os ângulos de Euler) que descrevem a rotação do corpo rígido em torno do ponto.

Se um corpo rígido é constrangido de algum modo, como, por exemplo, mantendo um ponto fixo, o número de graus de liberdade naturalmente é reduzido de acordo.

ROTAÇÃO PURA DE CORPOS RÍGIDOS

Como o movimento generalizado de um corpo rígido pode ser expresso em termos de translação de um ponto do corpo rígido em torno de um eixo pelo ponto, é natural que se considere primeiro o caso de rotação pura e posteriormente são adicionados os efeitos da translação. Para isto, primeiro é assumido que um ponto do corpo rígido é fixo no espaço. Os efeitos da translação são relativamente fáceis de se levar em conta e podem ser obtidos pelo uso do resultado (10) da introdução do Cap. 7.

A VELOCIDADE LINEAR E A VELOCIDADE ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO COM UM PONTO FIXO

Considere que o ponto O de um corpo rígido $\mathscr{R}$, da fig. 10-1, é fixo. Então, em um dado instante, o corpo estará girando com *velocidade angular* ω em torno de um

eixo instantâneo que passa por O. Uma partícula P do corpo, tendo um vetor-posição $\mathbf{r}_\nu$ com relação a O, terá uma *velocidade instantânea* $\mathbf{v}_\nu$ dada por

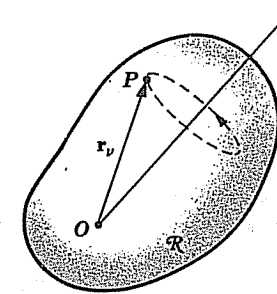



Fig. 10-1

$$\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu = \omega \times \mathbf{r} \qquad (1)$$

Veja o probl. 10.2.

MOMENTUM ANGULAR

O momentum angular, de um corpo rígido com um ponto fixo, em torno de seu eixo instantâneo que passa pelo ponto fixo, é dado por

$$\Omega = \sum m_\nu(\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{v}_\nu) = \sum m_\nu\{\mathbf{r}_\nu \times (\omega \times \mathbf{r}_\nu)\} \qquad (2)$$

onde m_ν é a massa da partícula de número ν e onde a somatória é tomada sobre todas as partículas $\mathscr{R}$.

MOMENTOS DE INÉRCIA. PRODUTOS DE INÉRCIA

Escolhendo um sistema de coordenadas fixo xyz, tendo origem O e escrevendo

$$\Omega = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}, \quad \omega = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k} \qquad (3)$$

Então, a equação (2) pode ser escrita em forma de componentes como (veja o probl. 10.3)

$$\left.\begin{aligned} \Omega_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ \Omega_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ \Omega_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

onde

$$I_{xx} = \sum m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2), \quad I_{yy} = \sum m_\nu(z_\nu^2 + x_\nu^2), \quad I_{zz} = \sum m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2) \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= -\sum m_\nu x_\nu y_\nu = I_{yx} \\ I_{yz} &= -\sum m_\nu y_\nu z_\nu = I_{zy} \\ I_{zx} &= -\sum m_\nu z_\nu x_\nu = I_{xz} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Os valores I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} são chamados de *momentos de inércia* em torno dos eixos x, y e z, respectivamente. Os valores I_{xy}, I_{xz}, ... são chamados *produtos de inércia*. Para distribuições de massa contínuas, eles podem ser achados mediante o emprego de integração.

Note que os produtos de inércia em (6) são definidos com um sinal negativo associado. Como conseqüência, os sinais negativos são evitados em (4).

MATRIZ OU TENSOR DE MOMENTO DE INÉRCIA

Os nove valores $I_{xx}, I_{xy}, \ldots, I_{zz}$ podem ser escritos em forma de quadro, geralmente chamado *matriz* ou *tensor*, dado por

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{7}$$

e cada valor é chamado *elemento da matriz* ou *tensor*. A diagonal formada pelos elementos I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} é chamada *principal*. Como

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy}, \tag{8}$$

pode-se notar a simetria dos elementos em relação à diagonal principal. Por esta razão (7) é, geralmente, referida como matriz ou tensor *simétrico*.

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

A energia cinética de rotação é dada por

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z) \\ &= \tfrac{1}{2}\omega\cdot\Omega. \end{aligned} \tag{9}$$

EIXOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA

Um conjunto de 3 eixos perpendiculares entre si, tendo uma origem O, que estão *fixados no corpo* e girando com ele, e tais que os produtos de inércia em torno deles são nulos são chamados de *eixos principais de inércia* ou, simplesmente, *eixos principais* do corpo.

Uma propriedade importante de um eixo principal (que pode ser tomada como definição) é que, se um corpo rígido gira em torno dele, a direção do momentum angular é a mesma que a da velocidade angular. Assim, $\Omega = I\omega$, onde I é um escalar. Daí se acha (veja o probl. 10.6) que

$$\left.\begin{aligned} (I_{xx}-I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy}-I)\omega_y + I_{yz}\omega_z &= 0 \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + (I_{zz}-I)\omega_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

De modo que (11) tenha outras soluções, além da trivial $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = 0$, pede-se que

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Isto leva a uma equação cúbica em I, tendo 3 raízes reais I_1, I_2, I_3. Estes são os chamados *momentos principais de inércia*. As direções dos eixos principais podem ser achadas de (11), como é mostrado no probl. 10.6, achando-se a razão $\omega_x : \omega_y : \omega_z$.

Um eixo de simetria de um corpo rígido será sempre um eixo principal.

MOMENTUM ANGULAR E ENERGIA CINÉTICA EM TORNO DOS EIXOS PRINCIPAIS

Se chamarmos $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ e $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ as magnitudes das velocidades angulares e momenta angulares em torno dos eixos principais, respectivamente, então

$$\Omega_1 = I_1\omega_1, \quad \Omega_2 = I_2\omega_2, \quad \Omega_3 = I_3\omega_3 \tag{13}$$

A energia cinética de rotação em torno dos eixos principais é dada por

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{14}$$

o que pode ser escrito na forma vetorial como [compare com a equação (9)]

$$T = \tfrac{1}{2}\omega\cdot\Omega \tag{15}$$

A ELIPSÓIDE DE INÉRCIA

Seja $\mathbf{n}$ um vetor unitário na direção de ω. Então,

$$\omega = \omega\mathbf{n} = \omega(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}) \tag{16}$$

onde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ são os co-senos diretores de ω ou $\mathbf{n}$ em relação aos eixos x, y e z. Então, a energia cinética de rotação é dada por

$$T = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \tag{17}$$

onde

$$\begin{aligned} I &= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \\ &\quad + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma. \end{aligned} \tag{18}$$

Definindo o vetor

$$\rho = \mathbf{n}/\sqrt{I} \tag{19}$$

onde $\rho = \rho_x\mathbf{i} + \rho_y\mathbf{j} + \rho_z\mathbf{k}$, (18) fica

$$I_{xx}\rho_x^2 + I_{yy}\rho_y^2 + I_{zz}\rho_z^2 + 2I_{xy}\rho_x\rho_y + 2I_{yz}\rho_y\rho_z + 2I_{xz}\rho_z\rho_x = 1 \tag{20}$$

A equação (20) nas coordenadas ρ_x, ρ_y, ρ_z representa uma *elipsóide*, que é chamada de *elipsóide de inércia*.

Se os eixos de coordenadas são deslocados angularmente, de modo a coincidir com os eixos principais da elipsóide, a equação fica

$$I_1 \rho_1^2 + I_2 \rho_2^2 + I_3 \rho_3^2 = 1 \tag{21}$$

onde ρ_1, ρ_2, ρ_3 representam os novos eixos de coordenadas.

AS EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

É conveniente descrever o movimento de um corpo rígido relativamente a um conjunto de eixos de coordenadas coincidindo com os eixos principais de inércia, que estão fixos ao corpo e, assim, giram com ele. Se $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ e $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ representam os respectivos componentes do torque externo e velocidade angular ao longo dos eixos principais, as equações do movimento são dadas por

$$\left.\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3 &= \Lambda_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3 \omega_1 &= \Lambda_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Estas são as, geralmente, chamadas *equações de Euler.*

ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO. A LINHA E O PLANO INVARIÁVEIS

Suponha que um corpo rígido está girando em torno do ponto fixo O e que não haja fôrças atuando sobre o corpo (exceto, naturalmente, a reação no ponto fixo). Então, o torque total externo é nulo. Assim, o vetor momentum angular Ω é constante e tem uma direção fixa no espaço, como é indicado na fig. 10-2. A linha indicando esta direção é chamada de *linha invariável.*

Como a energia cinética é constante (veja o probl. 10.34), tem-se de (15)

$$\omega \cdot \Omega = \text{constante} \tag{23}$$

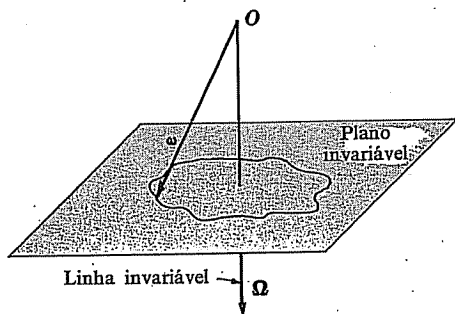



Fig. 10-2

Isto significa que a projeção de ω sobre Ω é constante e, assim, a extremidade de ω descreve um plano. Este plano é o chamado *plano invariável.*

Como o corpo rígido gira, um observador fixo relativamente aos eixos de coordenadas do corpo veria uma rotação ou *precessão* do vetor de velocidade angular ω em torno do vetor de momentum angular Ω.

CONSTRUÇÃO DE POINSOT. POLÓIDIA. ERPOLÓIDIA. CONE DO ESPAÇO E CONE DO CORPO

Como foi observado por *Poinsot*, as idéias acima podem ser geometricamente interpretadas como um rolamento sem deslizamento da elipsóide de inércia correspondente ao corpo rígido sobre o plano invariável. A curva descrita no plano invariável pelo ponto de contato com a elipsóide é chamada de *erpolóidia* (veja a fig. 10-3). A curva correspondente na elipsóide é chamada de *polóidia.*

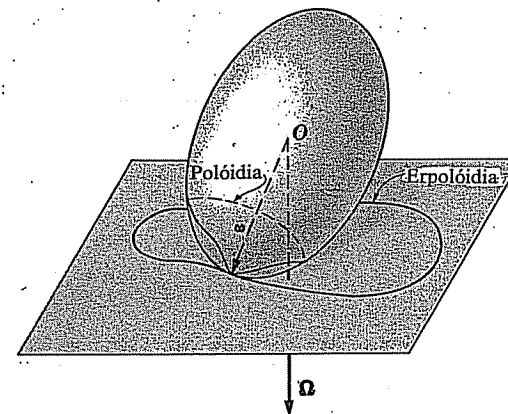



Fig. 10-3

Para um observador fixo no espaço, tudo se passaria como se o vetor ω descrevesse um cone, que é chamado *cone do espaço.* Para um observador fixo sobre o corpo rígido tudo se passa como se ω traçasse também um cone que é chamado de *cone do corpo.* O movimento pode ser, então, descrito equivalentemente como um rolamento, sem deslizamento, de um cone sobre o outro (veja o probl. 10.19).

CORPOS SIMÉTRICOS E RÍGIDOS. ROTAÇÃO DA TERRA

Ocorrem algumas simplificações no caso de um corpo rígido e simétrico. Em tal caso, pelo menos dois momentos principais de inércia, diga-se I_1 e I_2, são iguais e a elipsóide de inércia é uma elipsóide de revolução. Pode-se mostrar, então (veja o probl. 10.17), que o vetor velocidade angular ω precessa em torno do vetor momentum angular Ω, com uma freqüência dada por

$$f = \frac{1}{d\pi}\left|\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right| A \tag{24}$$

onde a constante A é a componente da velocidade angular na direção do eixo de simetria.

No caso da Terra, que pode ser suposta como sendo uma elipsóide de revolução achatada ligeiramente nos pólos, isto leva a predizer um período de precessão de cerca de 300 dias. Na prática, entretanto, o período é da ordem de 430 dias. A diferença é explicada como sendo devida ao fato de que a Terra não é perfeitamente rígida.

OS ÂNGULOS DE EULER

De modo a descrever a rotação de um corpo rígido em torno de um ponto, usam-se 3 coordenadas angulares chamadas de *ângulos de Euler*. Estas coordenadas, representadas por ϕ, θ, ψ, são indicadas na fig. 10-4. Nesta figura, o sistema de coordenadas xyz pode ser submetido a sucessivas rotações, para coincidir com o sistema $x'y'z'$, dos ângulos ϕ, θ e ψ sucessivamente (veja o probl. 10.20). A linha OA é, algumas vezes, chamada *linha dos nodos*.

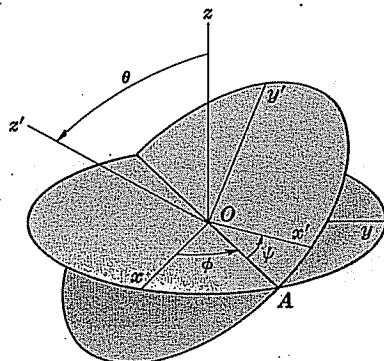



Fig. 10-4

Na prática, os eixos x', y' e z' são escolhidos como sendo os eixos principais ou *eixos do corpo* de um corpo rígido, enquanto os eixos x, y e z ou *eixos espaciais* são fixos no espaço.

VELOCIDADE ANGULAR E ENERGIA CINÉTICA EM TERMOS DOS ÂNGULOS DE EULER

Em termos dos ângulos de Euler, as componentes ω_1, ω_2, ω_3 da velocidade angular ao longo dos eixos x', y' e z' são dadas por

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x'} &= \omega_1 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \\ \omega_{y'} &= \omega_2 = \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \\ \omega_{z'} &= \omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

A energia cinética de rotação é, então, dada por

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) \tag{26}$$

onde I_1, I_2, I_3 são os momentos principais de inércia.

O MOVIMENTO DE UM PIÃO EM ROTAÇÃO

Um exemplo interessante de corpo rígido ocorre quando um corpo rígido simétrico, tendo um ponto do eixo de simetria fixo no espaço, é posto em rotação em campo gravitacional. Um exemplo disto é o pião de brinquedo como é mostrado na fig. 10-5, onde o ponto O é admitido como sendo um ponto fixo.

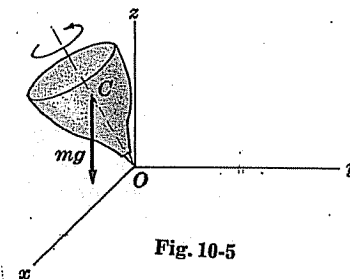



Fig. 10-5

Para a discussão dos vários tipos de movimento que podem ocorrer, veja os probls. 10.25, 10.32 e 10.36.

GIROSCÓPIOS

Suponha que a um disco circular, tendo o seu eixo montado em *quadros* (veja a fig. 10-6), é dada uma rotação de velocidade angular ω.

Se o *quadro externo* é inclinado de um certo ângulo, o eixo de rotação do disco tenderá a apontar na mesma direção que a anterior (veja a fig. 10-7). É admitido, naturalmente, que o atrito nos rolamentos dos quadros seja negligenciado.

Em geral, a direção do eixo de rotação permanece fixa no espaço, mesmo quando o quadro exterior, que é preso a algum objeto, se move livremente no espaço. Por causa desta propriedade, um mecanismo, que é chamado de *giroscópio*, acha muitas aplicações nos casos onde manter uma direção (ou seguir um curso especificado) seja importante, como, por exemplo, na navegação, orientação ou controle de navios, aviões, submarinos, mísseis, satélites ou outros veículos móveis.

Um giroscópio é outro exemplo de rotação de um corpo rígido simétrico com um dos pontos do eixo de simetria (geralmente, o centro de massa) tomado como fixo.

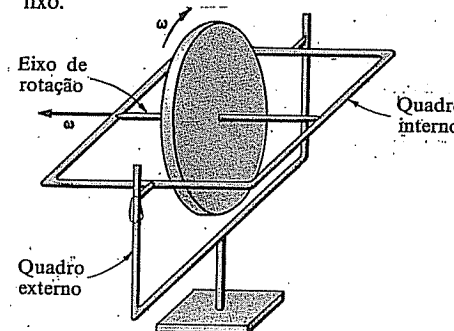
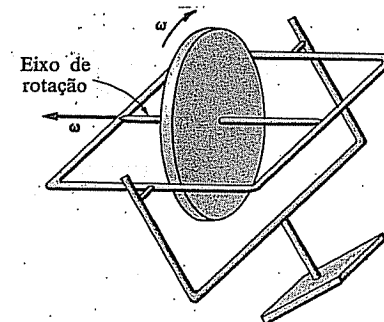



Fig. 10-6 Fig. 10-7

Problemas Resolvidos

MOVIMENTO LIVRE DE UM CORPO RÍGIDO NO ESPAÇO

10.1. Ache o número de graus de liberdade para um corpo rígido que (*a*) pode mover-se livremente no espaço, (*b*) têm um pontò fixo, (*c*) têm dois pontòs fixos.

(*a*) 6 (veja o probl. 7.2(*a*)

(*b*) 3 (veja o probl. 7.2(*b*)

(*c*) Se dois pontòs são fixos, então o corpo rígido gira em tôrno do eixo que liga os dois pontòs fixos. Assim, o número de graus de liberdade é 1, tal como, por exemplo, o ângulo de rotação de um corpo rígido em torno de seu eixo.

10.2. Um corpo rígido sofre uma rotação com velocidade angular ω em tôrno de um pontò fixo O. Prove que a velocidade de qualquer partícula do corpo, tèndo um vetòr de posição $\mathbf{r}$ relativamentè a O, é dada por $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$.

Istò vem do probl. 6.1, notàndo-se que a velocidade relatìva do sistèma em movimentò é $d\mathbf{r}/dt|_M = d\mathbf{r}/dt|_b = \mathbf{0}$.

MOMENTUM ANGULAR. ENERGIA CINÉTICA
MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

10.3. Derive as equações (4) para as componentès do momentùm angular em termos dos momentòs e produtòs de inércia dados pelas equações (5) e (6).

O momentùm angular tòtàl é dado por

$$\Omega = \sum_{v=1}^{N} m_v(\mathbf{r}_v \times \mathbf{v}_v) = \sum_{v=1}^{N} m_v\{\mathbf{r}_v \times (\omega \times \mathbf{r}_v)\}$$

onde é usado o probl. 10.2 aplicado à partícula de número v.

Agora, pela equação (7) da introdução do primeiro capítulo, têm-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_v \times (\omega \times \mathbf{r}_v) &= \omega(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v) - \mathbf{r}_v(\omega \cdot \mathbf{r}_v) \\
&= (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) \\
&\quad - (x_v\mathbf{i} + y_v\mathbf{j} + z_v\mathbf{k})(\omega_x x_v + \omega_y y_v + \omega_z z_v) \\
&= \{\omega_x(y_v^2 + z_v^2) - \omega_y x_v y_v - \omega_z x_v z_v\}\mathbf{i} \\
&\quad + \{\omega_y(x_v^2 + z_v^2) - \omega_x x_v y_v - \omega_z y_v z_v\}\mathbf{j} \\
&\quad + \{\omega_z(x_v^2 + y_v^2) - \omega_x x_v z_v - \omega_y y_v z_v\}\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Então, multiplicando-se por m_v, fazendo-se uma somatória de índice v e

igualando os coeficientès de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, e $\mathbf{k}$ a Ω_x, Ω_y e Ω_z, respectivamentė, acha-se, como foi pedido

$$\begin{aligned}
\Omega_x &= \left\{\sum_{v=1}^{N} m_v(y_v^2 + z_v^2)\right\}\omega_x + \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v x_v y_v\right\}\omega_y + \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v x_v z_v\right\}\omega_z \\
&= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\
\Omega_y &= \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v x_v y_v\right\}\omega_x + \left\{\sum_{v=1}^{N} m_v(x_v^2 + z_v^2)\right\}\omega_y + \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v y_v z_v\right\}\omega_z \\
&= I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\
\Omega_z &= \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v x_v z_v\right\}\omega_x + \left\{-\sum_{v=1}^{N} m_v y_v z_v\right\}\omega_y + \left\{\sum_{v=1}^{N} m_v(x_v^2 + y_v^2)\right\}\omega_z \\
&= I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z
\end{aligned}$$

Para distribuições de massa contínuas de densidade σ, podem-se obtèr os mesmos resultàdos partìndo-se de

$$\Omega = \int_{\mathscr{R}} \sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\,d\tau = \int_{\mathscr{R}} \sigma\{\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\}\,d\tau$$

10.4. Se um corpo rígido com um pontò fixo gira a uma velocidade angular ω e têm um momentùm angular Ω, prove que a energia cinétìca é dada por $T = \frac{1}{2}\omega \cdot \Omega$.

$$\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}\sum m_v v_v^2 = \tfrac{1}{2}\sum m_v(\dot{\mathbf{r}}_v \cdot \dot{\mathbf{r}}_v) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum m_v\{(\omega \times \mathbf{r}_v)\cdot(\omega \times \mathbf{r}_v)\} = \tfrac{1}{2}\sum m_v\{\omega \cdot [\mathbf{r}_v \times (\omega \times \mathbf{r}_v)]\} \\
&= \tfrac{1}{2}\omega \cdot \sum m_v \mathbf{r}_v \times (\omega \times \mathbf{r}_v) = \tfrac{1}{2}\omega \cdot \Omega
\end{aligned}$$

onde é usada a abreviação $\sum$ no lugar de $\sum_{v=1}^{N}$.

10.5. Prove que a energia cinétìca no probl. 10.4 pode ser escritá como

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z)$$

Do probl. 10.4, têm-se

$$\begin{aligned}
T = \tfrac{1}{2}\omega \cdot \Omega &= \tfrac{1}{2}(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k})\cdot(\Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}) \\
&= \tfrac{1}{2}(\omega_x\Omega_x + \omega_y\Omega_y + \omega_z\Omega_z) \\
&= \tfrac{1}{2}\{\omega_x(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z) \\
&\qquad + \omega_y(I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z) \\
&\qquad + \omega_z(I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\} \\
&= \tfrac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z \\
&\qquad + 2I_{yz}\omega_y\omega_z)
\end{aligned}$$

usando-se o fatò de que $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$, $I_{yz} = I_{zy}$.

MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA E EIXOS PRINCIPAIS

10.6. Derive as equações (11) da introdução dêste capítulo para os momentos principais de inércia e as direções dos eixos principais.

Usando

$$\Omega = I\omega \qquad (1)$$

com as equações (3) e (4) da introdução dêste capítulo têm-se

$$\begin{aligned} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= I\omega_x \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z &= I\omega_y \\ I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z &= I\omega_z \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (I_{xx}-I)\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z &= 0 \\ I_{yx}\omega_x + (I_{yy}-I)\omega_y + I_{yz}\omega_z &= 0 \\ I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y + (I_{zz}-I)\omega_z &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Os momentos principais de inércia são achados igualando-se a zero o determinante dos coeficientes de ω_x, ω_y, ω_z em (2), i.e.,

$$\begin{vmatrix} I_{xx}-I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy}-I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz}-I \end{vmatrix} = 0.$$

Istò é uma equação cúbica em I, achando-se três valores I_1, I_2 e I_3 que são os momentos principais de inércia. Pondo-se $I = I_1$ em (2) obtém-se as razões $\omega_x : \omega_y : \omega_z$, que determinam a direção de ω ou a direção do eixo principal I_1. Igualmente, substituindo-se I_2 e I_3, acha-se as direções dos eixos principais correspondentes.

10.7. Ache (*a*) os momentos de inércia e (*b*) os produtos de inércia de uma placa quadrada uniforme de comprimento a em torno dos eixos x, y e z escolhidos de acôrdo com a fig. 10-8.

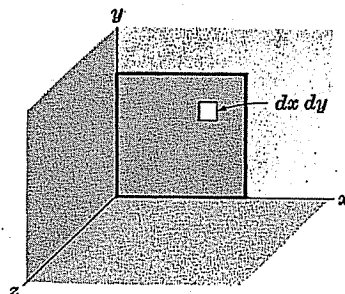



Fig. 10-8

(*a*) O momento de inércia de um elemento $dx\,dy$ da placa em torno do eixo x, se a densidade for σ é $\sigma y^2 dx\,dy$. Então, o momento de inércia da placa inteira em torno eixo x é

$$I_{xx} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma y^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}\sigma a^4 = \tfrac{1}{3}Ma^2 \qquad (1)$$

pois a massa da placa é $M = \sigma a^2$. Igualmente, o momento de inércia da placa em tôrno do eixo y é

$$I_{yy} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma x^2\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}\sigma a^4 = \tfrac{1}{3}Ma^2 \qquad (2)$$

como é evidente pela simetria.

O momento de inércia de $dx\,dy$ em tôrno do eixo z é $\sigma(x^2 + y^2)dx\,dy$, e, assim, o movimento de inércia da placa inteira em tôrno de z é

$$I_{zz} = \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}Ma^2 + \tfrac{1}{3}Ma^2 = \tfrac{2}{3}Ma^2. \qquad (3)$$

Istò é obtido também do teorema dos eixos perpendiculares [veja a introdução do Cap. 9].

(*b*) O produto de inércia de um elemento $dx\,dy$ da placa em tôrno dos eixos x e y é $\sigma xy\,dx\,dy$, e, assim, o produto de inércia da placa inteira em torno destes eixos é

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{a} \sigma xy\,dx\,dy = -\tfrac{1}{4}\sigma a^4 = -\tfrac{1}{4}Ma^2. \qquad (4)$$

O produto de inércia do elemento $dx\,dy$ da placa em tôrno dos eixos x e y é o produto de $dx\,dy$ pelas distâncias aos planos yz e xy, que são x e 0, respectivamente. Assim, deve-se ter

$$I_{xz} = I_{zx} = 0, \quad \text{ou, por semelhança,} \quad I_{yz} = I_{zy} = 0.$$

10.8. Ache (*a*) os momentos principais de inércia e (*b*) as direções dos eixos principais para a placa do probl. 10.7.

(*a*) Pelo probl. 10.6 e os resultados (1)-(5) do probl. 10.7, obtém-se

$$\begin{vmatrix} \tfrac{1}{3}Ma^2 - I & -\tfrac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\tfrac{1}{4}Ma^2 & \tfrac{1}{3}Ma^2 - I & 0 \\ 0 & 0 & \tfrac{2}{3}Ma^2 - I \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

ou

$$[(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I)(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I) - (-\tfrac{1}{4}Ma^2)(-\tfrac{1}{4}Ma^2)][\tfrac{2}{3}Ma^2 - I] = 0$$

que pode ser escrito

$$[I^2 - \tfrac{2}{3}Ma^2 I + \tfrac{7}{144}M^2a^4][\tfrac{2}{3}Ma^2 - I] = 0$$

Fazendo o primeiro fatôr igual a zero e usando a fórmula quadrática para resolver para I, temos as três raízes de (1),

$$I_1 = \tfrac{1}{12}Ma^2, \quad I_2 = \tfrac{7}{12}Ma^2, \quad I_3 = \tfrac{2}{3}Ma^2 \qquad (2)$$

que são os momentos principais de inércia.

(*b*) Para achar a direção do eixo principal correspondente a I_1, substitui-se $I = I_1 = \frac{1}{12}Ma^2$ nas equações

$$\left(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I\right)\omega_x - \tfrac{1}{4}Ma^2\,\omega_y + 0\,\omega_z = 0$$
$$-\tfrac{1}{4}Ma^2\,\omega_x + \left(\tfrac{1}{3}Ma^2 - I\right)\omega_y + 0\,\omega_z = 0$$
$$0\,\omega_x + 0\,\omega_y + \left(\tfrac{2}{3}Ma^2 - I\right)\omega_z = 0$$

Das primeiras duas equações obtém-se $\omega_y = \omega_x$, enquanto da terceira, $\omega_z = 0$. Assim, a direção do eixo principal é a mesma que a direção do vetor velocidade angular

$$\omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_x \mathbf{j} = \omega_x(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Então, o eixo principal correspondente a I_1 tem a direção de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Igualmente, substituindo-se $I = I_2 = \frac{1}{12}Ma^2$ em (3), acha-se $\omega_y = -\omega_x$, $\omega_z = 0$ tal que a direção do eixo principal correspondente é $\omega = \omega_x \mathbf{i} - \omega_x \mathbf{j} = \omega_x(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ ou $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Se $I = I_3 = \frac{2}{3}Ma^2$ for substituído em (3), acha-se $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, enquanto ω_z é arbitrário. Isto dá $\omega = \omega_z \mathbf{k}$, que mostra que o terceiro eixo principal está na direção $\mathbf{k}$.

As direções dos eixos principais são indicadas por $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ na fig. 10.9. Note-se que estas são mutuamente perpendiculares e que $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ têm as direções das diagonais da placa quadrada que são linhas de simetria.

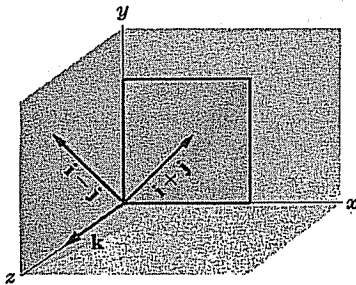



Fig. 10-9

Os momentos principais de inércia podem também ser determinados pelo reconhecimento das linhas de simetria.

10.9. Ache os momentos principais de inércia em relação ao centro de uma placa retangular uniforme de lados a e b.

Os principais eixos estão nas direções de simetria e, assim, devem ser nas direções dos eixos x, y e z (o último dos quais é perpendicular ao plano xy) como na fig. 10-10.

Pelos probls. 9.6, 9.9 e 9.11, os momentos principais de inércia são achados como sendo $I_1 = \frac{1}{12}Ma^2$, $I_2 = \frac{1}{12}Mb^2$, $I_3 = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$.

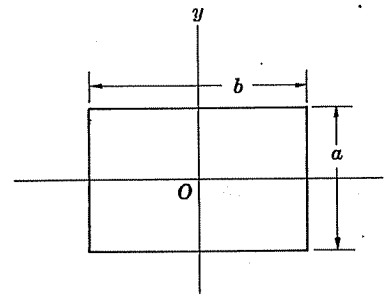



Fig. 10-10

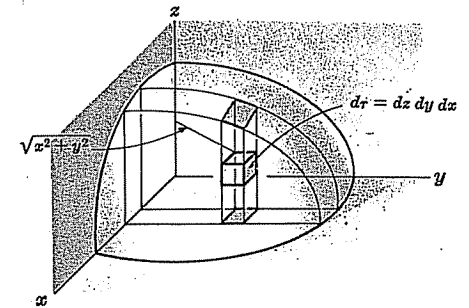



Fig. 10-11

10.10. Ache os momentos principais de inércia em relação ao centro da elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Um oitavo da elipsóide é indicado na fig. 10.11. O momento de inércia do elemento de volume $d\tau$ de massa $\sigma d\tau$ em torno do eixo z ou eixo "3" é $(x^2 + y^2)\sigma d\tau$, e o momento de inércia total em torno do eixo z é

$$I^3 = 8 \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \int_{z=0}^{c\sqrt{1-(x^2/a^2+y^2/b^2)}} (x^2 + y^2)\sigma\, dz\, dy\, dx.$$

A integração em relação a z dá

$$8\sigma c \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} (x^2 + y^2)\sqrt{1-(x^2/a^2 + y^2/b^2)}\, dy\, dx.$$

Para executar esta integração, faz-se $x = aX$, $y = bY$, onde X e Y são variáveis novas. Então, a integral pode ser escrita

$$8\sigma abc \int_{X=0}^{1} \int_{Y=0}^{\sqrt{1-X^2}} (a^2X^2 + b^2Y^2)\sqrt{1-(X^2+Y^2)}\, dY\, dX$$

Introduzindo as coordenadas polares R, Θ neste plano XY, fica

$$8\sigma abc \int_{R=0}^{1} \int_{=0}^{\pi/2} (a^2R^2\cos^2\Theta + b^2R^2\operatorname{sen}^2\Theta)\sqrt{1-R^2}\, R\, dR\, d\Theta$$

$$= 2\pi\sigma abc(a^2 + b^2)\int_{R=0}^{1} R^3\sqrt{1-R^2}\, dR = \tfrac{4}{15}\pi\sigma abc(a^2 + b^2)$$

onde se usa a substituição de $1 - R^2 = U^2$ para avaliar a última integral.

Como o volume da elipsóide é $\frac{4}{3}\pi abc$, a massa é $M = \frac{4}{3}\pi\sigma abc$ e, assim, $I_3 = \frac{1}{5}M(a^2+b^2)$. Por simetria, acha-se $I_1 = \frac{1}{5}M(b^2+c^2)$, $I_2 = \frac{1}{5}M(a^2+c^2)$.

10.11. Considere que a elipsóide do probl. 10.10 é uma esferóide oblata tal que $a = b$, enquanto c difere um pouco de a ou b. Prove que, com um alto grau de aproximação, $(I_3 - I_1)/I_1 = 1 - c/a$.

Do probl. 10.10, se $a=b$, então $\dfrac{I_3 - I_1}{I_1} = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \dfrac{(a-c)(a+c)}{a^2+c^2}$. Mas, se c difere um pouco de a, então $a + c \approx 2a$ e $a^2 + c^2 \approx 2a^2$. Assim, aproximadamente, $(I_3 - I_1)/I = (a-c)(2a)/2a^2 = 1 - c/a$

10.12. Faça o probl. 10.11 para o caso da Terra admitindo-se esta como uma esferóide oblata.

Como o diâmetro polar ou a distância entre os pólos norte e sul é, aproximadamente, de 12.713 km, enquanto o diâmetro equatorial é, aproximadamente, de 12.755 km, então, tomando o eixo polar como eixo "3", tem-se $2c = 12.713$, $2a = 12.755$ ou $c = 6.356$, $a = 6.372$.

Assim, pelo probl. 10.11, $(I_3 - I_1)/I_1 = 1 - 6.356/6.372 = 0,\ 0033$.

A ELIPSÓIDE DE INÉRCIA

10.13. Considere que os momentos e produtos de inércia de um corpo rígido $\mathscr{R}$, em relação a um sistema de coordenadas xyz interseccionando na origem O, são I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xz}, I_{yz}, respectivamente. Prove que o momento de inércia de $\mathscr{R}$, em torno de um eixo fazendo os ângulos α, β, γ com os eixos x, y e z, respectivamente, é dado por

$$I = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma.$$

Um vetor unitário na direção do eixo é dado por

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$$

Fig. 10-12

Então, m_ν tem um vetor-posição $\mathbf{r}_\nu$, e seu momento de inércia em torno do eixo OA é $m_\nu D_\nu^2$ onde $D_\nu = |\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n}|$. Mas

$$\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_\nu & y_\nu & z_\nu \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = (y_\nu\cos\gamma - z_\nu\cos\beta)\mathbf{i} + (z_\nu\cos\alpha - x_\nu\cos\gamma)\mathbf{j} + (x_\nu\cos\beta - y_\nu\cos\alpha)\mathbf{k}$$

e

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_\nu \times \mathbf{n}|^2 &= (y_\nu\cos\gamma - z_\nu\cos\beta)^2 + (z_\nu\cos\alpha - x_\nu\cos\gamma)^2 + (x_\nu\cos\beta - y_\nu\cos\alpha)^2 \\ &= (y_\nu^2 + z_\nu^2)\cos^2\alpha + (x_\nu^2 + z_\nu^2)\cos^2\beta + (x_\nu^2 + y_\nu^2)\cos^2\gamma \\ &\quad - 2x_\nu y_\nu\cos\alpha\cos\beta - 2x_\nu z_\nu\cos\alpha\cos\gamma - 2y_\nu z_\nu\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

Assim, o momento de inércia total de toda a massa m_ν é

$$\begin{aligned}I &= \sum m_\nu D_\nu^2 \\ &= \left\{\sum m_\nu(y_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\cos^2\alpha + \left\{\sum m_\nu(x_\nu^2 + z_\nu^2)\right\}\cos^2\beta + \left\{\sum m_\nu(x_\nu^2 + y_\nu^2)\right\}\cos^2\gamma \\ &\quad + 2\left\{-\sum m_\nu x_\nu y_\nu\right\}\cos\alpha\cos\beta + 2\left\{-\sum m_\nu x_\nu z_\nu\right\}\cos\alpha\cos\gamma \\ &\quad + 2\left\{-\sum m_\nu y_\nu z_\nu\right\}\cos\beta\cos\gamma \\ &= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma \\ &\quad + 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma.\end{aligned}$$

10.14. Ache a equação para a elipsóide de inércia correspondente à placa quadrada do probl. 10.7.

Tem-se, do probl. 10.7,

$$I_{xx} = \tfrac{1}{3}Ma^2,\ I_{yy} = \tfrac{1}{3}Ma^2,\ I_{zz} = \tfrac{2}{3}Ma^2,\ I_{xy} = -\tfrac{1}{4}Ma^2,\ I_{xz} = 0,\ I_{yz} = 0.$$

Então, a equação da elipsóide de inércia é, pela equação (20) da introdução deste capítulo,

$$\tfrac{1}{3}Ma^2\rho_x^2 + \tfrac{1}{3}Ma^2\rho_y^2 + \tfrac{2}{3}Ma^2\rho_z^2 - \tfrac{1}{2}Ma^2\rho_x p_y = 1$$

ou

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 + 2\rho_z^2 - \tfrac{3}{2}\rho_x\rho_y = 3/Ma^2$$

EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

10.15. Ache a relação entre a razão de mudança do momentum angular pelo tempo de um corpo rígido relativamente aos eixos fixos no espaço e no corpo, respectivamente.

Se os eixos do corpo rígido são escolhidos como eixos principais, tendo as direções dos vetores unitários e_1, e_2, e_3, respectivamente, então o momentùm angular fica

$$\Omega = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$$

Agora, pelo probl. 6.1, se s e b referirem-se aos eixos do espaço (fixo) e do corpo (em movimento), respectivamente, então

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_s &= \left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_b + \omega\times\Omega \\ &= I_1\dot\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot\omega_3\mathbf{e}_3 \\ &\quad + (\omega_1\mathbf{e}_1+\omega_2\mathbf{e}_2+\omega_3\mathbf{e}_3)\times(I_1\omega_1\mathbf{e}_1+I_2\omega_2\mathbf{e}_2+I_3\omega_3\mathbf{e}_3) \\ &= \{I_1\dot\omega_1 + (I_3-I_2)\omega_2\omega_3\}\mathbf{e}_1 + \{I_2\dot\omega_2 + (I_1-I_3)\omega_1\omega_3\}\mathbf{e}_2 \\ &\quad + \{I_3\dot\omega_3 + (I_2-I_1)\omega_2\omega_1\}\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

10.16. Derive as equações de Euler do movimento (22) da introdução deste capítulo.

Pelo princípio do momentùm angular, têm-se

$$\Lambda = \left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_s \tag{1}$$

onde Λ é o torque externo total. Escrevendo

$$\Lambda = \Lambda_1\mathbf{e}_1 + \Lambda_2\mathbf{e}_2 + \Lambda_3\mathbf{e}_3 \tag{2}$$

onde $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ são os componentes do torque externo na direção dos eixos principais e fazendo uso de (1) e do probl. 10.15, acha-se

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot\omega_1 + (I_3-I_2)\omega_2\omega_3 &= \Lambda_1 \\ I_2\dot\omega_2 + (I_1-I_3)\omega_3\omega_1 &= \Lambda_2 \\ I_3\dot\omega_3 + (I_2-I_1)\omega_1\omega_2 &= \Lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO DE UM CORPO RÍGIDO. ROTAÇÃO DA TERRA

10.17. Um corpo rígido, que é simétrico em torno de um eixo, tem um ponto deste eixo fixo. Discuta o movimento rotacional do corpo, admitindo que não há outras forças atuantes além das forças de reação no ponto fixo.

Escolha o eixo de simetria coincidente com um dos eixos principais, por exemplo, o de direção e_3. Então, $I_1 = I_2$ e as equações de Euler ficam

$$I_1\dot\omega_1 + (I_3-I_1)\omega_2\omega_3 = 0 \tag{1}$$

$$I_1\dot\omega_2 + (I_1-I_3)\omega_3\omega_1 = 0 \tag{2}$$

$$I_3\dot\omega_3 = 0 \tag{3}$$

De (3), ω_3 = constante = A tal que (1) e (2) ficam, após a divisão por I_1,

$$\dot\omega_1 + \left(\frac{I_3-I_1}{I_1}\right)A\omega_2 = 0 \tag{4}$$

$$\dot\omega_2 + \left(\frac{I_1-I_3}{I_1}\right)A\omega_1 = 0 \tag{5}$$

Diferenciando (5) em relação a t e usando (4), acha-se

$$\ddot\omega_2 + \left(\frac{I_3-I_1}{I_1}\right)^2 A^2\omega_2 = 0 \tag{6}$$

ou

$$\ddot\omega_2 + \kappa^2\omega_2 = 0 \tag{7}$$

onde

$$\kappa = \left|\frac{I_3-I_1}{I_1}\right| A \tag{8}$$

Resolvendo (7), acha-se

$$\omega_2 = B\cos\kappa t + C\,\mathrm{sen}\,\kappa t$$

Se for escolhida a escala de tempo tal que $\omega_2 = 0$, quando $t = 0$,

Então de (5) têm-se

$$\omega_2 = C\,\mathrm{sen}\,\kappa t \tag{9}$$

$$\omega_1 = C\cos\kappa t \tag{10}$$

Assim, a velocidade angular é

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3 \\ &= C\cos\kappa t\,\mathbf{e}_1 + C\,\mathrm{sen}\,\kappa t\,\mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{11}$$

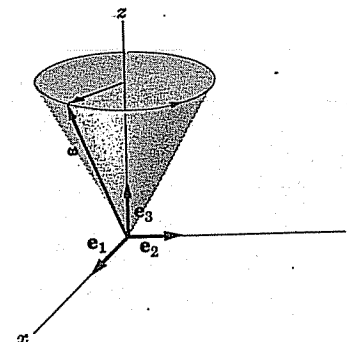



Fig. 10-13

Daí se segue que a velocidade angular é constante em magnitude e igual a $\omega = |\omega| = \sqrt{C^2 + A^2}$ e precessa em torno do eixo "3" com uma frequência

$$f = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{|I_3 - I_1|}{2\pi I_1} A \qquad (12)$$

como é indicado na fig. 10.13. Note que o vetor ω descreve um cone em torno do eixo "3". Entretanto, este movimento é relativo aos eixos principais do corpo que giram, por seu lado, no espaço, com velocidade angular ω.

10.18. Calcule a frequência de precessão do probl. 10.17, neste caso da Terra girando em torno de seu eixo.

Como a Terra gira em torno de seu eixo uma vez por dia, têm-se $\omega_3 = A = 2\pi$ rad/dia. Então, a freqüência de precessão é do probl. 10.12 e do probl. 10.17,

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{I_3 - I_1}{I_1}\right)A = \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{c}{a}\right)A = \frac{1}{2\pi}(0{,}00328)(2\pi) = 0{,}00328 \text{ rad/dia.}$$

O período de precessão real observado é de, aproximadamente, 430 dias e é explicado como sendo devido a não ser a Terra rígida.

A LINHA E O PLANO INVARIÁVEIS. A POLÓIDIA E A ERPOLÓIDIA, OS CONES DO ESPAÇO E DO CORPO

10.19. Descreva a rotação da Terra em torno de seu eixo em termos dos cones do espaço e do corpo.

Do probl. 10.17, a velocidade angular ω e o momentum angular Ω são dados, respectivamente, por

$$\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 = C(\cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2) + A\mathbf{e}_3$$
$$\Omega = I_1 \omega_1 \mathbf{e}_1 + I_1 \omega_2 \mathbf{e}_2 + I_3 \omega_3 \mathbf{e}_3 = I_1 C(\cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2) + I_3 A\mathbf{e}_3$$

Seja α o ângulo entre $\omega_3 = \omega_3 \mathbf{e}_3 = A\mathbf{e}_3$ e Ω. Então,

$$\omega_3 \cdot \Omega = |\omega_3||\Omega| \cos\alpha = A\sqrt{I_1^2 C^2 + I_3^2 A^2} \cos\alpha = I_3 A^2$$

e

$$\cos\alpha = \frac{I_3 A}{\sqrt{I_1^2 C^2 + I_3^2 A^2}} \qquad (1)$$

Igualmente, seja β o ângulo entre ω_3 e ω. Então,

$$\omega_3 \cdot \omega = |\omega_3||\omega| \cos\beta = A\sqrt{C^2 + A^2} \cos\beta = A^2$$

e

$$\cos\beta = \frac{A}{\sqrt{C^2 + A^2}} \qquad (2)$$

De (1) e (2) vê-se que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{I_1 C}{\sqrt{I_1^2 C^2 + I_3^2 A^2}}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + A^2}} \qquad (3)$$

Assim,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_1 C}{I_3 A}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{C}{A} \qquad (4)$$

ou

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{I_1}{I_3} \qquad (5)$$

Agora, para a Terra ou qualquer esferóide oblata (achatada nos pólos), têm-se $I_1 < I_3$. Segue-se que $\alpha < \beta$.

A situação pode ser descrita geometricamente pela fig. 10-14. O cone com eixo na direção Ω é fixo no espaço e é chamado de *cone do espaço.* O cone com eixo $\omega_3 = \omega_3 \mathbf{e}_3$ é considerado como fixo na Terra e é chamado de *cone do corpo.* O cone do corpo rola sôbre o cone do espaço de modo que o elemento em comum é o vetor velocidade angular ω. Agora,

$$\omega_3 \times \omega = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & A \\ I_1 C \cos \kappa t & I_1 C \operatorname{sen} \kappa t & I_3 A \end{vmatrix} = -AI_1 C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_1 + AI_1 C \cos \kappa t\, \mathbf{e}_2$$

Assim,

$$\Omega \cdot (\omega_3 \times \omega) = (I_1 C \cos \kappa t\, \mathbf{e}_1 + I_1 C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_2 + I_3 A\mathbf{e}_3) \cdot (-AI_1 C \operatorname{sen} \kappa t\, \mathbf{e}_1 + AI_1 C \cos \kappa t\, \mathbf{e}_2) = 0$$

Segue-se que, pelo probl. 1.21(*b*), Ω, ω_3 e ω pertencem a um único plano. Um observador fixo no espaço veria o vetor ω traçando o cone do espaço [veja a fig. 10.14]. Um observador fixo no corpo veria o vetor ω traçando o cone do corpo.

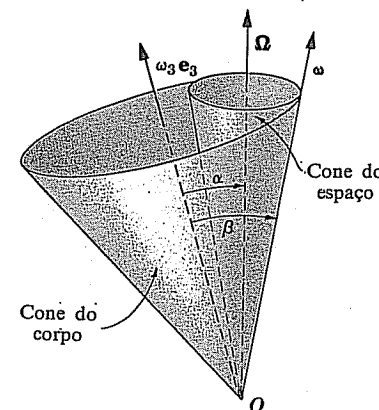



Fig. 10-14

No caso da Terra, o cone do espaço está dentro do cone do corpo devido ao fato de que $I_1 < I_3$. Para o caso de uma esferóide prolata, a situação reversa é a que se constata, i.e., $I_1 > I_3$ e o cone do espaço está dentro do corpo do cone [veja o probl. 10.121].

OS ÂNGULOS DE EULER

10.20. Mostre que, pelo uso de três figuras separadas como o sistema de coordenadas da fig. 10.4, é inclinado por sucessivas rotações dos ângulos de Euler ϕ, θ e ψ.

Refira-se às figs. 10.15, 10.16 e 10.17.

A fig. 10.15 indica a rotação de um ângulo ϕ dos eixos x e y para os eixos X e Y, respectivamente, enquanto se mantém o mesmo eixo z ou Z.

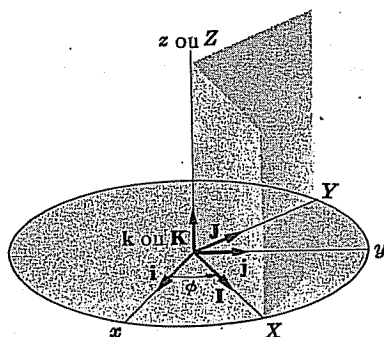



Fig. 10-15

Na fig. 10.16, é indicada uma rotação em torno do eixo X de um ângulo θ de tal maneira que os eixos Y e Z da fig. 10-15 são levados para os eixos Y' e Z', respectivamente, da fig. 10-16.

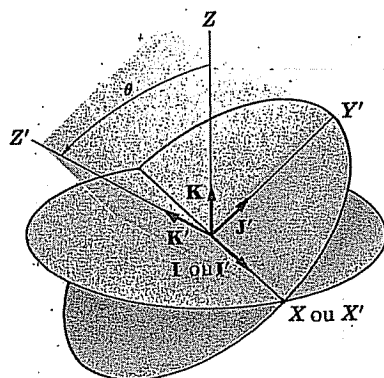
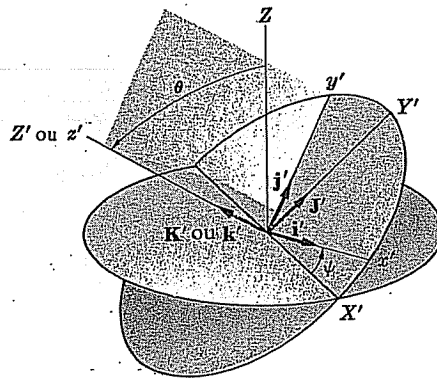



Fig. 10-16 **Fig. 10-17**

Na fig. 10-17, é indicada a rotação em torno dos eixos Z' ou z' de um ângulo ψ de modo que os eixos X' e Y' são levados para os eixos x' e y', respectivamente.

Nas figuras são indicados os vetores unitários sobre os eixos x, y e z; sobre os eixos X, Y e Z; sobre os eixos X', Y' e Z' e sobre os eixos x', y' e z' por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$; $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ e $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, respectivamente.

10.21. Ache as relações entre os vetores unitários (*a*) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ da fig. 10-15, (*b*) $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ e $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ da fig. 10-16, (*c*) $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ e $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ da fig. 10-17.

(*a*) Da fig. 10-15,

$$\mathbf{i} = (\mathbf{i}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J}$$
$$\mathbf{j} = (\mathbf{j}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J}$$
$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} = \mathbf{K}$$

(*b*) Da fig. 10-16,

$$\mathbf{I} = (\mathbf{I}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{I}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \mathbf{I}'$$
$$\mathbf{J} = (\mathbf{J}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{J}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{J}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \cos\theta\,\mathbf{J}' - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}'$$
$$\mathbf{K} = (\mathbf{K}\cdot\mathbf{I}')\mathbf{I}' + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{J}')\mathbf{J}' + (\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}')\mathbf{K}' = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}'$$

(*c*) Da fig. 10-17,

$$\mathbf{I}' = (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{I}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}'$$
$$\mathbf{J}' = (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{J}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\psi\,\mathbf{j}'$$
$$\mathbf{K}' = (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{K}'\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' = \mathbf{k}'$$

10.22. Expresse os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ em termos dos $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ e $\mathbf{k}'$.

Do probl. 10.21

$$\mathbf{i} = \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J}, \quad \mathbf{j} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{K}$$
$$\mathbf{I} = \mathbf{I}', \quad \mathbf{J} = \cos\theta\,\mathbf{J}' - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}', \quad \mathbf{K} = \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}'$$
$$\mathbf{I}' = \cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}', \quad \mathbf{J}' = \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\psi\,\mathbf{j}', \quad \mathbf{K}' = \mathbf{k}'$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= \cos\phi\,\mathbf{I} - \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{J} = \cos\phi\,\mathbf{I}' - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\,\mathbf{J}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}' \\
&= \cos\phi\cos\psi\,\mathbf{i}' - \cos\phi\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}' \\
&\qquad - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}' \\
&= (\cos\phi\cos\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\mathbf{i}' \\
&\qquad + (-\cos\phi\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j}' + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}' \\
\mathbf{j} &= \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I} + \cos\phi\,\mathbf{J} = \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{I}' + \cos\phi\cos\theta\,\mathbf{J}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}' \\
&= \operatorname{sen}\phi\cos\psi\,\mathbf{i}' - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{j}' \\
&\qquad + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \cos\phi\cos\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}' \\
&= (\operatorname{sen}\phi\cos\psi + \cos\phi\cos\theta\operatorname{sen}\psi)\mathbf{i}' \\
&\qquad + (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j}' - \cos\phi\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{k}' \\
\mathbf{k} &= \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J}' + \cos\theta\,\mathbf{K}' = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{i}' + \operatorname{sen}\theta\cos\psi\,\mathbf{j}' + \cos\theta\,\mathbf{k}'
\end{aligned}$$

10.23. Ache as equações (25) da introdução deste capítulo.

$$\omega = \omega_\phi \mathbf{k} + \omega_\theta \mathbf{I}' + \omega\psi \mathbf{K}' = \dot\phi \mathbf{k} + \dot\theta \mathbf{I}' + \dot\psi \mathbf{K}'$$

$$= \dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi\, \mathbf{i}' + \dot\phi \operatorname{sen}\theta \cos\psi\, \mathbf{j}' + \dot\phi \cos\theta\, \mathbf{k}'$$

$$+ \dot\theta \cos\psi\, \mathbf{i}' - \dot\theta \operatorname{sen}\psi\, \mathbf{j}' + \dot\psi \mathbf{k}'$$

$$= (\dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta \cos\psi)\mathbf{i}'$$

$$+ (\dot\phi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi)\mathbf{j}' + (\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)\mathbf{k}'$$

Então, $\omega = \omega_{x'} \mathbf{i}' + \omega_{y'} \mathbf{j}' + \omega_{z'} \mathbf{k}'$,

$$\omega_{x'} = \omega_1 = \dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta \cos\psi$$

$$\omega_{y'} = \omega_2 = \dot\phi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi$$

$$\omega_{z'} = \omega_3 = \dot\phi \cos\theta + \dot\psi$$

10.24. (*a*) Escreva a energia cinética de rotação de um corpo rígido em relação aos eixos principais, em termos dos ângulos de Euler. (*b*) Como fica o resultado em (*a*) se $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$?

(*a*) Usando o probl. 10.23, a energia cinética é

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \dot\theta \cos\psi)^2$$

$$+ \tfrac{1}{2}I_2(\dot\phi \operatorname{sen}\theta \cos\psi - \dot\theta \operatorname{sen}\psi)^2 + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2$$

(*b*) Se $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$, o resultado pode ser escrito como

$$T = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi \cos\theta + \dot\psi)^2$$

O MOVIMENTO DE PIÕES E GIROSCÓPIOS

10.25. Ache as equações para o movimento de um pião girando, tendo o ponto O fixo [veja a fig. 10-18].

Faça-se xyz representar um conjunto de eixos inerciais ou fixos, tendo origem em O. Faça-se $x'y'z'$ representar os eixos principais do pião, tendo a mesma origem. Escolha a orientação do plano $x'y'$ tal que Oz, Oz' e Oy' sejam co-planares. Então, o eixo x' está no plano xy. A linha ON no plano $x'y'$, fazendo um ângulo com o eixo x', é suposta como sendo fixa ao pião.

A velocidade angular correspondente à rotação dos eixos $x'y'z'$ em relação aos eixos xyz é

$$\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3. \tag{1}$$

Fig. 10-18

Para obter o momentum angular, deve-se usar o fato de que, em adição à componente devida à rotação do sistema $x'y'z'$, há também a componente $\mathbf{s} = s\mathbf{e}_3 = \dot\psi \mathbf{e}_3$, pois o pião está girando em torno do eixo z'. Então, o momentum angular é

$$\Omega = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3(\omega_3 + s)\mathbf{e}_3. \tag{2}$$

Agora, se os subscritos f e b representarem o sistema fixo e o sistema do corpo, respectivamente, tem-se, pelo probl. 6.1,

$$\left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_b + \omega \times \Omega \tag{3}$$

Usando-se (1) e (2) em (3), acha-se

$$\left.\frac{d\Omega}{dt}\right|_f = \{I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 s\}\mathbf{e}_1$$

$$+ \{I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 s\}\mathbf{e}_2$$

$$+ \{I_3(\dot\omega_3 + \dot s) + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2\}\mathbf{e}_3 \tag{4}$$

O torque total em torno de O é

$$\Lambda = (l\mathbf{e}_3) \times (m\mathbf{g}) = (l\mathbf{e}_3) \times (-mg\mathbf{k}) \tag{5}$$

Como

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 = \cos(\pi/2 - \theta)\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3$$

$$= \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{e}_2 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3$$

O torque é

$$\Lambda = -mgl(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{k}) = mgl \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{e}_1 \tag{6}$$

Então, usando-se $\Lambda = \left.\dfrac{d\Omega}{dt}\right|_f$ com $I_1 = I_2$, acha-se, de (4) e (6),

$$\left.\begin{aligned} I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_1)\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 s &= mgl \operatorname{sen}\theta \\ I_1\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 s &= 0 \\ I_3(\dot\omega_3 + \dot s) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

10.26. Expresse as equações (7) do probl. 10.25, em termos dos ângulos de Euler θ e ϕ da fig. 10-18.

As componentes ω_1, ω_2, ω_3 podem ser obtidas do probl. 10.23, fazendo-se $\psi = 0$ formalmente. Acha-se

$$\omega_1 = \dot\theta, \quad \omega_2 = \dot\phi \operatorname{sen}\theta, \quad \omega_3 = \dot\phi\cos\theta \tag{1}$$

Então, as equações (7) do probl. 10.25 ficam

$$\left.\begin{aligned} I_1\ddot\theta + (I_3 - I_1)\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3\dot\phi s \operatorname{sen}\theta &= mgl \operatorname{sen}\theta \\ I_1(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + \dot\phi\dot\theta\cos\theta) + (I_1 - I_3)\dot\theta\dot\phi\cos\theta - I_3\dot\theta s &= 0 \\ I_3(\ddot\phi\cos\theta - \dot\phi\dot\theta \operatorname{sen}\theta + \dot s) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

As quantidades $\dot\phi$, $\dot\theta$ e s são, geralmente, conhecidas como as magnitudes da *velocidade angular de precessão*, de *nutação* e de *rotação*, respectivamente.

10.27. Prove que as equações (2) do probl. 10.26 podem ser escritas como

(a) $I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3 A\dot\phi \operatorname{sen}\theta = mgl \operatorname{sen}\theta$

(b) $I_1(\ddot\phi \operatorname{sen}\theta + 2\dot\phi\dot\theta\cos\theta) - I_3 A\dot\theta = 0$

onde A é uma constante.

Da terceira equação em (7) do probl. 10.25,

$$\omega_3 + s = A \quad \text{ou} \quad s = A - \omega_3. \tag{1}$$

Então, a substituição na primeira e na segunda equação de (7) leva a

$$I_1\dot\omega_1 - I_1\omega_2\omega_3 + I_3\omega_2 A = mgl \operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

$$I_1\dot\omega_2 + I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_1 A = 0 \tag{3}$$

Usando-se os resultados (1) do probl. 10.26, acham-se as equações (2) e (3) que se reduzem às equações pedidas.

10.28. (a) Ache a condição para uma precessão uniforme de um pião.
(b) Mostre que duas frequências precessionais são possíveis.

Como θ é uma constante, $\dot\theta = 0$, tem-se, pelo probl. 10.27(a),

$$(I_1\dot\phi^2\cos\theta - I_3 A\dot\phi + mgl)\operatorname{sen}\theta = 0$$

ou

$$I_1\dot\phi^2\cos\theta - I_3 A\dot\phi + mgl = 0$$

de onde

$$\dot\phi = \frac{I_3 A \pm \sqrt{I_3^2 A^2 - 4mglI_1\cos\theta}}{2I_1\cos\theta} \tag{1}$$

Assim, há duas freqüências desde que

$$I_3^2 A^2 > 4mglI_1\cos\theta \tag{2}$$

Se $I_3^2 A^2 = 4mglI_1\cos\theta$, é possível somente uma freqüência.

Se A é muito grande, por exemplo, com a rotação do pião muito alta, então há duas freqüências, uma grande e outra pequena, dadas por

$$I_3 A/(I_1\cos\theta), \quad mgl/I_3 A \tag{3}$$

10.29. Prove que

(a) $\frac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \frac{1}{2}I_3 A^2 + mgl\cos\theta = \text{constante} = E$

(b) $I_1\dot\phi \operatorname{sen}^2\theta + I_3 A\cos\theta = \text{constante} = K$

e dê uma interpretação física a cada caso.

(a) Multiplique as equações (7) do probl. 10.25 por ω_1, ω_2 e $\omega_3 + s$, respectivamente, e adicione-as para obter

$$I_1(\omega_1\dot\omega_1 + \omega_2\dot\omega_2) + I_3(\omega_3 + s)(\dot\omega_3 + \dot s) = mgl \operatorname{sen}\theta\,\dot\theta$$

que se pode escrever como

$$\frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\omega_3 + s)^2\} = \frac{d}{dt}(-mgl\cos\theta)$$

Integrando e usando $\omega_3 + s = A$, assim como os resultados $\omega_1 = \dot\theta$ e $\omega_2 = \dot\phi \operatorname{sen}\theta$, acha-se

$$\tfrac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \tfrac{1}{2}I_3 A^2 + mgl\cos\theta = E \tag{1}$$

onde E é constante. O resultado é equivalente ao princípio de conservação da energia, pois a energia cinética é

$$T = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \tfrac{1}{2}I_3 A^2 \tag{2}$$

enquanto a energia potencial é

$$V = mgl\cos\theta \tag{3}$$

e $T + V = E$ é a energia total.

(*b*) Multiplicando o resultado do probl. 10.27(*b*) por sen θ,

$$I_1 \ddot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + 2I_1 \dot{\phi}\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - I_3 A\dot{\theta} \operatorname{sen}\theta = 0$$

que pode ser escrito

$$\frac{d}{dt}(I_1 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 A \cos\theta) = 0$$

Integrando,

$$I_1 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 A \cos\theta = \text{constante} = K \tag{4}$$

Para interpretar éste resultado fisicamente, note-se que a componente vertical do momentum angular é $I_1 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 A \cos\theta$ [veja o probl. 10.123], e isto deve ser constante, pois o torque devido ao peso do pião tem uma componente nula na direção vertical.

10.30. Seja $u = \cos\theta$. Prove que:

(*a*) $$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u)$$

onde

$$\alpha = 2(E - \tfrac{1}{2}I_3 A^2)/I_1, \quad \beta = 2mgl/I_1, \quad \gamma = K/I_1, \quad \delta = I_3 A/I_1;$$

(*b*) $$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + \text{constante}$$

(*a*) Do probl. 10.29,

$$\tfrac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + \tfrac{1}{2}I_3 A^2 + mgl\cos\theta = E \tag{1}$$

$$I_1 \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 A \cos\theta = K \tag{2}$$

De (2)

$$\dot{\phi} = \frac{K - I_3 A \cos\theta}{I_1 \operatorname{sen}^2\theta} \tag{3}$$

Substituindo esta em (1),

$$\tfrac{1}{2}I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(K - I_3 A\cos\theta)^2}{2I_1 \operatorname{sen}^2\theta} + \tfrac{1}{2}I_3 A^2 + mgl\cos\theta = E$$

Fazendo $u = \cos\theta$ e, assim, $\dot{u} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$ e $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - u^2$, fica

$$\tfrac{1}{2}I_1 \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(K - I_3 Au)^2}{2I_1(1-u^2)} + mglu = E - \tfrac{1}{2}I_3 A^2$$

Portanto,

$$\dot{u}^2 + \left(\frac{K - I_3 Au}{I_1}\right)^2 + \frac{2mglu(1-u^2)}{I_1} = \frac{2(1-u^2)}{I_1}(E - \tfrac{1}{2}I_3 A^2)$$

o que pode ser escrito como

$$\dot{u}^2 = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = f(u) \tag{4}$$

onde

$$\alpha = (2E - I_3 A^2)/I_1, \quad \beta = 2mgl/I_1, \quad \gamma = K/I_1, \quad \delta = I_3 A/I_1 \tag{5}$$

Note que com esta notação (3) pode ser escrita como

$$\dot{\phi} = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2} \tag{6}$$

(*b*) Do resultado de (*a*) tem-se, como $\dot{u} > 0$

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \sqrt{f(u)} \quad \text{ou} \quad dt = \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

Integrando,

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}} + c \tag{7}$$

A integral pode ser calculada em termos de *funções elípticas*, que são periódicas.

10.31. (*a*) Prove que $\dot{\theta} = 0$ para valores de u tais que

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0.$$

(*b*) Prove que a equação em (*a*) tem três raízes reais u_1, u_2, u_3, mas que, em geral, nem todos os ângulos correspondentes a elas são reais.

(*a*) Do probl. 10.30,

$$\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 \tag{1}$$

Como $\dot{u} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot{\theta}$, segue-se que $\dot{\theta} = 0$ onde $\dot{u} = 0$ ou $f(u) = 0$. Assim, $\dot{\theta} = 0$ nas raízes da equação

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = 0 \tag{2}$$

(*b*) A equação (1) pode ser escrita como

$$f(u) = \beta u^3 - (\delta^2 + \alpha)u^2 + (2\gamma\delta - \beta)u + \alpha - \gamma^2 \tag{3}$$

Como $\beta > 0$, segue-se que

$$f(\infty) = \infty, \quad f(-\infty) = -\infty$$
$$f(1) = -(\gamma - \delta)^2, \quad f(-1) = -(\gamma + \delta)^2$$

Assim, há uma mudança de sinal de − para +, conforme u vai de 1 para ∞ e, conseqüentemente, deve haver uma raiz, por exemplo u_3, entre 1 e ∞, como é indicado na fig. 10.19.

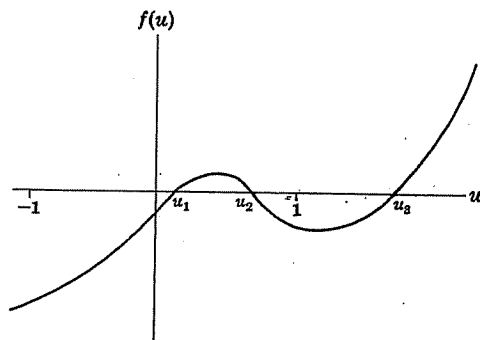



Fig. 10-19

Agora, sabe-se que, para haver o movimento do pião, deve-se ter $f(u) = \dot{u}^2 \geqq 0$. Também, como $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$, deve-se ter $0 \leqq u \leqq 1$. Segue-se daí que deve haver duas raízes u_1 e u_2 entre 0 e 1, como é indicado na figura.

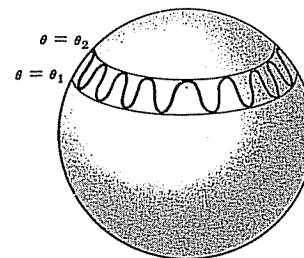
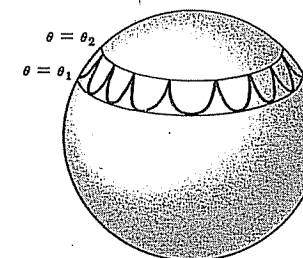
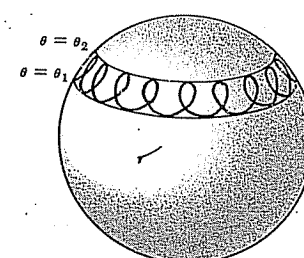
Assim, em geral, há dois ângulos θ_1 e θ_2 correspondentes tais que $\cos\theta_1 = u_1$, $\cos\theta_2 = u_2$. Em casos especiais, pode acontecer que $u_1 = u_2$ ou $u_2 = u_3 = 1$.

10.32. Dê uma interpretação física aos resultados achados no probl. 10.31.

O fato de que há duas raízes u_1 e u_2 correspondentes a θ_1 e θ_2, respectivamente, mostra que o movimento do pião é tal que seu eixo sempre faz um ângulo θ com a vertical que fica entre θ_1 e θ_2. Este movimento, que é um balanço do eixo para cima e para baixo entre os limites θ_1 e θ_2, é chamado *nutação* e ocorre ao mesmo tempo que o *movimento precessional* do eixo do pião em torno da vertical e a rotação do pião em torno de seu eixo. Como o movimento pode ser expresso em termos de funções elípticas [veja o probl. 10.104], pode-se mostrar que ele é periódico.

Em geral, a ponta do eixo do pião descreverá um dos vários tipos de curva, tais como os indicados nas figs. 10.20, 10.21 e 10.22. O tipo de curva dependerá da raiz da equação [veja equação (6) do probl. 10.30]

$$\dot{\phi} = \frac{\gamma - \delta u}{1 - u^2} = 0 \qquad (1)$$

Se esta raiz, dada por γ/δ, for maior que u_2, ocorre a curva da fig. 10.20. Se for igual a u_2, ocorre a curva da fig. 10-21. Se estiver entre u_1 e u_2, ocorre a curva da fig. 10-22. Outros casos podem ocorrer, se a raiz é igual a u_1 ou menor que u_1 [veja os probls. 10.124].

$\gamma/\delta > u_2$ **Fig. 10-20** $\gamma/\delta = u_2$ **Fig. 10-21** $u_1 < \gamma/\delta < u_2$ **Fig. 10-22**

Ao lado do movimento livre que é composto de nutação e precessão, há vários casos especiais que podem ocorrer. Um destes é a precessão estacionária sem nutação (veja o probl. 10.28). Neste caso, $u_1 = u_2$ tal que $\theta_1 = \theta_2$ ou θ = constante. Um outro caso é o do "pião que dorme", que ocorre quando $u_2 = u_3 = 1$ e o eixo de rotação do pião fica sempre na vertical [veja o probl. 10.36].

PROBLEMAS DIVERSOS

10.33. Se T é a energia cinética total de rotação de um corpo rígido com um ponto fixo, prove que $dT/dt = \omega \cdot \Lambda$, onde todas estas quantidades se referem aos eixos principais do corpo.

Multiplicando ambos os membros das equações de Euler (3) do probl. 10.16 por $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, respectivamente, e somando obtém-se

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = \omega_1\Lambda_1 + \omega_2\Lambda_2 + \omega_3\Lambda_3 \qquad (1)$$

Mas

$$I_1\omega_1\dot{\omega}_1 + I_2\omega_2\dot{\omega}_2 + I_3\omega_3\dot{\omega}_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{dT}{dt} \qquad (2)$$

e

$$\omega_1\Lambda_1 + \omega_2\Lambda_2 + \omega_3\Lambda_3 = (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3)\cdot(\Lambda_1\mathbf{e}_1 + \Lambda_2\mathbf{e}_2 + \Lambda_3\mathbf{e}_3) = \omega\cdot\Lambda \qquad (3)$$

Assim (1) fica

$$dT/dt = \omega\cdot\Lambda \qquad (4)$$

10.34. (*a*) Prove que, se não houver forças sobre um corpo rígido com um ponto fixo, então a energia cinética total de rotação é constante. (*b*) Assim, prove que $\omega\cdot\Omega = 2T$ = constante.

(a) Como não há força, $\Lambda = \mathbf{0}$. Então, pelo probl. 10.33, $dT/dt = 0$ ou $T =$ constante.

(b) Como $\Omega = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$ e $\omega = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$,

$$\omega\cdot\Omega = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2T = \text{constante.}$$

10.35. Ache a frequência de precessão do probl. 10.17 em termos da energia cinética e momentum angular do corpo rígido.

A energia cinética é

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_1\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}(I_1C^2 + I_3A^2)$$

tal que

$$I_1C^2 + I_3A^2 = 2T \qquad (1)$$

O momentum angular é

$$\begin{aligned}\Omega &= I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3 = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_1\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3\\ &= I_1C(\cos\kappa t\,\mathbf{e}_1 + \text{sen}\,\kappa t\,\mathbf{e}_2) + I_3A\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

tal que $\Omega = |\Omega| = \sqrt{I_1^2C2 + I_3^2A^2}$ ou

$$I_1^2C^2 + I_3^2A^2 = \Omega^2 \qquad (2)$$

Resolvendo (1) e (2) simultaneamente, acha-se

$$C^2 = \frac{2TI_3 - \Omega^2}{I_1(I_3 - I_1)}, \qquad A^2 = \frac{\Omega^2 - 2TI_1}{I_3(I_3 - I_1)} \qquad (3)$$

Então, do probl. 10.17, equação (12), a freqüência de precessão é

$$f = \frac{1}{2\pi I_1}\sqrt{\frac{|(\Omega^2 - 2TI_1)(I_3 - I_1)|}{I_3}} \qquad (4)$$

10.36. Ache a condição para que um pião "durma".

Para que um pião "durma", deve-se ter $\theta = 0$ e $\dot\theta = 0$, pois o eixo deve permanecer na vertical e não deve ocorrer nutação. Então, do probl. 10.29,

$$I_3A = K, \qquad I_3A^2 = 2(E - mgl)$$

Também, do probl. 10.30, tem-se $\alpha = 2mgl/I_1$, $\beta = 2mgl/I_1$, $\gamma = I_3A/I_1$, $\delta = I_3A/I_1$. Assim, $\alpha = \beta$ e $\gamma = \delta$ e, portanto,

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (\gamma - \delta u)^2 = \alpha(1-u)(1-u^2) - \gamma^2(1-u)^2 = (1-u)^2[\alpha(1+u) - \gamma^2]$$

Segue-se que $f(u) = 0$ tem uma raiz dupla em $u = 1$, enquanto a terceira raiz é dada por

$$\frac{\gamma^2}{\alpha} - 1 = \frac{I_3^2A^2}{2mglI_1} - 1$$

Então, o pião "dormirá" se esta raiz for maior ou igual a 1, tal que

$$A^2 \geqq 4mglI_1/I_3^2$$

Naturalmente, mesmo que esta condição possa ser aplicada no início, na prática a energia diminuirá devido à fricção no suporte, tal que, após algum tempo, $A^2 < 4mglI_1/I_3^2$. Em tal caso, será introduzida a precessão com nutação. Perdas posteriores de energia causarão, por último, a queda do pião.

10.37. Ache o torque necessário para girar uma placa retangular de lados a e b [veja a fig. 10-23] em torno da diagonal, com uma velocidade angular constante ω.

Pelo probl. 10.9, os momentos principais de inércia da placa no centro O são dados por

$$I_1 = \tfrac{1}{12}Ma^2, \quad I_2 = \tfrac{1}{12}Mb^2, \quad I_3 = \tfrac{1}{12}M(a^2 + b^2) \qquad (1)$$

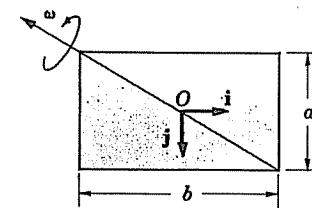



Fig. 10-23

Temos que

$$\begin{aligned}\omega &= (\omega\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} + (\omega\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}\\ &= -\frac{\omega a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} - \frac{\omega b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j} \qquad (2)\end{aligned}$$

Assim,

$$\omega_1 = \frac{-\omega a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \omega_2 = \frac{-\omega b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \omega_3 = 0 \qquad (3)$$

Substituindo-se (1) e (3) nas equações de Euler

$$\begin{aligned}I_1\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= \Lambda_1\\ I_2\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= \Lambda_2\\ I_3\dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= \Lambda_3\end{aligned}$$

achamos $\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_2 = 0$, $\Lambda_3 = \dfrac{M(b^2 - a^2)ab\omega^2}{12(a^2 + b^2)}$. Assim, o torque pedido em torno de O é

$$\Lambda = \frac{M(b^2 - a^2)ab\omega^2}{12(a^2 + b^2)}\mathbf{k} \qquad (4)$$

Note que, se a placa retangular for quadrada, i.e., se $a = b$, então $\Lambda = \mathbf{0}$.

Problemas Propostos

MOVIMENTO LIVRE DE CORPOS RÍGIDOS NO ESPAÇO

10.38. Ache o número de graus de liberdade de (*a*) uma esfera livre de rolar sobre um plano, (*b*) uma elipsóide livre de girar em torno de um ponto fixo, (*c*) um avião movendo-se no espaço.
Resp. (*a*) 3, (*b*) 3, (*c*) 6.

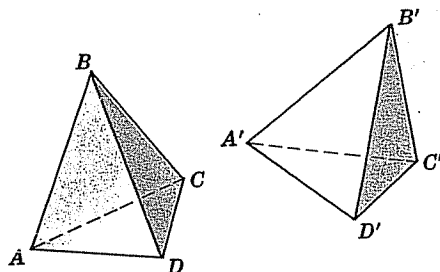



Fig. 10-24

10.39. Na fig. 10-24, um deslocamento de um tetraedro no espaço é indicado. Mostre que o deslocamento pode ser conseguido por uma translação, mais uma rotação em torno de eixos apropriados, assim ilustrando o teorema de Chasle [ver a introdução do cap. 9] para o espaço.

10.40. Dê uma ilustração semelhante à do probl. 10.39 envolvendo um corpo rígido, cujas superfícies não sejam superfícies planas.

10.41. Ache o resultado do probl. 10.2, sem o uso do probl. 6.1.

MOMENTUM ANGULAR. ENERGIA CINÉTICA. MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

10.42. Um corpo rígido consiste em 3 partículas de massas 2, 1 e 4, localizadas em $(1, -1, 1)$, $(2, 0, 2)$ e $(-1, 1, 0)$, respectivamente. Ache o momentum angular do corpo, se ele estiver girando em torno da origem, com uma velocidade angular de $\omega = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
Resp. $-6\mathbf{j} + 42\mathbf{k}$

10.43. Determine (*a*) os momentos de inércia em torno dos eixos *x*, *y* e *z* e (*b*) os produtos de inércia para o corpo rígido do probl. 10.42.

Resp. (*a*) $I_{xx}=12$, $I_{yy}=16$, $I_{zz}=16$; (*b*) $I_{xy}=6$, $I_{yz}=2$, $I_{xz}=-6$

10.44. Qual é a energia cinética de rotação para o sistema do probl. 10.42?
Resp. 180

10.45. Ache (*a*) os momentos de inércia e (*b*) os produtos de inércia de uma placa retangular uniforme *ABCD* de lados $AB = a$ e $AD = b$, tomados em torno dos eixos *AB*, *AD* e a linha perpendicular à placa *B*.
Resp.: (*a*) $I_{xx} = \frac{1}{3}Mb^2$, $I_{yy} = \frac{1}{3}Ma^2$, $I_{zz} = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
(*b*) $I_{xy} = -\frac{1}{4}Mab$, $I_{yz} = 0$, $I_{xz} = 0$

chame os eixos *AB* e *AD* de *x* e *y*, respectivamente.

10.46. Ache (*a*) os momentos de inércia e (*b*) os produtos de inércia, do cubo de lado *a*, tomados em torno dos eixos *x*, *y* e *z* que coincidem com três arestas do cubo que se interceptam.
Resp.: (*a*) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}Ma^2$, (*b*) $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = -\frac{1}{4}Ma^2$

10.47. Ache (*a*) o momentum angular e (*b*) a energia cinética de rotação do cubo do probl. 10.46 em torno do ponto de intersecção *O* das três arestas, se o cubo tiver uma velocidade angular $\omega = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ em torno de *O*.
Resp.: (*a*) $\frac{1}{12}Ma^2(10\mathbf{i} + 43\mathbf{j} - 45\mathbf{k})$, (*b*) $185Ma^2/12$

10.48. Ache (*a*) os momentos de inércia e (*b*) os produtos de inércia de uma esfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ no primeiro octante, i.e., na região $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.
Resp.: (*a*) $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}Ma^2$, (*b*) $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = -2Ma^2/5\pi$

MOMENTOS PRINCIPAIS DE INÉRCIA. EIXOS PRINCIPAIS. ELIPSÓIDE DE INÉRCIA

10.49. Prove que os momentos principais de inércia para um sistema consistindo em duas partículas de massas m_1 e m_2, conectadas por uma haste rígida, sem massa e de comprimento *l*, são $I_1 = I_2 = m_1 m_2 l^2/(m_1 + m_2)$, $I_3 = 0$.

10.50. Ache (*a*) os momentos principais de inércia e (*b*) as direções dos eixos principais para o sistema do probl. 10.42.
Resp.: (*a*) $I_1 = 18$, $I_2 = 13 - \sqrt{73}$, $I_3 = 13 + \sqrt{73}$
(*b*) $\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\frac{1}{6}(I + \sqrt{73})\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\frac{1}{6}(1 - \sqrt{73})\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

10.51. Determine (*a*) os momentos principais de inércia e (*b*) as direções dos eixos principais para o triângulo retângulo *ABC* da fig. 10-25 em torno do ponto *C*.

10.52. Ache os momentos principais de inércia no centro do paralelograma de lados *a* e *b* e ângulo agudo α.

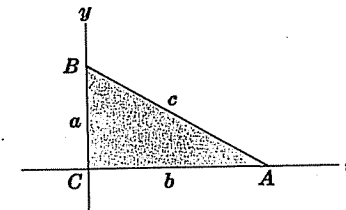



Fig. 10-25

10.53. Ache (*a*) os momentos principais de inércia e (*b*) as direções dos eixos principais para o cubo do probl. 10.46.
Resp.: (*a*) $I_1 = I_2 = \frac{11}{12}Ma^2$, $I_3 = \frac{1}{6}Ma^2$
(*b*) O eixo associado a I_3 está na direção da diagonal que passa pela origem. Os eixos associados a I_1 e I_2 têm direções quaisquer, porém são mutuamente perpendiculares e pertencem ao plano perpendicular a esta diagonal.

10.54. Ache os momentos principais de inércia de um cilindro uniforme de raio a e altura h.
Resp.: $I_1 = I_2 = \frac{1}{12}M(3a^2 + h^2)$, $I_3 = \frac{1}{2}Ma^2$

10.55. Obtenha os momentos principais de inércia e as direções dos eixos principais para o retângulo de lados a e b, usando o probl. 10.45 e as equações (11), da introdução deste capítulo. Compare com o probl. 10.9.

10.56. Ache os comprimentos dos eixos da elipsóide de inércia correspondente ao probl. 10.55.
Resp.: $4\sqrt{3/Ma^2}$, $4\sqrt{3/Mb^2}$, $4\sqrt{3/M(a^2+b^2)}$

10.57. Prove que a elipsóide de inércia para um tetraedro regular é uma esfera e determine o seu raio.
Resp.: $4\sqrt{3/11Ma^2}$, $4\sqrt{3/11Ma^2}$, $2\sqrt{6/Ma^2}$

10.59. Se I_1, I_2 e I_3 são os momentos principais de inércia, prove que

$$I_1 \leqq I_2 + I_3, \quad I_2 \leqq I_1 + I_3, \quad I_3 \leqq I_1 + I_2$$

10.60. Sob que condições alguns ou todos os sinais de igualdade ocorrem no probl. 10.59?

10.61. Prove que, se um corpo rígido é um sólido de revolução em torno da linha L, então L é um eixo principal correspondente a qualquer parte de L.

10.62. Considere que um corpo rígido é simétrico em relação a um plano P. Prove que, se L é uma linha perpendicular a P no ponto O, então L é um eixo principal correspondente ao ponto O.

AS EQUAÇÕES DE EULER DO MOVIMENTO

10.63. Um corpo rígido, tendo um ponto O fixo e nenhum torque externo em torno de O, tem dois eixos principais de inércia iguais. Prove que ele deve girar com uma velocidade angular constante.

10.64. Escreva as equações de Euler para o caso do movimento em um plano de um corpo rígido e discuta sua significação física.

10.65. Resolva o problema de um pêndulo composto, usando as equações de Euler.

10.66. Descreva como as equações de Euler podem ser usadas para discutir o movimento de um cilindro sólido, rolando livremente por um plano inclinado.

10.67. Escreva as equações de Euler, no caso de que os eixos não sejam os eixos principais.

MOVIMENTO DE ROTAÇÃO EM TORNO DE UM PONTO. LINHA E PLANO INVARIÁVEIS. POLÓIDIA, ERPOLÓIDIA, CONES DO ESPAÇO E DO CORPO

10.68. Se dois momentos principais de inércia, correspondentes ao ponto fixo em torno do qual um corpo rígido gira, são iguais, prove que (*a*) a elipsóide de Poinsot é uma elipsóide de revolução, (*b*) a polóidia é um círculo e (*c*) a erpolóidia é um círculo.

10.69. Discuta (*a*) a linha e o plano invariáveis, (*b*) a polóidia e a erpolóidia (*c*) os cones do espaço e do corpo para o caso de um corpo rígido que se move paralelamente a um dado plano, i.e., movimento de um corpo rígido em um plano.

10.70. (*a*) Como você definirá o eixo instantâneo de rotação para o movimento espacial de um corpo rígido? (*b*) Qual é a relação entre o eixo instantâneo de rotação e os cones do espaço e do corpo?

10.71. Prove que, relativamente ao seu centro de massa, o eixo, em torno do qual Terra dá uma volta por dia, dará uma volta em torno de um eixo inclinado de 23,5° em 25.780 anos.

OS ÂNGULOS DE EULER

10.72. Usando a notação do probl. 10.20, ache (*a*) **I**, **J** e **K** em termos de **i**, **j** e **k**; (*b*) **I'**, **J'** e **K'** em termos de **I**, **J** e **K**; (*c*) **i'**, **j'** e **k'** em termos de **I'**, **J'** e **K'**.

Resp.: (*a*) $\mathbf{I} = \cos\phi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{j}$, $\mathbf{J} = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{i} + \cos\phi\,\mathbf{j}$, $\mathbf{K} = \mathbf{k}$
(*b*) $\mathbf{I'} = \mathbf{I}$, $\mathbf{J'} = \cos\theta\,\mathbf{J} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{K}$, $\mathbf{K'} = -\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{J} + \cos\theta\,\mathbf{K}$
(*c*) $\mathbf{i'} = \cos\psi\,\mathbf{I'} + \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{J'}$, $\mathbf{J'} = -\operatorname{sen}\psi\,\mathbf{I'} + \cos\psi\,\mathbf{J'}$, $\mathbf{k'} = \mathbf{K'}$

10.73. Prove os resultados

$$\omega_x = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$$

$$\omega_y = \dot{\theta}\operatorname{sen}\phi - \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\cos\phi$$

$$\omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta.$$

10.74. Se $I_1 = I_2 = I_3$, prove que a energia cinética de rotação de um corpo rígido referida aos eixos principais é $T = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta)$.

MOVIMENTO DE PIÕES E GIROSCÓPIOS

10.75. Um pião tem um raio de giração, em relação a seu eixo, de 6 cm e está girando em torno deste eixo. O ponto de rotação é fixo e o centro de gravidade está no eixo, a uma distância de 3 cm do ponto fixo. Se for observado que o pião precessa em torno da vertical com 20 rotações por minuto, ache o módulo da velocidade angular do pião em torno de seu eixo.
Resp. 3,10 rev/s ou 19,5 rad/s.

10.76. Um cone sólido e uniforme, com uma base circular, tem um raio a e altura h e gira de modo que seu vértice está fixo e seu eixo está inclinado de um ângulo constante com a vertical. Se o eixo precessa em torno da vertical, com período P, determine a velocidade angular em módulo em torno de seu eixo.

10.77. Faça o probl. 10.76, considerando que ao cone é justaposto um hemisfério sólido e uniforme de raio a e da mesma densidade.

10.78. Explique fisicamente por que a rotação do eixo do giroscópio da fig. 10-6 e o da fig. 10-7 devem manter suas direções.

10.79. Explique como um giroscópio deve ser usado para que um navio, um avião, um submarino ou um míssil siga um movimento de curso especificado.

PROBLEMAS DIVERSOS

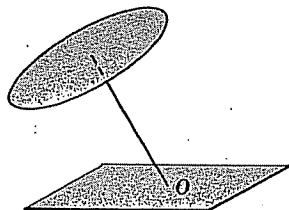
10.80. Um cubo sólido e uniforme de aresta a e massa M tem 3 de suas arestas pertencentes aos eixos x, y e z positivos de um sistema de coordenadas com vértice na origem O. Se ele gira em torno do eixo z, com uma velocidade angular ω constante, ache o momentum angular.
Resp.: $-\frac{1}{12}Ma^2\omega(3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$

10.81. Ache o momento de inércia de um cone sólido e uniforme de raio a, altura h e massa M, em torno (*a*) da base, (*b*) do vértice.
Resp. (*a*) $\frac{1}{10}Ma^2$, (*b*) $\frac{3}{10}M(2h^2 + a^2)$

10.82. Ache os momentos principais de inércia no centro de uma placa elíptica e uniforme, tendo um semi-eixo maior a e um semi-eixo menor b.
Resp.: $I_1 = \frac{1}{4}Mb^2$, $I_2 = \frac{1}{4}Ma^2$, $I_3 = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2)$

10.83. Um pião sólido tem a forma de um disco circular de raio a e massa M, com uma haste fina de massa m e comprimento l presa ao seu centro [veja a fig. 10-26]. Ache a velocidade angular com a qual o pião deve girar, para que ele "durma". Admita que o ponto da base O está fixo.

Fig. 10-26

10.84. Faça o probl. 10.83 para um cone de raio a, altura h e massa M.

10.85. Faça o probl. 10.83 para um cone de raio a, altura h, massa M e com um hemisfério justaposto de raio a e massa m.

10.86. Uma moeda de raio a é posta a girar em torno de um eixo vertical, com velocidade angular ω (veja a fig. 10.27). Prove que o movimento é estável, se $\omega^2 > 4g/a$.

Fig. 10-27

10.87. Considere que a moeda do probl. 10.86 esteja girando, com uma velocidade angular s, em torno de um diâmetro que está inclinado em relação à vertical de um ângulo α e que está fixa no ponto O. Admita que não existe nutação, ache a velocidade angular com a qual a moeda precessa em torno da vertical.

10.88. Discuta como o giroscópio pode ser usado, para estabilizar um navio em um mar tempestuoso.

10.89. O vértice de um cone sólido e uniforme de raio a, altura h e massa M está fixo a um ponto de um plano horizontal. Prove que, se o cone rola no plano, com uma velocidade angular ω, em torno de um eixo vertical perpendicular ao plano por O, então a energia cinética de rotação é $\dfrac{3Mh^2(a^2 + 6h^2)\omega^2}{40(a^2 + h^2)}$.

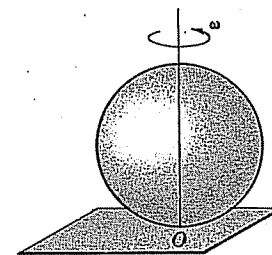
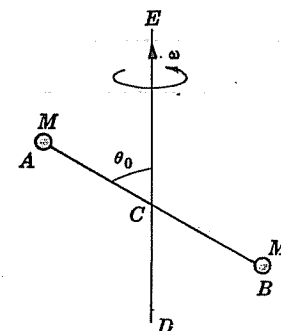
10.90. Explique como os eixos principais de um corpo rígido podem ser achados, se a direção de um deles for conhecida.

10.91. Um cone sólido e uniforme tem o raio de sua base igual a duas vezes a sua altura. Prove que a elipsóide de inércia correspondente ao seu vértice é uma esfera.

10.92. Explique como um giroscópio pode ser usado como um compasso, geralmente chamado de *girocompasso*.

10.93. Um haltere consiste em duas massas iguais M, ligadas a uma haste ABC de comprimento l e massa negligenciável [veja a fig. 10-28]. O sistema gira em torno de um eixo vertical DCE, com uma velocidade angular ω tal que a haste faz um ângulo constante θ_0 com a vertical. Prove que o vetor momentum angular Ω do sistema descreve um cone de ângulo $\pi/2 - \theta_0$ em torno de ω e tem uma magnitude de $\frac{1}{2}Ml^2\omega \operatorname{sen}\theta_0$.

Fig. 10-28

10.94. (*a*) Prove que a magnitude do torque necessário para manter o sistema do probl. 10.93 em movimento é $\frac{1}{4}Ml^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\theta_0$. (*b*) Qual a direção do torque?

10.95. Faça (*a*) o probl. 10.93 e (*b*) o probl. 10.94 com a haste ACB, tendo massa m.

10.96. Uma placa circular uniforme e sólida de raio a tem o seu centro apoiado no topo de uma haste fixa e fina OA [veja a fig. 10.29]. Dá-se-lhe uma rotação de velocidade angular ω_0 em torno de um eixo que está inclinado de um ângulo α com a normal OB à placa. (*a*) Prove que o vetor velocidade angular ω precessa em torno da normal OB com período $2\pi/(\omega_0 \cos\alpha)$. (*b*) Prove que o eixo OB descreve o cone do espaço com período

$$2\pi/(\omega_0\sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}).$$

Fig. 10-29

10.97. No probl. 10.96, ache o ângulo que a placa gira, enquanto OB descreve o cone do espaço.

10.98. Ache os momentos principais de inércia de um cone sólido e uniforme de raio a, altura h e massa M, tomados em torno (*a*) do vértice e (*b*) do centro de massa.

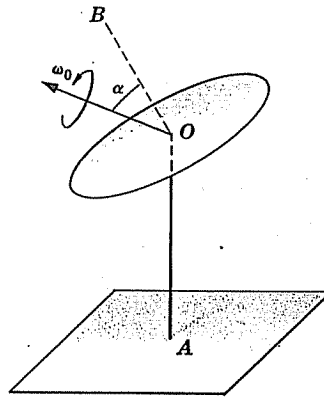
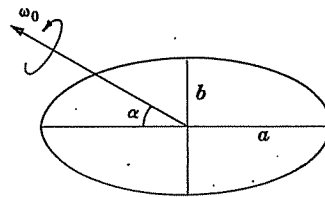
Resp.: (*a*) $I_1 = I_2 = \frac{3}{20}M(a^2 + 4h^2)$, $I_3 = \frac{3}{10}Ma^2$
(*b*) $I_1 = I_2 = \frac{3}{80}M(h^2 + 4a^2)$, $I_3 = \frac{3}{10}Ma^2$

10.99. Um pêndulo composto de massa M oscila em torno de um eixo horizontal que faz os ângulos α, β, γ com os eixos principais de inércia. Se os momentos principais de inércia são I_1, I_2 e I_3, respectivamente, e a distância do centro de massa ao eixo de rotação é l, prove que, para pequenas oscilações, o período é $2\pi\sqrt{Mgl/I}$, onde $I = Ml^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma$.

10.100. Ache o período para oscilações de pequena amplitude de um cone sólido e uniforme, que gira em tôrno do eixo horizontal preso ao vértice do cone.

10.101. Uma placa elíptica [veja a fig. 10.30] tendo o semi-eixo maior e o semi-eixo menor de comprimentos a e b, respectivamente, está com uma rotação de velocidade angular em módulo ω_0 em torno de um eixo que faz um ângulo constante com o eixo maior. Ache o torque necessário para produzir este movimento.

Fig. 10-30

10.102. Faça o probl. 10.101, considerando que a placa elíptica seja substituída por uma em forma de elipsóide.

10.103. Dadas as equações de Euler do movimento de um corpo rígido, tendo torque externo nulo em torno de um ponto fixo O, i.e.,

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0, \quad I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = 0, \quad I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0$$

prove que

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = \text{constante} = 2T$$

e

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = \text{constante} = H^2$$

10.104. Usando o probl. 10.103, prove que ω_1, ω_2 e ω_3 satisfazem a equação diferencial da forma $dy/dx = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}$, e, assim, mostre que a velocidade angular pode ser expressa em termos de funções elípticas.

10.105. Ache o momento de inércia de um cone sólido e uniforme de raio a, altura h e massa M, em torno de uma linha de sua superfície.
Resp.: $\frac{3}{20}Ma^2(a^2 + 6h^2)/(a^2 + h^2)$

10.106. Os momentos e produtos de inércia de um corpo rígido em torno dos eixos x, y e z são $I_{xx} = 3$, $I_{yy} = 10/3$, $I_{zz} = 8/3$, $I_{xy} = 4/3$, $I_{xz} = -4/3$, $I_{yz} = 0$. Ache (*a*) os momentos principais de inércia e (*b*) as direções dos eixos principais.

Resp.: (*a*) $I_1 = 3$, $I_2 = 2$, $I_3 = 4$
(*b*) $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{e}_3 = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

10.107. Um cone, tendo um ângulo semivertical α, rola com uma velocidade angular em módulo ω sobre um plano horizontal com seu vértice fixo no ponto O. Prove que o eixo do cone gira em torno do eixo vertical por O, com uma velocidade angular em módulo ω tg α.

10.108. Um plano horizontal gira em torno de um eixo vertical, com velocidade angular ω constante. Uma esfera sólida e uniforme de raio a é colocada neste plano. Prove que o centro descreve um círculo, com velocidade angular dada em magnitude por $\frac{2}{7}\omega$.

10.109. Faça o probl. 10.108, considerando que a esfera não tenha necessariamente uma densidade constante.
Resp.: $\omega K^2/(K^2 + a^2)$, onde K é o raio de giração em torno de um diâmetro.

10.110. Mostre como achar as distâncias relativas máxima e mínima da origem à elipsóide $\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz = 1$.
[*Sugestão.* Maximize e minimize a função $\Psi = x^2 + y^2 + z^2$, sujeita à condição $\Phi = 1$. Para isto, use o *método dos multiplicadores de Lagrange*, i.e., considere a função $G = \Psi + \lambda\Phi$, onde λ é o multiplicador de Lagrange (constante) e faça $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial G/\partial z$ igual a zero.]

10.111. Explique a relação entre o probl. 10.110 e o método da introdução deste capítulo, para obter os momentos principais de inércia e os eixos principais.

10.112. (*a*) Ache as distâncias relativas máxima e mínima da origem à elipsóide $9x^2 + 10y^2 + 8z^2 + 4xy - 4xz = 3$.
(*b*) Discuta a conexão dos resultados de (*a*) com os do probl. 10.106.

10.113. Ache o momento de inércia do sistema de partículas do probl. 10.42 em torno de uma linha que passa pelo ponto $(2, -1, 3)$ e tem a direção $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

10.114. Prove que o movimento do pião que "dorme" do probl. 10.36 é estável, se $A^2 \geqq 4mglI_1/I_3^2$.

10.115. Ache o momento de inércia da lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$, em torno do eixo z.
Resp.: $\frac{1}{8}Ma^2$

10.116. Um corpo rígido e plano (uma lâmina) tem dois sistemas de coordenadas xy e $x'y'$, com uma origem comum O tal que o ângulo entre os eixos x e x' é α [veja a fig. 10-31]. Prove que

(*a*) $I_{x'x'} = I_{xx} \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + I_{yy} \operatorname{sen}^2 \alpha$
(*b*) $I_{y'y'} = I_{xx} \operatorname{sen}^2 \alpha + 2I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + I_{yy} \operatorname{sen}^2 \alpha$

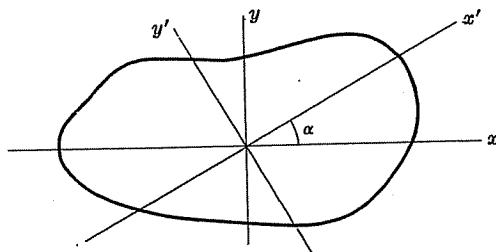



Fig. 10-31

10.117. Use o probl. 10.116, para provar que $I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_{xx} + I_{yy}$ e dê uma interpretação física.

10.118. Referindo-se ao probl. 10.116, ache uma expressão para $I_{x'y'}$ em termos de I_{xx}, I_{xy}, I_{yy} e α.

10.119. Use os resultados do probl. 10.116 e do probl. 10.118, para provar que uma região plana, tendo momentos e produtos de inércia definidos por I_{xx}, I_{xy}, e I_{yy} correspondentes a um sistema de coordenadas particular, os eixos principais são obtidos pela rotação destes eixos de um ângulo α dado por $\operatorname{tg} 2\alpha = I_{xy}/(I_{yy} - I_{xx})$

10.120. Prove que os comprimentos dos eixos principais no probl. 10.116 são dados por $\frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy}) \pm \sqrt{I_{xy}^2 + \frac{1}{4}(I_{xx} - I_{yy})^2}$.

10.121 Discuta o probl. 10.19, se $I_1 > I_2$

10.122. Ache o momento de inércia de um fio semicircular e uniforme de massa M e raio a, em torno de seu centro.
Resp. $2M(\pi - 2)a^2/\pi$

10.123. Prove que a expressão do lado esquerdo da equação (4) do probl. 10.29 é a componente vertical do momentum angular.

10.124. Discuta o probl. 10.32, se a raiz da equação (1) for (*a*) igual a u_1 e (*b*) menor que u_1.

10.125. Um corpo rígido consiste em 3 partículas de massas m_1, m_2 e m_3. A distância entre m_1 e m_2; m_2 e m_3; m_3 e m_1 são l_{12}, l_{23} e l_{31}, respectivamente. Prove que o momento de inércia do sistema em torno de um eixo, perpendicular ao plano das partículas, passando pelo seu centro de massa, é dado por

$$\frac{m_1 m_2 l_{12}^2 + m_2 m_3 l_{23}^2 + m_3 m_1 l_{31}^2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

10.126. Derive um "teorema dos eixos paralelos" para produtos de inércia e ilustre-o por meio de um exemplo.

10.127. Prove que os momentos principais de inércia de um triângulo de lados a, b e c e massa M em torno do centro de massa é dado por

$$I_1 = I_2 = \frac{M}{72}(a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}),$$

$$I_3 = \frac{M}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$$

10.128. Uma moeda de raio 1,5 cm rola sem deslizar sobre uma mesa horizontal de modo que o plano da moeda faz um ângulo de 60° com a mesa. Se o centro da moeda se move com uma velocidade em módulo de 3 m/s, prove que a moeda se move em uma trajetória circular e ache o seu raio.
Resp. 2,5 m

Capítulo 11

Equações de Lagrange

MÉTODOS GERAIS DE MECÂNICA

Até agora, tratamos da formulação de problemas em Mecânica pelas leis de Newton do movimento. É possível, no entanto, tratar a Mecânica sob pontos de vista mais gerais, em particular aqueles devidos a Lagrange e Hamilton.

Embora tais tratamentos se reduzam às leis de Newton, eles são caracterizados não somente pela relativa facilidade com que muitos problemas podem ser formulados e resolvidos, mas também por suas relações com a teoria e aplicação em campos avançados como a Mecânica Quântica, Mecânica Estatística, Mecânica Celeste e Eletrodinâmica.

COORDENADAS GENERALIZADAS

Considere uma partícula ou um sistema de partículas em movimento, sujeitas a possíveis restrições, como, por exemplo, uma partícula movendo-se em um fio circular ou um corpo rígido movendo-se ao longo de um plano inclinado. Então, haverá um número mínimo de coordenadas independentes necessárias para especificar o movimento.

Essas coordenadas representadas por

$$q_1, q_2, \ldots, q_n \tag{1}$$

são chamadas de *coordenadas generalizadas* e podem ser distâncias, ângulos ou valores relacionadas com eles. O número n das coordenadas generalizadas é o número de graus de liberdade.

Podem ser escolhidos muitos conjuntos de coordenadas generalizadas, em um dado problema, mas uma escolha estratégica pode simplificar consideravelmente a análise.

NOTAÇÃO

O subscrito α variará de 1 a n, o número de graus de liberdade, enquanto o subscrito ν variará de 1 a N, o número de partículas no sistema.

EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

Seja $\mathbf{r}_\nu = x_\nu\mathbf{i} + y_\nu\mathbf{j} + z_\nu\mathbf{k}$ o vetor-posição da ν-ésima partícula em relação ao

sistema de coordenadas xyz. A relação entre as coordenadas generalizadas (1) e as coordenadas de posição são dadas pelas *equações de transformação*.

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= x_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ y_\nu &= y_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \\ z_\nu &= z_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

onde t representa o tempo. Em forma vetorial, (2) pode ser escrito como

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \tag{3}$$

As funções em (2) ou (3) são consideradas como sendo contínuas e tendo derivadas contínuas.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS

Sistemas mecânicos podem ser classificados em *escleronômicos e reonômicos, holonômicos ou não-holonômicos e conservativos ou não-conservativos, como são definidos a seguir.*

SISTEMAS ESCLERONÔMICOS E REONÔMICOS

Em muitos sistemas mecanicos importantes, o tempo t não entra explicitamente nas equações (2) ou (3). Tais sistemas são chamados de *escleronômicos*. Em outros, como, por exemplo, aqueles que têm movimento restrito, o tempo t entra explicitamente. Tais sistemas são chamados de *reonômicos*.

SISTEMAS HOLONÔMICOS E NÃO-HOLONÔMICOS

Sejam as coordenadas generalizadas de um sistema representadas por $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e o tempo representado por t. Se todas as restrições do sistema podem ser representadas por equações da forma $\phi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0$ ou sua equivalente, então o sistema é dito *holonômico*; do contrário, o sistema é dito *não-holonômico*.

SISTEMAS CONSERVATIVOS E NÃO-CONSERVATIVOS

Se todas as forças atuantes sobre um sistema de partículas forem derivadas de uma função potencial (ou energia potencial) V, então o sistema é chamado de *conservativo*, do contrário ele não é conservativo.

ENERGIA CINÉTICA. VELOCIDADES GENERALIZADAS

A energia cinética total do sistema é

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu^2 \tag{4}$$

A energia cinética pode ser escrita na forma quadrática em velocidades generalizadas $\dot{q}_\alpha$. Se o sistema for escleronômico (i.e., independente do tempo t explicitamente), então a forma quadrática tem somente termos da forma $a_{\alpha\beta}\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta$. Se ele for reonômico, os termos lineares em $\dot{q}_\alpha$ estarão também presentes.

FORÇAS GENERALIZADAS

Se W for o trabalho total realizado sobre um sistema de partículas pelas forças $\mathbf{F}_\nu$ atuantes sobre a ν-ésima partícula, então

$$dW = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \, dq_\alpha \tag{5}$$

onde

$$\Phi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{6}$$

é chamada de *força generalizada* associada à coordenada generalizada q_α. Veja o probl. 11.6.

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A força generalizada pode ser relacionada com a energia cinética pelas equações [veja o probl. 11.10].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \tag{7}$$

Se o sistema for conservativo de modo que as forças sejam deriváveis de um potencial ou energia potencial V, pode-se escrever (7) como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{8}$$

onde

$$L = T - V \tag{9}$$

é chamada de *função lagrangeana* do sistema ou, simplesmente, o *lagrangeano*.

As equações (7) e (8) são chamadas de *equações de Lagrange* e são válidas para sistemas holonômicos que podem ser escleronômicos ou reonômicos.

Se algumas das forças em um sistema forem conservativas tal que sejam deriváveis de um potencial V', enquanto outras forças, tais como de atrito, etc., não forem conservativas, pode-se escrever as equações de Lagrange como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \Phi'_\alpha \tag{10}$$

onde $L = T - V'$ e Φ'_α são as forças generalizadas associadas às forças não-conservativas no sistema.

MOMENTOS GENERALIZADOS

Define-se

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{11}$$

como sendo o *momento generalizado* associado a uma coordenada generalizada q_α. Geralmente se chama p_α de momento *conjugado* a q_α, ou *momento conjugado*.

Se o sistema for conservativo com energia potencial dependendo somente das coordenadas generalizadas, então (11) pode ser escrita em termos do lagrangeano $L = T - V$ como

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{12}$$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS

Considere que haja m equações de restrição, tendo a forma

$$\sum_\alpha A_\alpha dq_\alpha + A\,dt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha dq_\alpha + B\,dt = 0, \quad \ldots \tag{13}$$

ou equivalentemente

$$\sum_\alpha A_\alpha \dot{q}_\alpha + A = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha \dot{q}_\alpha + B = 0, \quad \ldots \tag{14}$$

Deve-se ter, naturalmente, $m < n$, onde n é o número de coordenadas q_α.

As equações (13) ou (14) podem ou não ser integráveis para a obtenção de uma relação que envolva os q_α's. Se elas não forem integráveis, as restrições *não são holonômicas* ou *não-integráveis*, do contrário elas serão *holonômicos* ou *integráveis*.

Em qualquer um dos casos, as equações de Lagrange podem ser substituídas por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \tag{15}$$

onde os m parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ são chamados de multiplicadores de Lagrange [veja o probl. 11.18].

Se as forças são conservativas, (15) pode ser escrita em termos do lagrangeano $L = T - V$ como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \tag{16}$$

Deve ser enfatizado que os resultados acima são aplicáveis a sistemas holonômicos (como também não-holonômicos), pois uma condição restritiva da forma

$$\phi(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = 0 \tag{17}$$

pode, por diferenciação, ser escrita como

$$\sum_\alpha \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = 0 \tag{18}$$

que tem a forma (13).

EQUAÇÕES DE LAGRANGE COM FORÇAS IMPULSIVAS

Considere que as forças $\mathbf{F}_\nu$ atuantes sobre um sistema, são tais que

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_\nu \, dt = \mathscr{I}_\nu \tag{19}$$

onde τ representa um intervalo de tempo. Então, chama-se $\mathbf{F}_\nu$ de *forças impulsivas* e $\mathscr{I}_\nu$ de *impulsos*.

Se os subscritos 1 e 2 representarem, respectivamente, os valores antes e depois da aplicação da força impulsiva, as equações de Lagrange ficam [veja o probl. 11.23].

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_1 = \mathscr{F}_\alpha \tag{20}$$

onde

$$\mathscr{F}_\alpha = \sum_\nu \mathscr{I}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{21}$$

Se chamar-se a $\mathscr{F}_\alpha$ de *impulso* generalizado, (20) pode ser escrita.

Impulso generalizado = mudança de momento generalizado que é a generalização do Teorema 2.6.

Problemas Resolvidos

COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

11.1. Dê um conjunto de coordenadas generalizadas necessárias para especificar completamente o movimento de cada ítem seguinte: (*a*) uma partícula com movimento restringido à uma elipse, (*b*) um cilindro circular rolando por um plano inclinado, (*c*) as duas massas de um pêndulo duplo (fig. 11.3) restringidas a um plano.

(*a*) Seja a elipse escolhida no plano xy da fig. 11-1. A partícula de massa m movendo-se em uma elipse, tem coordenadas (x, y). Entretanto, como se têm as equações de transformação $x = a\cos\theta$, $y = b \operatorname{sen}\theta$, pode-se especificar completamente o movimento pelo uso da coordenada generalizada θ.

(*b*) A posição do cilindro (fig. 11-2) sobre um plano inclinado pode ser especificada completamente, dando-se a distância x percorrida pelo centro de massa e o ângulo θ de rotação do cilindro em torno de seu eixo.

Se não houver deslizamento, x está relacionado com θ de modo que sòmente é necessário uma coordenada generalizada (x ou θ). Se houver deslizamento, são necessárias duas coordenadas generalizadas x e θ.

(*c*) Duas coordenadas θ_1 e θ_2 especificam completamente a posição das massas m_1 e m_2 [veja a fig. 11-3 acima] e podem ser consideradas como as coordenadas generalizadas necessárias.

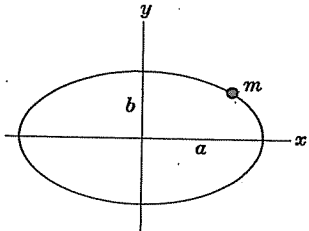
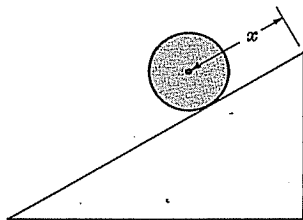
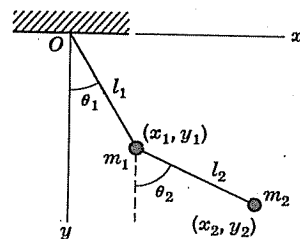



Fig. 11-1 Fig. 11-2 Fig. 11-3

11.2. Escreva as equações de transformação para o sistema do probl. 11.1 (*c*).

Escolha um sistema de coordenadas xy, como é mostrado na fig. 11-3. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) as coordenadas retangulares de m_1 e m_2, respectivamente. Então, da fig. 11-3 conclui-se que

$$x_1 = l_1\cos\theta_1 \qquad y_1 = l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$
$$x_2 = l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \qquad y_2 = l_1\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\operatorname{sen}\theta_2$$

que são as equações de transformação pedidas.

11.3. Prove que $\dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Tem-se que $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)$. Então,

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{1}$$

Assim,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Pode-se considerar este resultado como um "cancelamento dos pontos".

11.4. Prove que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Tem-se de (1) do probl. 11.3,

$$\dot{\mathbf{r}}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n}\dot{q}^n + \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t} \tag{1}$$

Então,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha \partial t} \tag{2}$$

Ora,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dq_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial}{\partial q_n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_1 \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial q_n \partial q_\alpha}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_\nu}{\partial t\, \partial q_\alpha} \tag{3}$$

Como se considera que $\mathbf{r}_\nu$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas, a ordem de diferenciação não é importante. Assim, de (2) e (3) segue-se o resultado pedido.

O resultado pode ser considerado como uma troca de ordem dos operadores. i.e.,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)$$

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS

11.5. Classifique cada um dos seguintes ítens, conforme forem (i) escleronômicos ou reonômicos, (ii) holonômicos ou não e (iii) conservativos ou não.

(*a*) Uma esfera rolando do topo de uma esfera fixa.
(*b*) Um cilindro rolando sem deslizamento por um plano inclinado de ângulo α.
(*c*) Uma partícula movendo-se sobre um fio sem atrito e muito longo, que gira com velocidade constante em torno de um eixo horizontal.

(*a*) *escleronômico* (as equações não envolvem t explicitamente)
não-holonômico (pois a esfera que rola deixa a esfera fixa em algum ponto)
conservativo (a força gravitacional que age é derivável de um potencial).

(*b*) *escleronômico*
holonômico (a equação de restrição é a de uma linha ou plano)
conservativo

(*c*) *escleronômico*
holonômico
não-conservativo (pois a força, devida à função, não é derivável de um potencial).

(*d*) *reonômico* (a restrição envolve o tempo t explicitamente)
holonômico (a equação de restrição é a de uma linha que envolve o tempo explicitamente)
conservativo

TRABALHO, ENERGIA CINÉTICA E FORÇAS GENERALIZADAS

11.6. Derive as equações (5) e (6), da introdução deste capítulo, para o trabalho realizado sobre um sistema de partículas.

Considere que um sistema sofra os incrementos $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$ nas coordenadas generalizadas. Então, a ν-ésima partícula sofre um deslocamento.

$$d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

Assim, o trabalho total realizado é

$$dW = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot d\mathbf{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^{N} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \Phi_\alpha \, dq_\alpha$$

onde

$$\Phi_\alpha = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

Chama-se de Φ_α a *força generalizada* associada à coordenada generalizada q_α.

11.7. Prove que $\Phi_\alpha = \partial W / \partial q_\alpha$.

Tem-se que $dW = \sum \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$. E também, pelo probl. 11.6, $dW = \sum \Phi_\alpha \, dq_\alpha$. Então,

$$\sum \left(\Phi_\alpha - \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \right) dq_\alpha = 0$$

Assim, como os dq_α são independentes, todos os coeficientes de dq_α devem ser nulos, tal que $\Phi_\alpha = \partial W / \partial q_\alpha$.

11.8. Seja $\mathbf{F}_\nu$ a resultante das forças externas atuantes sobre a ν-ésima partícula de um sistema. Prove que

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

Pela segunda lei de Newton, aplicada à ν-ésima partícula, tem-se

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu = \mathbf{F}_\nu \tag{1}$$

Então,

$$m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}^\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Ora, pelo probl. 11.4,

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right) = \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right)$$

$$= \ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} + \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{3}$$

Assim,

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{4}$$

E de (2) tem-se, pois m_ν é constante,

$$\frac{d}{dt}\left(m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right) - m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

Somando ambos os membros em relação a ν sobre todas as partículas, tem-se

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

11.9. Seja T a energia cinética de um sistema de partículas. Prove que

(*a*) $\dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dfrac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$, (*b*) $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$

(*a*) A energia cinética é $T = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{r}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \dot{\mathbf{r}}_\nu$.

Assim,

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

(*b*) Por "cancelamento dos pontos" [probl. 11.3].

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_\alpha} = \sum m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

11.10. Prove que $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$ onde $\Phi_\alpha = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}$.

Do probl. 11.8,

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\} - \sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{1}$$

Dos probls. 11.9 (*a*) e 11.9 (*b*),

$$\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

$$\sum_\nu m_\nu \dot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{3}$$

Então, substituindo (2) e (3) em (1), acha-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \tag{4}$$

O valor

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \tag{5}$$

é chamado de *momento generalizado* ou *momento conjugado* associado à coordenada generalizada q_α.

11.11. Considere que as forças atuantes sobre um sistema de partículas sejam deriváveis de uma função potencial V, i.e., considere que o sistema seja conservativo. Prove que, se $L = T - V$ é a função lagrangeana, então

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

Se as forças forem deriváveis de um potencial V, então [veja o probl. 11.7].

$$\Phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

Como o potencial, ou energia potencial é uma função dos q somente (e, possivelmente, do tempo t),

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Então, do probl. 11.10,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$$

11.12. (*a*) Ache o lagrangeano para um pêndulo simples e (*b*) obtenha uma equação para descrever o seu movimento.

(*a*) Escolha como coordenada generalizada o angulo θ entre o fio OB do pêndulo e a vertical OA [veja a fig. 11-4]. Se l for o comprimento de OB, então a energia cinética é

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{1}$$

onde m é a massa do bulbo.

Fig. 11-4

A energia potencial da massa m [tomando como nível de referência um plano horizontal pelo ponto A mais baixo da trajetória] é dada por

$$\begin{aligned} V &= mg(OA - OC) = mg(l - l\cos\theta) \\ &= mgl(1 - \cos\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

Assim. o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{3}$$

A equação de Lagrange é $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ (4)

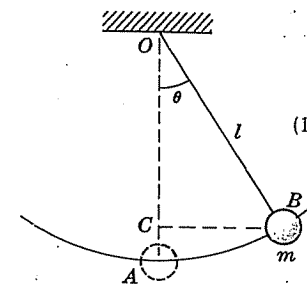
De (3), $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\,\text{sen}\,\theta, \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ (5)

Substituindo isto em (4), acha-se

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0 \tag{6}$$

que é a equação do movimento pedida [compare com o probl. 4.23].

11.13. Uma certa massa M_2 está pendurada, por uma extremidade, de um fio que passa por cima de uma polia fixa sem atrito. [veja a fig. 11.5]. Na outra extremidade deste fio há uma polia, que não gira, de massa M_1 e sobre a qual está um fio que segura as massas m_1 e m_2. (*a*) Ache o lagrangeano do sistema. (*b*) Ache a aceleração da massa M_2.

Sejam X_1 e X_2 as distâncias das massas M_1 e M_2 ao centro da polia fixa, respectivamente. Sejam x_1 e x_2 as distâncias das massas m_1 e m_2 abaixo do centro da polia móvel M_1 respectivamente.

Como os fios têm comprimentos fixos,

$$X_1 + X_2 = \text{constante} = a,$$
$$x_1 + x_2 = \text{constante} = b$$

Então, por diferenciação, em relação ao tempo t,

$$\dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$$

e $$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$$

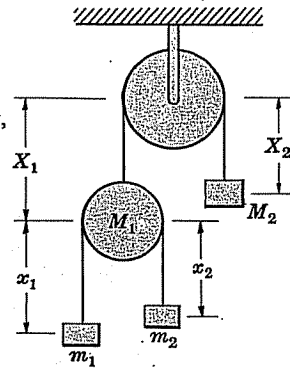
Fig. 11-5

Assim, tem-se

Velocidade de $M_1 = \dot{X}_1$

Velocidade de $M_2 = \dot{X}_2 = -\dot{X}_1$

Velocidade de $m_1 = \dfrac{d}{dt}(X_1 + x_1) = \dot{X}_1 + \dot{x}_1$

Velocidade de $m_2 = \dfrac{d}{dt}(X_1 + x_2) = \dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$

Então, a energia cinética total do sistema é

$$T = \tfrac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \qquad (1)$$

A energia potencial total do sistema, medida a partir de um plano horizontal pelo centro da polia fixa como referência, é

$$\begin{aligned} V &= -M_1gX_1 - M_2gX_2 - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_1 + x_2) \\ &= -M_1gX_1 - M_2g(a - X_1) - m_1g(X_1 + x_1) - m_2g(X_1 + b - x_1) \end{aligned} \qquad (2)$$

Portanto, o lagrangeano é

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \tfrac{1}{2}M_1\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}M_2\dot{X}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 \\ &+ M_1gX_1 + M_2g(a - X_1) + m_1g(X_1 + x_1) + m_2g(X_1 + b - x_1) \end{aligned} \qquad (3)$$

As equações de Lagrange correspondentes a X_1 e x_1 são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial X_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \qquad (4)$$

De (3) tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = M_1g - M_2g + m_1g + m_2g = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2)g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1} = M_1\dot{X}_1 + M_2\dot{X}_1 + m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1) + m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) = (M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\dot{X}_1 + (m_1 - m_2)\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = m_1g - m_2g = (m_1 - m_2)g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1(\dot{X}_1 + \dot{x}_1) - m_2(\dot{X}_1 - \dot{x}_1) = (m_1 - m_2)\dot{X}_1 + (m_1 + m_2)\dot{x}_1$$

Assim, as equações (4) ficam

$$(M_1 + M_2 + m_1 + m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 - m_2)\ddot{x}_1 = (M_1 - M_2 + m_1 + m_2)g$$
$$(m_1 - m_2)\ddot{X}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 = (m_1 - m_2)g$$

Resolvendo-as simultaneamente, acha-se

$$\ddot{X}_1 = \frac{(M_1 - M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{2M_2(m_1 - m_2)}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

Então, a aceleração para baixo da massa M_2 é constante e é igual a

$$\ddot{X}_2 = -\ddot{X}_1 = \frac{(M_2 - M_1)(m_1 + m_2) - 4m_1m_2}{(M_1 + M_2)(m_1 + m_2) + 4m_1m_2}g$$

11.14. Use as equações de Lagrange para achar a equação diferencial das massas vibrantes do probl. 8.1.

Refira-se às figs. 8.7 e 8.8. A energia cinética do sistema é

$$T = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad (1)$$

Como a distinção das molas AP, PQ e QB da fig. 8.8 são numericamente iguais a x_1, $x_2 - x_1$ e x_2, respectivamente, a energia potencial do sistema é

$$V = \tfrac{1}{2}\kappa x_1^2 + \tfrac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa x_2^2 \qquad (2)$$

Assim, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}\kappa x_1^2 - \tfrac{1}{2}\kappa(x_2 - x_1)^2 - \tfrac{1}{2}\kappa x_2^2 \qquad (3)$$

As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \qquad (4)$$

Então, como

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -\kappa x_1 + \kappa(x_2 - x_1) = \kappa(x_2 - 2x_1), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -\kappa(x_2 - x_1) - \kappa x_2 = \kappa(x_1 - 2x_2), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2$$

as equações (4) ficam

$$m\ddot{x}_1 = \kappa(x_2 - 2x_1), \qquad m\ddot{x}_2 = \kappa(x_1 - 2x_2) \qquad (5)$$

de acordo com as obtidas no probl. 8.1.

11.15. Use as equações de Lagrange para achar a equação diferencial de um pêndulo composto que oscila em um plano vertical em torno de um eixo horizontal fixo.

Seja o plano de oscilação representado pelo plano xy da fig. 11.6, onde O é a sua interseção com o eixo de rotação e C é o centro de massa.

Considere que a massa do pendulo é M, seu momento de inércia em torno do eixo de rotação é $I_0 = MK^2$ [K = raio de giração] e a distância $OC = h$.

Se θ é o ângulo instantâneo que OC faz com o eixo vertical que passa por O, a energia cinética é $T = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MK^2\dot{\theta}^2$. A energia potencial relativa a um plano horizontal por O é $V = -Mgh\cos\theta$. Então, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}MK^2\dot{\theta}^2 + Mgh\cos\theta$$

Fig. 11-6

Como $\partial L/\partial\theta = -Mgh\,\text{sen}\,\theta$ e $\partial L/\partial\dot{\theta} = MK^2\dot{\theta}$, a equação de Lagrange é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

i.e.,

$$MK^2\ddot{\theta} + Mgh\,\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\theta} + \frac{gh}{K^2}\text{sen}\,\theta = 0$$

Compare com o probl. 9.24.

11.16. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força conservativo. Ache (*a*) a função lagrangeana, (*b*) as equações do movimento em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) [veja o probl. 1.147].

(*a*) A energia cinética total $T = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2]$.
A energia potencial $V = V(\rho, \phi, z)$. Então, a função lagrangeana é

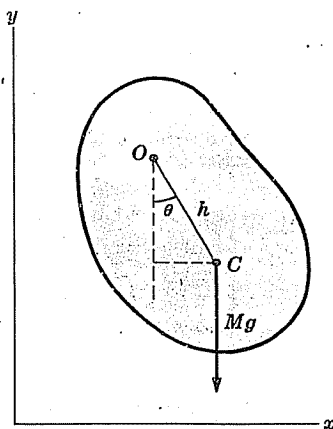
$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2] - V(\rho, \phi, z)$$

(*b*) As equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\rho} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - \left(m\rho\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial\rho}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial\rho}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad \text{ou} \quad m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \text{ou} \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

11.17. Faça o probl. 11.16, considerando que a partícula se mova no plano xy e que o potencial dependa somente da sua distância à origem.

Neste caso V depende somente de ρ, e $z = 0$. Então, as equações de Lagrange no item (*b*) do probl. 11.16 ficam

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -\frac{\partial V}{\partial\rho}, \quad \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\phi}) = 0$$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NÃO HOLONÔMICOS

11.18. Derive as equações de Lagrange (15), da introdução deste capítulo, para restrições não-holonomicas.

Considere que haja m condições restritivas da forma

$$\sum_\alpha A_\alpha\,dq_\alpha + A\,dt = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha\,dq_\alpha + B\,dt = 0, \quad \ldots \tag{1}$$

onde $m < n$, é o número de coordenadas q_α.

Como no probl. 11.10, tem-se

$$Y_\alpha \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \sum_\nu m_\nu\,\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{2}$$

Se os $\delta\mathbf{r}_\nu$ são deslocamentos virtuais que satisfaçam as restrições instantâneas [obtidas considerando-se que o tempo t seja uma constante], então

$$\delta\mathbf{r}_\nu = \sum_\alpha \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha \tag{3}$$

Ora, o trabalho virtual realizado é

$$\delta W = \sum_\nu m_\nu\,\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \delta\mathbf{r}_\nu = \sum_\nu\sum_\alpha m_\nu\,\ddot{\mathbf{r}}_\nu \cdot \frac{\partial\mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_\alpha Y_\alpha\,\delta q_\alpha \tag{4}$$

E, como o trabalho virtual pode ser escrito em termos das forças generalizadas Φ_α como

$$\delta W = \sum_\alpha \Phi_\alpha\,\delta q_\alpha, \tag{5}$$

tem-se, por subtração de (4) e (5),

$$\sum_\alpha (Y_\alpha - \Phi_\alpha)\,\delta q_\alpha = 0 \tag{6}$$

Como os δq_α não são todos independentes, não se pode concluir que $Y_\alpha = \Phi_\alpha$ levaria às equações de Lagrange, como foi obtido no probl. 11.10.

De (1), como t é constante para restrições instantâneas, tem-se m equações

$$\sum_\alpha A_\alpha\,\delta q_\alpha = 0, \quad \sum_\alpha B_\alpha\,\delta q_\alpha = 0, \quad \ldots \tag{7}$$

Multiplicando estas pelos m multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ e somando, tem-se

$$\sum_\alpha (\lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots)\,\delta q_\alpha = 0 \tag{8}$$

A subtração de (6) e (8) dá

$$\sum_\alpha (Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \ldots)\delta q_\alpha = 0 \tag{9}$$

Ora, pelas equações (7) pode-se resolver para m valores δq_α [diz-se $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$] em termos dos δq_α restantes [$\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$]. Assim, em (9) pode-se considerar $\delta q_1, \ldots, \delta q_m$ como dependentes e $\delta q_{m+1}, \ldots, \delta q_n$ como independentes.

Fxando o conjunto de coeficientes arbitrários das variáveis dependentes igual a zero, i.e.,

$$Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \ldots = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m \tag{10}$$

Então, serão deixados na soma (9) somente os valores independentes δq_α e, como estes são arbitrários, segue-se que os seus coeficientes serão nulos. Assim,

$$Y_\alpha - \Phi_\alpha - \lambda_1 A_\alpha - \lambda_2 B_\alpha - \ldots = 0, \quad \alpha = m+1, \ldots, n \tag{11}$$

As equações (2), (10) e (11) levam a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{12}$$

como foi pedido. Estas equações, juntas com (1), levam a $n+m$ equações em $n+m$ incógnitas.

11.19. Derive as equações (16), da introdução deste capítulo, para sistemas conservativos e não-holonômicos.

Do probl. 11.18,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \tag{1}$$

Então, se as forças são deriváveis de um potencial, $\Phi_\alpha = -\partial V/\partial q_\alpha$, onde V não depende de $\dot{q}_\alpha$. Assim, (1) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \tag{2}$$

onde $L = T - V$.

11.20. Uma partícula de massa m move-se sob a influência da gravidade e sobre a superfície interna do parabolóide de revolução $x^2 + y^2 = az$, que é considerado um atrito [veja a fig. 11-7]. Obtenha as equações do movimento.

Fig. 11-7

Pelo probl. 11.16, o lagrangeano em coordenadas cilíndricas é dado por

$$L = \tfrac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{1}$$

Como $x^2 + y^2 = \rho^2$, a condição de restrição é $\rho^2 - az = 0$ tal que

$$2\rho\,\delta\rho - a\,\delta z = 0 \tag{2}$$

Se chamarmos $q_1 = \rho$, $q_2 = \phi$, $q_3 = z$ e compararmos (2) com as equações (7) do probl. 11.18, veremos que

$$A_1 = 2_\rho, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -a \tag{3}$$

pois é dada somente uma restrição. As equações de Lagrange [veja o probl. 11.19] podem ser, assim, escritas como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda_1 A_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$$

i.e., $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 2\lambda_1\rho, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda_1 a$

Usando (1) fica

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 2\lambda_{1\rho} \tag{4}$$

$$m\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \tag{5}$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 a \tag{6}$$

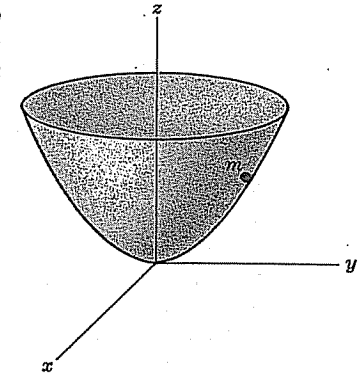
Tem-se também a condição restritiva

$$2\rho\dot{\rho} - a\dot{z} = 0 \tag{7}$$

As quatro equações (4), (5), (6) e (7) tornam possível achar as quatro incógnitas: ρ, ϕ, z, λ_1.

11.21. (*a*) Prove que a partícula do probl. 11.20 descreverá um círculo horizontal no plano $z = h$, desde que seja dada uma velocidade angular cuja magnitude seja $\omega = \sqrt{2g/a}$.

(*b*) Prove que, se a partícula for deslocada ligeiramente de sua trajetória circular, ela oscilará em torno da sua trajetória, com frequência dada por $(1/\pi)\sqrt{2g/a}$.

(*c*) Discuta a estabilidade da partícula na trajetória circular.

(*a*) O raio do círculo obtido como interseção do plano $z = h$ com o parabolóide $\rho^2 = az$ é

$$\rho_0 = \sqrt{ah} \quad (1)$$

Fazendo $z = h$ na equação (6) do probl. 11.20 acha-se

$$\lambda_1 = -mg/a \quad (2)$$

Então, usando (1) e (2) na equação (4) do probl. 11.20 e chamando $\dot{\phi} = \omega$, acha-se $m(-\rho_0\omega^2) = 2(-mg/a)\rho_0$ ou $\omega^2 = 2g\,a$, de onde

$$= \sqrt{2g/a} \quad (3)$$

O período e a freqüência da partícula nesta trajetória circular são dados, respectivamente, por

$$P^1 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{2g}} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}} \quad (4)$$

(*b*) Da equação (5) do probl. 11.20, acha-se

$$\rho^2\dot{\phi} = \text{constante} = A \quad (5)$$

Admitindo que a partícula inicia o movimento com velocidade angular ω, acha-se $A = ah\omega$ tal que

$$\dot{\phi} = ah\omega/\rho^2 \quad (6)$$

Como a vibração ocorre próxima ao plano $z = h$, acha-se, fazendo $z = h$ na equação (6) do probl. 11.20, que

$$\lambda_1 = -mg/a \quad (7)$$

Usando (6) e (7) na equação (4) do probl. 11.20, acha-se

$$\ddot{\rho} - a^2h^2\omega^2/\rho^3 = -2g\rho/a \quad (8)$$

Ora se a trajetória se desvia ligeiramente do círculo, então ρ afasta-se ligeiramente de ρ_0. Assim, aplica-se a seguinte transformação

$$\rho = \rho_0 + u \quad (9)$$

em (8), onde u é pequeno, comparando-se com ρ_0. Então, (8) fica

$$\ddot{u} - \frac{a^2h^2\omega^2}{(\rho_0 + u)^3} = -\frac{2g}{a}(\rho_0 + u) \quad (10)$$

Mas, com um alto grau de aproximação,

$$\frac{1}{(\rho_0 + u)^3} = \frac{1}{\rho_0^3(1 + u/\rho_0)^3} = \frac{1}{\rho_0^3}\left(1 + \frac{u}{\rho_0}\right)^{-3} = \frac{1}{\rho_0^3}\left(1 - \frac{3u}{\rho_0}\right)$$

pelo teorema binomial, onde se negligenciam os termos em $u^2, u^3, \ldots$.

Usando os valores de ρ_0 e ω, dados por (1) e (3) respectivamente, (10) fica

$$\ddot{u} + (8g/a)u = 0 \quad (5)$$

cuja solução é $u = \varepsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\,t + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\sqrt{8g/a}\,t$. Assim,

$$\rho = \rho_0 + u = \sqrt{ah} + \varepsilon_1 \cos\sqrt{8g/a}\,t + \varepsilon_2 \operatorname{sen}\sqrt{8g/a}\,t$$

Portanto, se a partícula for deslocada ligeiramente da trajetória circular de raio $\rho_0 = \sqrt{ah}$, ocorrerão oscilações em torno da trajetória com frequência

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8g}{a}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}} \quad (6)$$

ou período

$$P_2 = \pi\sqrt{\frac{a}{2g}} \quad (7)$$

É interessante que o período de oscilação na trajetória circular dada por (4) é o dobro do período de oscilação em torno da trajetória circular dada por (7).

(*c*) Como a partícula tende a voltar para a trajetória circular, quando ela for deslocada desta ligeiramente, o movimento é estável.

11.22. Discuta o significado físico dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ no probl. 11.18.

No caso, há equações restritivas e as equações são dadas pelo probl. 11.18,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha + \lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots \ldots$$

Segue-se que os termos $\lambda_1 A_\alpha + \lambda_2 B_\alpha + \ldots$ correspondem às forças generalizadas, associadas com as restrições.

Fisicamente, os multiplicadores de Lagrange são associados com as forças restritivas atuantes sobre o sistema. Assim, quando se determinam os multiplicadores de Lagrange, toma-se essencialmente em conta o efeito das forças restritivas, sem, realmente, achar aquelas forças explicitamente.

EQUAÇÕES DE LAGRANGE COM FORÇAS IMPULSIVAS

11.23. Derive as equações (20), da introdução deste capítulo.

Para o caso onde as forças são finitas, tem-se pelo probl. 11.10,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \Phi_\alpha \quad (1)$$

$$\Phi_\alpha = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \quad (2)$$

Integrando ambos os membros de (1) em relação a t de $t = 0$ a $t = \tau$,

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) dt - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = \int_0^\tau \Phi_\alpha \, dt \tag{3}$$

tal que

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=0} - \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = \sum_\nu \left\{\left(\int_0^\tau \mathbf{F}_\nu \, dt\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\} \tag{4}$$

Tomando o limite com $\tau \to 0$, tem-se

$$\lim_{\tau \to 0} \left\{\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_{t=0}\right\} - \lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = \sum_\nu \left\{\left(\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_\nu \, dt\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha}\right\}$$

ou

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)_1 = \sum_\nu \mathscr{I}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} = \mathscr{F}_\alpha$$

usando $\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dt = 0$ pois $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ é finito, e $\lim_{\tau \to 0} \int_0^\tau \mathbf{F}_\nu \, dt = \mathscr{I}_\nu$.

11.24. Um quadrado $ABCD$ formado por quatro barras de comprimento $2l$ e massa m pivotadas em suas extremidades, está em repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito. Um impulso de magnitude $\mathscr{I}$ é aplicado ao vértice A, na direção AD. Ache as equações do movimento.

Após a aplicação do impulso, o quadrado passará a ser um romboedro (fig. 11.8).

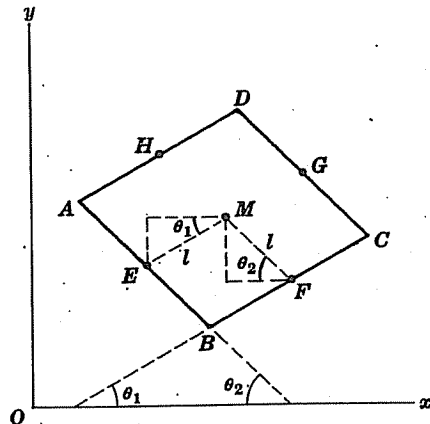



Fig. 11-8

Considere que, em um instante qualquer t, os ângulos feitos pelos lados AD (ou BC) e AB (ou CD) com o eixo x são θ_1 e θ_2, respectivamente, enquanto que as coordenadas do centro M são (x, y). Assim, x, y, θ_1, θ_2 são as coordenadas generalizadas.

Da fig. 11.8, vê-se que os vetores de posição dos centros E, F, G, H das hastes são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_E &= (x - l\cos\theta_1)\mathbf{i} + (y - l\,\text{sen}\,\theta_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_F &= (x + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_G &= (x + l\cos\theta_1)\mathbf{i} + (y + l\,\text{sen}\,\theta_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{r}_H &= (x - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

As velocidades de E, F, G e H em um instante qualquer são dadas por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{r}}_E &= (\dot{x} + l\,\text{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{i} + (\dot{y} - l\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_F = \dot{\mathbf{r}}_F &= (\dot{x} - l\,\text{sen}\,\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{i} + (\dot{y} - l\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G &= (\dot{x} - l\,\text{sen}\,\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{i} + (\dot{y} + l\cos\theta_1\,\dot{\theta}_1)\mathbf{j}\\
\mathbf{v}_H = \dot{\mathbf{r}}_H &= (\dot{x} + l\,\text{sen}\,\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{i} + (\dot{y} + l\cos\theta_2\,\dot{\theta}_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

A energia cinética de uma das hastes, tal como a de AB, é a mesma que a energia cinética de uma partícula de massa m localizada em seu centro de massa E mais a energia cinética de rotação em torno de um eixo por E e perpendicular ao plano xy. Como a velocidade angular tem magnitude $\dot{\theta}_2$ e o momento de inércia de uma haste de comprimento $2l$ em torno de seu centro de massa é $I_{AB} = \frac{1}{3}ml^2$, a energia total da haste AB é

$$T_{AB} = \tfrac{1}{2}m\,\dot{r}_E^2 + \tfrac{1}{2}I_{AB}\dot{\theta}_2^2$$

Igualmente, a energia cinética das hastes BC, CD e AD são

$$T_{BC} = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_F^2 + \tfrac{1}{2}I_{BC}\dot{\theta}_1^2, \qquad T_{CD} = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_G^2 + \tfrac{1}{2}I_{CD}\dot{\theta}_2^2, \qquad T_{AD} = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_H^2 + \tfrac{1}{2}I_{AD}\dot{\theta}_1^2$$

Assim, a energia cinética total é [usando o fato de que $I = I_{AB} = I_{BC} = I_{CD} = \frac{1}{3}ml^2$]

$$\begin{aligned}
T &= T_{AB} + T_{BC} + T_{BD} + T_{AD}\\
&= \tfrac{1}{2}m(\dot{\mathbf{r}}_E^2 + \dot{\mathbf{r}}_F^2 + \dot{\mathbf{r}}_G^2 + \dot{\mathbf{r}}_H^2) + I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\\
&= \tfrac{1}{2}m(4\dot{x}^2 + 4\dot{y}^2 + 2l^2\dot{\theta}_1^2 + 2l^2\dot{\theta}_2^2) + \tfrac{1}{3}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)\\
&= 2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \tfrac{4}{3}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2)
\end{aligned}$$

Suponha-se que, inicialmente, o romboedro é um quadrado em repouso, com os seus lados paralelos aos eixos de coordenadas e seu centro na origem. Então, tem-se

$$x = 0,\ y = 0,\ \theta_1 = \pi/2,\ \theta_2 = 0,\ \dot{x} = 0,\ \dot{y} = 0,\ \dot{\theta}_1 = 0,\ \dot{\theta}_2 = 0$$

Usando-se a notação $(\ )_1$ e $(\ )_2$ para representar os valores antes e depois que o impulso seja aplicado, tem-se

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 = (4m\dot{x})_1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_1 = (4m\dot{y})_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_1 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1)_1 = 0 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_1 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2)_1 = 0$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_2 = (4m\dot{x})_2 = 4m\dot{x} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_2 = (4m\dot{y})_2 = 4m\dot{y}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_2 = (\tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1)_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2$$

Então

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)_1 = \mathscr{F}_x \quad \text{ou} \quad 4m\dot{x} = \mathscr{F}_x \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)_1 = \mathscr{F}_y \quad \text{ou} \quad 4m\dot{y} = \mathscr{F}_y \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)_1 = \mathscr{F}\theta_1 \quad \text{ou} \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 = \mathscr{F}\theta_1 \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)_1 = \mathscr{F}\theta_2 \quad \text{ou} \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \mathscr{F}\theta_2 \tag{4}$$

onde, para simplificar-se, removeu-se o subscrito $(\ )_2$.

Para achar $\mathscr{F}_x$, $\mathscr{F}_y$, $\mathscr{F}\theta_1$, $\mathscr{F}\theta_2$, nota-se que

$$\mathscr{F}_\alpha = \sum_\nu \mathscr{I}_\nu \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_\alpha} \tag{5}$$

onde, $\mathscr{I}_\nu$ são as forças impulsivas. Assim, tem-se

$$\mathscr{F}_x = \mathscr{I}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial x} + \mathscr{I}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial x} + \mathscr{I}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial x} + \mathscr{I}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial x} \tag{6}$$

$$\mathscr{F}_y = \mathscr{I}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial y} + \mathscr{I}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial y} + \mathscr{I}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial y} + \mathscr{I}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial y} \tag{7}$$

$$\mathscr{F}\theta_1 = \mathscr{I}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_1} + \mathscr{I}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_1} + \mathscr{I}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_1} + \mathscr{I}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \theta_1} \tag{8}$$

$$\mathscr{F}\theta_2 = \mathscr{I}_A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_A}{\partial \theta_2} + \mathscr{I}_B \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_B}{\partial \theta_2} + \mathscr{I}_C \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_C}{\partial \theta_2} + \mathscr{I}_D \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_D}{\partial \theta_2} \tag{9}$$

Agora, da fig. 11-8, acham-se os vetores de posição A, B, C, D, dados por

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_A &= (x - l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\text{sen}\,\theta_1 + l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}_B &= (x - l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y - l\,\text{sen}\,\theta_1 - l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}_C &= (x + l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\text{sen}\,\theta_1 - l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j} \\
\mathbf{r}_D &= (x + l\cos\theta_1 - l\cos\theta_2)\mathbf{i} + (y + l\,\text{sen}\,\theta_1 + l\,\text{sen}\,\theta_2)\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Como a força impulsiva para A, inicialmente, é na direção do eixo positivo y, tem-se

$$\mathscr{I}_A = \mathscr{I}\mathbf{j} \tag{10}$$

Então, as equações (6) e (9) ficam

$$\mathscr{F}_x = 0, \quad \mathscr{F}_y = \mathscr{I}, \quad \mathscr{F}\theta_1 = -\mathscr{I}l\cos\theta_1, \quad \mathscr{F}\theta_2 = \mathscr{I}l\cos\theta_2 \tag{11}$$

E as equações de (1)-(4), ficam

$$4m\dot{x} = 0, \quad 4m\dot{y} = \mathscr{I}, \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_1 = -\mathscr{I}l\cos\theta_1, \quad \tfrac{8}{3}ml^2\dot{\theta}_2 = \mathscr{I}l\cos\theta_2 \tag{12}$$

11.25. Prove que a energia cinética, desenvolvida logo após a aplicação das fôrças impulsivas no probl. 11.24, é $T = \mathscr{I}^2/2m$.

Das equações (12) do probl. 11.24, tem-se

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \frac{\mathscr{I}}{4m}, \quad \dot{\theta}_1 = -\frac{3\mathscr{I}}{8ml}\cos\theta_1, \quad \dot{\theta}_2 = \frac{3\mathscr{I}}{8ml}\cos\theta_2$$

Substituindo estes valores na energia cinética obtida no probl. 11.24, encontra-se

$$T = \frac{\mathscr{I}^2}{8m} + \frac{3\mathscr{I}^2}{8m}(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2) \tag{1}$$

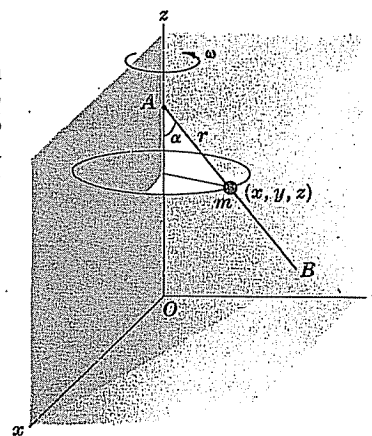
Mas, logo após a aplicação das *forças impulsivas*, $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = 0$, aproximadamente. Assim, (1) fica $T = \mathscr{I}^2/2m$.

PROBLEMAS DIVERSOS

11.26. Na fig. 11-9, AB é um fio reto e sem atrito fixo no ponto A sobre um eixo vertical OA, tal que AB gire em torno de OA com velocidade angular ω. Uma conta de massa m é obrigada a mover-se sobre o fio. (*a*) Ache o lagrangeano. (*b*) Escreva as equações de Lagrange. (*c*) Determine o movimento em um instante qualquer.

(*a*) Seja r a distância da conta até o ponto A do fio, no instante t. As coordenadas retangulares da conta são dadas por

Fig. 11-9

$$x = r\,\text{sen}\,\alpha\cos\omega t$$
$$y = r\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\omega t$$
$$z = h - r\cos\alpha$$

onde é admitido que, em $t = 0$, o fio esteja no plano xz e que a distância de O a A seja h.

A energia cinética da conta é

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}m\{(\dot{r} \text{ sen } \alpha \cos \omega t - \omega r \text{ sen } \alpha \text{ sen } \omega t)^2 + (\dot{r} \text{ sen } \alpha \text{ sen } \omega t + \omega r \text{ sen } \alpha \cos \omega t)^2 + (-\dot{r} \cos \alpha)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \text{ sen}^2 \alpha)$$

A energia potencial, tomando o plano xy como nível de referência, é $V = mgz = mg(h - r \cos \alpha)$. Então, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \text{ sen}^2 \alpha) - mg(h - r\cos\alpha)$$

(*b*) Tem-se

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m\omega^2 r \text{ sen}^2 \alpha + mg \cos \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

e a equação de Lagrange é $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0$ ou

$$m\ddot{r} - (m\omega^2 r \text{ sen}^2 \alpha + mg \cos \alpha) = 0$$

isto é,
$$\ddot{r} - (\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha) r = g \cos \alpha \tag{1}$$

(*c*) A solução geral da equação (1), com o lado direito trocado por zero, é

$$c_1 e^{(\omega \text{ sen } \alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \text{ sen } \alpha)t}$$

Como o lado direito de (1) é uma constante, uma solução particular é $\dfrac{-g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}$. Assim, a solução geral de (1) é

$$r = c_1 e^{(\omega \text{ sen } \alpha)t} + c_2 e^{-(\omega \text{ sen } \alpha)t} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha} \tag{2}$$

Este resultado pode ser escrito também em termos de funções hiperbólicas, como

$$r = c_3 \cosh(\omega \text{ sen } \alpha)t + c_4 \text{ sen h } (\omega \text{ sen } \alpha)t - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha} \tag{3}$$

11.27. Considere que, no probl. 11.26, a conta parta do repouso em *A*. Quanto tempo ela levará para alcançar a extremidade *B* do fio, admitindo que o comprimento do fio seja l?

Como a conta parte do repouso em $t = 0$, tem-se $r = 0$, $\dot{r} = 0$ em $t = 0$. Então, da equação (2) do probl. 11.26,

$$c_1 + c_2 = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha} \quad \text{e} \quad c_1 - c_2 = 0$$

Assim, $c_1 = c_2 = \dfrac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}$ e (2) do probl. 11.26 fica

$$r = \frac{g \cos \alpha}{2\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}\{e^{(\omega \text{ sen } \alpha)t} + e^{-(\omega \text{ sen } \alpha)t}\} - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha} \tag{1}$$

ou
$$r = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}\{\cosh(\omega \text{ sen } \alpha)t - 1\} \tag{2}$$

a qual pode ser obtida também da equação (3) do probl. 11.26. Quando $r = l$, (2) fica

$$\cosh(\omega \text{ sen } \alpha)t = 1 + \frac{l\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}{g \cos \alpha}$$

$$t = \frac{1}{\omega \text{ sen } \alpha}\cosh^{-1}\left(1 + \frac{l\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega \text{ sen } \alpha}\ln\left\{\left(1 + \frac{l\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha}\right) + \sqrt{\left(1 + \frac{l\omega^2 \text{ sen}^2 \alpha}{g \cos^2 \alpha}\right)^2 - 1}\right\}$$

11.28. Um pêndulo duplo [veja o probl. 11.1 (*c*) e a fig. 11.3] vibra em um plano vertical. (*a*) Escreva o lagrangeano do sistema. (*b*) Obtenha as equações para o movimento.

(*a*) As equações de transformação dadas no probl. 11.2,

$$x_1 = l_1 \cos \theta_1 \qquad y_1 = l_1 \text{ sen } \theta_1$$
$$x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \qquad y_2 = l_1 \text{ sen } \theta_1 + l_2 \text{ sen } \theta_2$$

levam a

$$\dot{x}_1 = -l_1\dot{\theta}_1 \text{ sen } \theta_1 \qquad \dot{y}_1 = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1$$
$$\dot{x}_2 = -l_1\dot{\theta}_1 \text{ sen } \theta_1 - l_2\dot{\theta}_2 \text{ sen } \theta_2 \qquad \dot{y}_2 = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

A energia cinética do sistema é

$$T = \tfrac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \tfrac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

A equação potencial do sistema [tomando como nível de referência um plano distante $l_1 + l_2$ abaixo do ponto de suspensão da fig. 11.3] é

$$V = m_1 g[l_1 + l_2 - l_1 \cos \theta_1] + m_2 g[l_1 + l_2 - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2)]$$

Então, o lagrangeano é

$$L = T - V$$
$$= \tfrac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)] - m_1 g[l_1 + l_2 - l_1\cos\theta_1] - m_2 g[l_1 + l_2 - (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)] \tag{1}$$

(*b*) As equações de Lagrange associadas a θ_1 e θ_2 são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \tag{2}$$

De (1) acha-se

$$\partial L/\partial \theta_1 = -m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$
$$\partial L/\partial \dot\theta_1 = m l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1^2 \dot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2)$$
$$\partial L/\partial \theta_2 = m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$
$$\partial L/\partial \dot\theta_2 = m_2 l_2^2 \dot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)$$

Assim, a equação (2) fica

$$m_1 l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)$$
$$= -m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_1 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 g l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

e

$$m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)$$
$$= m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

que se reduzem, respectivamente, a

$$(m_1+m_2) l_1^2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot\theta_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -(m_1+m_2) g l_1 \operatorname{sen}\theta_1 \quad (3)$$

e $$m_2 l_2^2 \ddot\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2)\, m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -m_2 g l_2 \operatorname{sen}\theta_2 \quad (4)$$

11.29. Escreva as equações do probl. 11.28, para o caso em que $m_1 = m_2 = m$ e $l_1 = l_2 = l$.

Fazendo $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ nas equações (3) e (4) do probl. 11.28 e simplificando, elas podem ser escritas

$$2l\ddot\theta_1 + l\ddot\theta_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + l\dot\theta_2^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -2g \operatorname{sen}\theta_1 \quad (1)$$
$$l\ddot\theta_1 \cos(\theta_1-\theta_2) + l\ddot\theta_2 - l\dot\theta_1^2 \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2) = -g \operatorname{sen}\theta_2 \quad (2)$$

11.30. Obtenha as equações do probl. 11.29, para o caso em que as oscilações podem ser consideradas de pequena amplitude.

Usando-se as aproximações $\operatorname{sen}\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ e negligenciando os termos que envolvem $\dot\theta^2\theta$, as equações (1) e (2) do probl. 11.29 ficam

$$2l\ddot\theta_1 + l\ddot\theta_2 = -2g\theta_1$$
$$l\ddot\theta_1 + l\ddot\theta_2 = -g\theta_2$$

11.31. Ache (*a*) as frequencias normais e (*b*) os modos normais correspondentes às oscilações pequenas do pêndulo duplo.

(*a*) Considere $\theta_1 = A_1 \cos\omega t$, $\theta_2 = A_2 \cos\omega t$ ou $A_1 e^{i\omega t}$, $A_2 e^{i\omega t}$ nas equações do probl. 11.30. Elas podem ser escritas como

$$\left.\begin{array}{l} 2(g-l\omega^2)A_1 - l\omega^2 A_2 = 0 \\ -l\omega^2 A_1 + (g-l\omega^2)A_2 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Para que A_1 e A_2 sejam diferentes de zero, deve-se ter o determinante dos coeficientes igual a zero, i.e.,

$$\begin{bmatrix} 2(g-l\omega^2) & -l\omega^2 \\ -l\omega^2 & g-l\omega^2 \end{bmatrix} = 0$$

ou $l^2\omega^4 - 4lg\omega^2 + 2g^2 = .$ Resolvendo, encontra-se

$$\omega^2 = \frac{4lg \pm \sqrt{16l^2g^2 - 8l^2g^2}}{2l^2} = \frac{(2\pm\sqrt{2})g}{l}$$

ou $$\omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})g}{l}, \quad \omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})g}{l} \quad (2)$$

(*a*) Assim, as frequências normais são dadas por

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})g}{l}} \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})g}{l}} \quad (3)$$

(*b*) Substituindo $\omega^2 = \omega_1^2 = (2+\sqrt{2})g/l$ nas equações (1) do item (*a*) obtém-se

$$A_2 = -\sqrt{2}A_1 \quad (4)$$

Isto corresponde ao modo normal pelo qual os bulbos se movem em *direções opostas.*

Substituindo $\omega^2 = \omega_2^2 = (2-\sqrt{2})g/l$ nas equações (1) do item (*a*) obtém-se

$$A_2 = \sqrt{2}A_1 \quad (5)$$

Isto corresponde ao modo normal no qual os bulbos se movem nas *mesmas direções*

11.32. (*a*) Ache o lagrangeano para o movimento de um pião simétrico [veja o probl. 10.25] e (*b*) obtenha as equações do movimento.

(*a*) A energia cinética em termos dos ângulos de Euler [veja o probl. 10.24] é

$$T = \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 \quad (1)$$

A energia potencial é $\qquad V = mgl\cos\theta \quad (2)$

Como pode ser visto na fig. 10-18, a distância $OC = l$ e a altura do centro de massa C acima do plano xy é, portanto, $l\cos\theta$. Assim,

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi^2 \operatorname{sen}^2\theta + \dot\theta^2) + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos \quad (3)$$

(*b*)
$$\partial L/\partial\theta = I_1\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)(-\dot\phi\operatorname{sen}\theta) + mgl\operatorname{sen}\theta$$
$$\partial L/\partial\dot\theta = I_1\dot\theta$$
$$\partial L/\partial\phi = 0$$
$$\partial L/\partial\dot\phi = I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta$$
$$\partial L/\partial\psi = 0$$
$$\partial L/\partial\dot\psi = I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)$$

Então, as equações de Lagrange são

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \phi}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}\right)-\frac{\partial L}{\partial \psi}=0$$

ou $I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\dot\phi\operatorname{sen}\theta - mgl\operatorname{sen}\theta = 0$ (4)

$$\frac{d}{dt}[I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta] = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}[I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)] = 0 \quad (6)$$

11.33. Use os resultados do probl. 11.32 para obter as equações (*a*) do probl. 10.29 e (*b*) do probl. 10.27(*a*),

(*a*) Das equações (5) e (6) do probl. 11.32, obtém-se, por integração,

$$I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta = \text{constante} = K \quad (1)$$

$$\dot\phi\cos\theta+\dot\psi = A \quad (2)$$

Usando-se (2) em (1), encontra-se $I_1\dot\phi\operatorname{sen}^2\theta + I_3A\cos\theta = K$

(*b*) Usando-se (2) na equação (4) do probl. 11.32, obtém-se

$$I_1\ddot\theta - I_1\dot\phi^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_3A\dot\phi\operatorname{sen}\theta = mgl\operatorname{sen}\theta$$

11.34. Derive as equações de Euler do movimento para um corpo rígido, lançando mão das equações de Lagrange.

A energia cinética em termos dos ângulos de Euler é [veja o probl. 10.24.]

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)\\ &= \tfrac{1}{2}I_1(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)^2 + \tfrac{1}{2}I_2(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)^2 +\\ &\quad + \tfrac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)^2 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \partial T/\partial\psi &= I_1(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi + \dot\theta\cos\psi)(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)\\ &\quad + I_2(\dot\phi\operatorname{sen}\theta\cos\psi - \dot\theta\operatorname{sen}\psi)(-\dot\phi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\psi - \dot\theta\cos\psi)\\ &= I_1\omega_1\omega_2 + I_2(\omega_2)(-\omega_1) = (I_1-I_2)\omega_1\omega_2\\ \partial T/\partial\dot\psi &= I_3(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi) = I_3\omega_3 \end{aligned}$$

E, pelo probl. 11.10, a equação de Lagrange correspondente a ψ é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = \Phi_\psi$$

ou

$$I_3\dot\omega_3 + (I_2-I_1)\omega_1\omega_2 = \Phi_\psi \quad (1)$$

Esta é a terceira equação de Euler no item (22), da introdução do cap. 10. O valor Φ_ψ representa a força generalizada, correspondente à rotação ψ em torno de um eixo e fisicamente representa a componente Λ_3 do torque em torno deste eixo [veja o probl. 11.102].

As equações restantes

$$I_1\dot\omega_1 + (I_3-I_2)\omega_2\omega_3 = \Lambda_1 \quad (2)$$

$$I_2\dot\omega_2 + (I_1-I_3)\omega_3\omega_1 = \Lambda_2 \quad (3)$$

podem ser obtidas por considerações de simetria, com a permutação dos itens. Elas não são obtidas diretamente pelo uso das equações de Lagrange correspondentes a θ e ϕ, mas delas podem ser deduzidas [veja o probl. 11.79].

11.35. Uma conta desliza sem atrito sobre um fio, na forma de uma ciclóide (fig. 11.10), com as equações

$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = a(1+\cos\theta)$$

onde $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Ache (*a*) a função lagrangeana, (*b*) a equação do movimento.

(*a*) Energia cinética $= T = \tfrac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2)$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}ma^2\{[(1-\cos\theta)\dot\theta]^2 + [-\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta]^2\}\\ &= ma^2(1-\cos\theta)\dot\theta^2 \end{aligned}$$

Energia potencial $V = mgy = mga(1+\cos\theta)$

Então,

lagrangeano $= L = T - V = ma^2(1-\cos\theta)\dot\theta^2 - mga(1+\cos\theta)$

(*b*) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, i.e. $\dfrac{d}{dt}[2ma^2(1-\cos\theta)\dot\theta] - [ma^2\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 + mga\operatorname{sen}\theta] = 0$

ou

$$\frac{d}{dt}[(1-\cos\theta)\dot\theta] - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 - \frac{g}{2a}\operatorname{sen}\theta = 0$$

que pode ser escrita $(1-\cos\theta)\ddot\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta^2 - \dfrac{g}{2a}\operatorname{sen}\theta = 0$

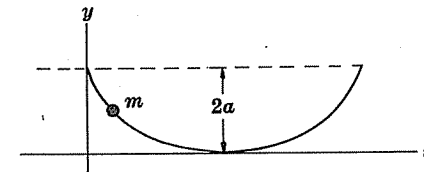



Fig. 11-10

11.36. (*a*) Mostre que a equação do movimento obtida no item (*b*) do probl. 11.35 pode ser escrita como

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0 \quad \text{onde} \quad u = \cos(\theta/2)$$

e, assim, (*b*) mostra que a conta oscila com período de $2\pi\sqrt{4a/g}$.

(*a*) Se $u = \cos(\theta/2)$,

$$\frac{du}{dt} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta/2)\dot\theta, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(\theta/2)\ddot\theta - \tfrac{1}{4}\cos(\theta/2)\dot\theta^2$$

Assim, $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{g}{4a}u = 0$ é a mesma que

$$-\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,(\theta/2)\ddot{\theta} - \tfrac{1}{4}\cos(\theta/2)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{4a}\cos(\theta/2) = 0$$

que pode ser escrita como

$$\ddot{\theta} + \tfrac{1}{2}\cot(\theta/2)\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\cot(\theta/2) = 0 \qquad (1)$$

Como $\cot(\theta/2) = \frac{\cos(\theta/2)}{\text{sen}\,(\theta/2)} = \frac{2\,\text{sen}\,(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\,\text{sen}^2\,(\theta/2)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}$

segue-se que esta equação (1) é a mesma que a obtida no probl. 11.35(*b*).

(*b*) A solução da equação é

$$u = \cos(\theta/2) = c_1 \cos\sqrt{4a/g}\,t + c_2\,\text{sen}\,\sqrt{4a/g}\,t,$$

de onde se pode ver que $\cos(\theta/2)$ volta ao seu valor original após um tempo $2\pi\sqrt{4a/g}$, que é o período pedido. Note-se que este período é o mesmo que o de um pêndulo simples com comprimento $l = 4a$.

Uma aplicação disto é o *pêndulo cicloidal*. Veja o probl. 4.86.

11.37. Obtenha as equações para a esfera rolante do probl. 9.42, usando a equação de Lagrange.

Refira-se à fig. 9.23, na qual ϕ e ψ representam as coordenadas generalizadas. Como a esfera de raio $CP = a$ rola sem deslizamento sobre a esfera de raio $OP = b$, tem-se

$$b\,d\phi/dt = a\,d\psi/dt \quad \text{ou} \quad b\dot{\phi} = a\dot{\psi}$$

mostrando que, se $\phi = 0$ quando $\psi = 0$, então

$$b\phi = a\psi \qquad (1)$$

Assim, ϕ e ψ [e também $d\phi$ e $d\psi$ ou $\delta\phi$ e $\delta\psi$] não são independentes.

A energia cinética da esfera rolante é

$$T = \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}ma^2)(\dot{\phi} + \dot{\psi})^2$$

usando o fato de que $I = \frac{2}{5}ma^2$ é o momento de inércia da esfera em torno de um eixo horizontal que passa pelo centro de massa.

A energia potencial da esfera rolante [tomando o plano horizontal por O como nível de referência] é

$$V = mg(a+b)\cos\phi$$

Assim, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(a+b)^2\dot{\phi}^2 + \tfrac{1}{5}ma^2(\dot{\phi} + \dot{\phi})^2 - mg(a+b)\cos\phi \qquad (2)$$

Foram usadas as equações de Lagrange (16), da introdução deste capítulo, para sistemas não-holonômicos. De (1), tem-se

$$b\,\delta\phi - a\,\delta\psi = 0 \qquad (3)$$

tal que, se chamarmos $q_1 = \phi$ e $q_2 = \psi$ e compararmos com a equação (7) do probl. 11.18, encontraremos

$$A_1 = b, \quad A_2 = -a \qquad (4)$$

Assim, as equações (16), da introdução deste capítulo ficam

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \lambda_1 b \qquad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = -\lambda_1 a \qquad (6)$$

A substituição de (2) em (5) e (6) leva a

$$m(a+b)^2\ddot{\phi} + \tfrac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) - mg(a+b)\,\text{sen}\,\phi = \lambda_1 b \qquad (7)$$
$$\tfrac{2}{5}ma^2(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) = -\lambda_1 a \qquad (8)$$

Substituindo $\psi = (b/a)\phi$ de (1) em (7) e (8), acharemos

$$m(a+b)^2\ddot{\phi} + \tfrac{2}{5}ma^2(1 + b/a)\ddot{\phi} - mg(a+b)\,\text{sen}\,\phi = \lambda_1 b \qquad (9)$$
$$\tfrac{2}{5}ma^2(1 + b/a)\ddot{\phi} = -\lambda_1 a \qquad (10)$$

Ora, de (10) temos

$$\lambda_1 = -\tfrac{2}{5}m(a+b)\ddot{\phi}$$

e, usando isto em (9), fica, após simplificação e solução em $\ddot{\phi}$,

$$\ddot{\phi} = \frac{5g}{7(a+b)}\,\text{sen}\,\phi$$

Esta é a mesma equação que a (2) do probl. 9.42, com $\phi = \pi/2 - \theta$. Para achar o ângulo pedido, no qual as esferas não se tocam mais, ver o probl. 11.104.

11.38. (*a*) Resolva as equações do movimento obtidas no probl. 11.24, e (*b*) interprete fisicamente.

Da primeira das equações (12) do probl. 11.24, tem-se

$$x = \text{constante} = 0 \qquad (1)$$

pois $x = 0$ em $t = 0$. Igualmente, da segunda das equações (12) tem-se

$$y = \frac{\mathcal{J}}{4m}t \qquad (2)$$

pois $y = 0$ em $t = 0$.

Da terceira das equações (12), acha-se, por separação de variáveis,

$$\sec\theta_1\, d\theta_1 = -\frac{3\mathscr{F}}{8ml}\,dt$$

ou, integrando-se,

$$\ln \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right) = -\frac{3\mathscr{F}t}{8ml} + c_1$$

i.e.,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_1}{2}\right) = c_2 e^{3\mathscr{F}t/8ml}$$

Assim, como $\theta_1 = \pi/2$ em $t = 0$, tem-se $c_2 = 0$. Isto significa que, em todo instante, deve-se ter $\theta_1 = \pi/2$.

Da quarta das equações (12) no probl. 11.24, tem-se, igualmente,

$$\sec\theta_2\, d\theta_2 = \frac{3\mathscr{F}}{8ml}\,dt$$

ou, integrando-se,

$$\ln \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{3\mathscr{F}t}{8ml} + c_3$$

i.e.,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2}\right) = c_4 e^{-3\mathscr{F}t/8ml}$$

Ora, quando $t = 0$, $\theta_2 = 0$ tal que $c_4 = 1$. Então,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_2}{2}\right) = e^{-3\mathscr{F}t/8ml} \quad \text{ou} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{tg}^{-1}(e^{-3\mathscr{F}t/8ml})$$

(*b*) As equações (1) e (2) mostram que o centro se move ao longo do eixo y, com velocidade constante $\mathscr{F}/4m$. As hastes AD e BC estão sempre paralelas ao eixo y, enquanto as hastes AB e CD giram lentamente, até que, finalmente, $[t \to \infty]$ o romboedro entra em colapso, de modo que tôdas as quatro hastes estarão sôbre o eixo y.

Problemas Propostos

COORDENADAS GENERALIZADAS E EQUAÇÕES DE TRANSFORMAÇÃO

11.39. Dê um conjunto de coordenadas generalizadas necessárias para especificar completamente o movimento de cada um dos itens seguintes:

(*a*) uma conta forçada a mover-se sobre um fio circular;
(*b*) uma partícula obrigada a mover-se sobre uma esfera;
(*c*) um pêndulo composto [ver introdução do novo capítulo];
(*d*) uma máquina de Atwood [veja o probl. 3.22];
(*e*) um disco circular rolando sobre um plano horizontal;
(*f*) um cone rolando sobre um plano horizontal.

11.40. Escreva as equações de transformação para o movimento de um pêndulo triplo em termos de um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas.

11.41. Uma partícula move-se na superfície de cima de um parabolóide de revolução sem atrito, cuja equação é $x^2 + y^2 = cz$. Escreva as equações de transformação, para o movimento da partícula, em termos de um conjunto apropriado de coordenadas generalizadas.

11.42. Escreva as equações de transformação para o movimento de uma partícula constrangida a se mover sobre uma esfera.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS MECÂNICOS

11.43. Classifique cada um dos seguintes itens em (i) escleronômicos ou reonômicos, (ii) holonômicos ou não, e (iii) conservativos ou não:

(*a*) um cilindro horizontal de raio a, rolando sem deslizamento dentro de um cilindro horizontal e oco, de raio $b > a$;
(*b*) um cilindro rolando [e, possivelmente, deslizando] por um plano inclinado de ângulo α;

(*c*) uma esfera rolando dentro de outra esfera que rola também sobre um plano horizontal, com velocidade uniforme;

(*d*) uma partícula forçada a mover-se ao longo de uma linha, sob influência de uma força que é inversamente proporcional ao quadrado de sua distancia a um ponto fixo e uma força de amortecimento proporcional ao quadrado de sua velocidade instantânea.

Resp. (*a*) escleronômico, holonômico e conservativo
(*b*) escleronômico, não-holonômico e conservativo
(*c*) reonômico, não-holonômico e conservativo
(*d*) escleronômico, holonômico e não-conservativo.

TRABALHO, ENERGIA CINÉTICA E FORÇAS GENERALIZADAS

11.44. Prove que, se as equações de transformação são dadas por $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(q_1, q_2, \ldots q_n)$, i.e. não envolvem o tempo explicitamente, então a energia cinética pode ser escrita como

$$T = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\,\dot{q}_\alpha\,\dot{q}_\beta$$

onde os $a_{\alpha\beta}$ são funções dos q_α.

11.45. Discuta o probl. 11.44, no caso em que as equações de transformação dependam explicitamente do tempo t.

11.46. Se $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$, onde λ é um parametro, então F é dito uma

função homogênea de ordem n. Determine quais [se alguma o for] das seguintes funções são homogeneas, dando a ordem, em cada caso:

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$
(b) $3x - 2y + 4z$
(c) $xyz + 2xy + 2xz + 2yz$
(d) $(x + y + z)/x$
(e) $x^3 \ \text{tg}^{-1}(y/x)$
(f) $4 \operatorname{sen} xy$
(g) $(x + y + z)/(x^2 + y^2 + z^2)$

Resp. (a) homogênea de ordem 2, (b) homogênea de ordem 1, (c) não homogênea, (d) homogênea de ordem zero, (e) homogênea de ordem 3, (f) não homogênea (g) homogênea, de ordem -1.

11.47. Se $F(x, y, z)$ é homogênea de ordem n [veja o probl. 11.46] prove que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF$$

Este é o chamado *teorema de Euler sôbre funções homogêneas.*

Sugestão: Diferencie ambos os lados da identidade $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n F(x, y, z)$ em relação a λ e faça $\lambda = 1$.]

11.48. Generalize o resultado do probl. 11.47.

11.49. Prove que, se as equações de transformação não dependem explicitamente do tempo t, e T é a energia cinética, então

$$\dot{q}_1\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} + \ldots + \dot{q}_n\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = 2T$$

11.50 Pode-se provar diretamente isto sem o uso do teorema de Euler sobre funções homogêneas (probl. 11.47)?

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

11.51. (a) Ache o lagrangeano para uma partícula de massa (m) em queda livre num campo gravitacional constante e (b) escreva as equações de Lagrange.
Resp. (a) $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\kappa x^2$, (b) $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

11.52. Faça o probl. 11.51 no caso do campo de força gravitacional variar proporcionalmente ao inverso do quadrado da distância a um ponto fixo O, admitindo que a partícula se move em uma linha reta por O.

11.53. Use as equações de Lagrange para descrever o movimento de uma partícula de massa m deslizando por um plano liso e inclinado de ângulo α.

11.54. Use as equações de Lagrange para descrever o movimento de um projétil lançado com velocidade v_0 e fazendo um ângulo α com a horizontal.

11.55. Use as equações de Lagrange para resolver o problema (a) do oscilador harmônico bidimensional e (b) do tridimensional.

11.56. Uma partícula de massa m está conectada a um ponto P, fixo sobre um plano horizontal por um fio de comprimento l. O plano gira com velocidade angular ω constante em torno de um eixo vertical pelo ponto O do plano, onde $OP = a$.

(a) Ache o lagrangeano do sistema. (b) Escreva as equações do movimento da partícula.

11.57. As coordenadas retangulares (x, y, z), que definem a posição da massa m movendo-se em um campo de força de potencial V, são dadas em termos das coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) pelas equações de transformação

$$x = r \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \quad z = r\cos\phi$$

Use as equações de Lagrange para achar as equações do movimento.

Resp.
$$m[\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \quad r\dot{\theta}^2\cos^2\phi] = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$m\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) + r^2\dot{\theta}^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}\operatorname{sen}^2\phi) = -\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

11.58. Faça o probl. 11.56 considerando que a partícula não se move necessariamente em um linha reta por O.

11.59. Faça o probl. 4.23 usando as equações de Lagrange.

EQUAÇÕES DE LAGRANGE PARA SISTEMAS NÃO-HOLONÔMICOS

11.60. (a) Faça o probl. 11.20 trocando o parabolóide pelo cone $x^2 + y^2 = c^2z^2$. (b) Qual a modificação que deve ser feita no probl. 11.21, neste caso?

11.61. Use o método das equações de Lagrange para sistemas não-holonômicos na solução do problema de uma partícula de massa m que desliza por um plano sem atrito e inclinado de um ângulo α.

11.62. Faça o probl. 3.74 usando o método das equações de Lagrange para sistemas não-holonômicos.

EQUAÇÕES DE LAGRANGE COM FORÇAS IMPULSIVAS

11.63. Uma haste de comprimento l e massa M está em repouso sobre uma mesa horizontal e sem atrito. Um impulso de magnitude $\mathscr{J}$ é aplicado em uma extremidade A da haste e a ela perpendicular. Prove que (a) a velocidade dada à extremidade A é $4\mathscr{J}/M$, (b) a velocidade do centro de massa é $\mathscr{J}/M$ e (c) a haste gira em torno do centro de massa, com velocidade angular de magnitude $6\mathscr{J}/Ml$.

11.64. Na fig. 11.11, AB e BC representam duas hastes uniformes, tendo o mesmo comprimento l e massa M pivotados sem atrito em B e em repouso sôbre um plano horizontal sem atrito. Um impulso é aplicado a C normalmente a BC e na direção indicada na fig. 11.11, tal que a velocidade inicial do ponto C seja v_0. Ache (a) a velocidade inicial dos pontos A e B, e (b) as magnitudes das velocidades angulares iniciais de AB e BC em torno de seus centros de massa.
Resp. (a) $v_0/7, -2v_0/7$; (b) $3v_0/7l; -9v_0/7l$

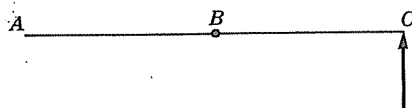



Fig. 11-11

11.65. Prove que a energia cinética total desenvolvida pelo sistema do probl. 11.64 após o impulso é $\frac{1}{7}Mv_0^2$.

11.66. Um quadrado de lado a e massa M, formado de quatro barras uniformes que são pivotadas sem atrito em suas extremidades, repousa sobre um plano sem atrito e horizontal. Um impulso é aplicado em um vértice, na direção da diagonal pelo vértice tal que ao vértice é dada uma velocidade de magnitude v_0. Prove que as hastes se movem em torno de seus centros de massa, com velocidade angular $3v_0/4a$.

11.67. (*a*) Se $\mathscr{I}$ for a magnitude do impulso aplicada ao vértice no probl. 11.66, prove que a energia cinética desenvolvida pelas hastes é dada por $5\mathscr{I}^2/4M$. (*b*) Quanto vale esta energia cinética em termos de v_0? (*c*) A direção do impulso faz alguma diferença? Explique.

11.68. No probl. 11.24 considere que o impulso seja aplicado no centro de uma das hastes e em uma direção perpendicular à haste. Prove que a energia cinética desenvolvida é $\mathscr{I}^2/8m$.

PROBLEMAS DIVERSOS

11.69. Uma partícula de massa m move-se dentro de uma semi-esfera de raio a e lisa, tendo o seu vértice sobre um plano horizontal. Com que velocidade horizontal deve a partícula ser projetada de modo que permaneça em um círculo horizontal, a uma altura h acima do vértice?

11.70. Uma partícula de massa m é forçada a mover-se dentro de um fino tubo oco sem atrito [veja a fig. 11.12], que está girando com velocidade angular ω

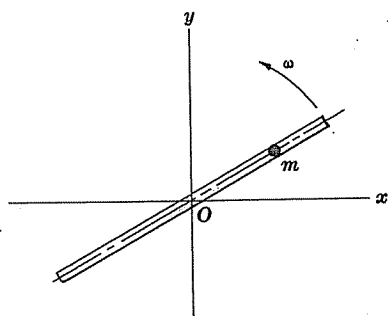



Fig. 11-12

em um plano horizontal xy e em torno de um eixo vertical fixo por O. Usando as equações de Lagrange, descreva o movimento.

11.71. Faça o probl. 11.70, considerando que o plano xy seja vertical.

11.72. Uma partícula de massa m em um campo de força central tem potencial $V(r)$, onde r é a distância do centro de força. Usando coordenadas esféricas, (*a*) ache o lagrangeano e (*b*) determine as equações do movimento. Pode-se concluir destas equações que o movimento ocorre em um plano [compare com o probl. 5.1]?

11.73. Uma partícula move-se sobre um fio horizontal sem atrito, de raio a, sob a ação de uma força resistiva que é proporcional à sua velocidade instantânea. Se à partícula for dada uma velocidade inicial v_0, ache a posição da partícula em um instante qualquer t.

Resp. $\theta = (mv_0/\kappa)(1 - e^{-\kappa t/ma})$, onde θ é o ângulo que o raio até a massa m descreve em relação a um raio fixo de modo que $\theta = 0$ em $t = 0$ e κ é a constante de proporcionalidade.

11.74. Faça o probl. 11.73, considerando que a força seja proporcional ao quadrado da velocidade instantânea.

Resp. $\theta = \dfrac{m}{\kappa a}\ln\left(\dfrac{m + \kappa v_0 t}{m}\right)$

11.75. Um pendulo esférico é fixo ao ponto O, mas é livre de mover-se em qualquer direção. Escreva as equações do movimento.

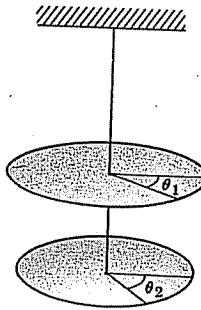
11.76. Faça o probl. 9.29 usando as equações de Lagrange.

11.77. Faça o probl. 11.20 considerando que o parabolóide de revolução seja substituído pelo parabolóide elíptico $az = bx^2 + cy^2$, onde a, b, c são constantes positivas.

11.78. Prove que a força generalizada correspondente ao ângulo de rotação em torno de um eixo representa fisicamente a componente do torque em torno deste eixo.

11.79. (*a*) Obtenha as equações de Lagrange correspondentes a θ e ϕ no probl. 11.34 e mostre que estas não são as mesmas equações (2) e (3) daquele problema.

(*b*) Mostre como obter as equações (2) e (3) do probl. 11.34, a partir das equações de Lagrange de (*a*).

11.80. Dois discos circulares de raio de giração K_1, K_2 e massas m_1, m_2, respectivamente, estão suspensos verticalmente por um fio de massa negligenciável [veja a fig. 11.13]. Eles são em movimento torcendo um ou ambos os discos em seus planos e, então, soltando-os. Sejam θ_1 e θ_2 os ângulos feitos com uma direção especificada.

(*a*) Prove que a energia cinética é

$$T = \tfrac{1}{2}(m_1K_1^2\dot{\theta}^2 + m_2K_2^2\dot{\theta}_2^2)$$

(*b*) Prove que a energia potencial é

$$V = \tfrac{1}{2}[\tau_1\theta_1^2 + \tau_2(\theta_2 - \theta_1)^2]$$

onde τ_1 e τ_2 são constantes de torção, i.e., os torques requeridos para girar os discos de um radiano.

Fig. 11-13

(*c*) Ache as equações de Lagrange para o movimento.

11.81. Resolva o sistema vibratório do probl. 11.80, achando (*a*) as frequências normais e (*b*) os modos normais de vibração.

11.82. Generalize os resultados dos probls. 11.80 e 11.81, para 3 ou mais discos.

11.83. (*a*) Prove que, se $m_1 \neq m_2$ e $l_1 \neq l_2$ no pêndulo duplo do probl. 11.28, então as frequências normais para pequenas oscilações são dadas por $\omega/2\pi$, donde

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[m_1(l_1 - l_2)^2 + m_2(l_1 + l_2)^2}}{2l_1l_2m_1}g$$

(*b*) Discuta os modos normais correspondentes às frequências em (*a*).

11.84. Examine o caso especial $l_1 = l_2$, $m_1 \neq m_2$ do probl. 11.83.

11.85. Use as equações de Lagrange para descrever o movimento de uma esfera de raio a rolando sobre a superfície interna de uma semi-esfera lisa e de raio $b > a$.

11.86. A uma partícula na superfície interna de um parabolóide de revolução sem atrito $az = x^2 + y^2$ e a uma altura H_1 acima do seu vértice é dada uma velocidade horizontal v_0. Ache o valor de v_0, de maneira que a partícula oscile entre os planos $z = H_1$ e $z = H_2$. *Resp.* $v_0 = \sqrt{2gH_2}$

11.87. Ache o período de oscilação no probl. 11.86.

11.88. A uma esfera de raio a é dada uma velocidade inicial v_0 para cima, em plano sem atrito e inclinado de um ângulo α, em uma direção que não seja ao longo da linha de maior inclinação. Prove que o seu centro descreve uma parábola.

11.89. Uma conta de massa m é forçada a mover-se sobre um fio circular horizontal e sem atrito de raio a, que está girando a uma velocidade angular ω em torno de um eixo vertical passando por um ponto do fio. Prove que a conta oscila como um pêndulo simples em relação ao fio.

11.90. Se uma partícula de massa m e carga e se move com velocidade v em um campo elétrico $\mathbf{E}$ e em um campo magnético $\mathbf{B}$, a força atuante sobre ela é dada por

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Em termos de um potencial escalar Φ e um potencial vetorial $\mathbf{A}$, o campo pode ser expresso pelas relações

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \partial\mathbf{A}/\partial t, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Prove que o lagrangeano que define o momento dessa partícula é

$$L = \tfrac{1}{2}mv^2 + e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - e\Phi$$

11.91. Faça o probl. 10.86, usando as equações de Lagrange.

11.92. Uma haste uniforme de comprimento l e massa M tem as suas extremidades forçadas a se moverem sobre um fio circular vertical e liso de raio $a > l/2$, que gira em torno do diâmetro vertical, com uma velocidade angular constante ω. Obtenha as equações para o movimento da haste.

11.93. Suponha que o potencial V dependa de $\dot{q}_\nu$, como também de q_ν. Prove que o valor

$$T + V - \sum \dot{q}_\nu \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_\nu}$$

é constante.

11.94. Use as equações de Lagrange para achar e resolver o problema de atração entre dois corpos, como foi discutido no cap. 5 [veja o exemplo, com campo de força inverso do quadrado, na introdução do cap. 5]

11.95. Ache a aceleração da massa de 5 gramas no sistema de polias da fig. 11.14.

Resp. $71g/622$

11.96. Um cilindro circular de raio a, tendo raio de giração K em relação ao seu centro, move-se para baixo, em um plano, inclinado de um ângulo α. Se o coeficiente de fricção for μ, use as equações de Lagrange para provar que o cilindro rolará sem deslizamento, se

$$\mu < \frac{K^2}{a^2 + K^2}\operatorname{tg}\alpha.$$ Discuta o caso em que μ não satisfaz a desigualdade.

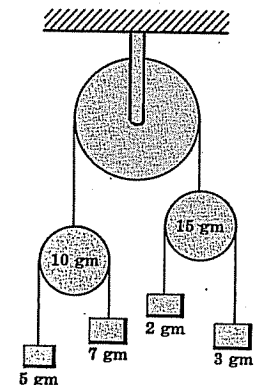
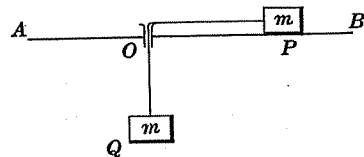



Fig. 11-14

11.97. Use as equações de Lagrange para resolver o probl. 8.27.

11.98. Descreva o movimento das hastes do probl. 11.64 em um instante qualquer

Fig. 11-15

11.99. Na fig. 11.15, AB representa um plano horizontal sem atrito tendo uma pequena abertura O. Um fio de comprimento l que passa por O tem em suas extremidades uma partícula P de massa m e uma partícula Q da mesma massa e que balança livremente. À partícula P é dada uma velocidade inicial de magnitude v_0 em ângulo reto com o fio OP quando o comprimento $OP = a$. Seja r a distância instantânea OP, enquanto θ é o ângulo entre OP e uma linha fixa que passa por O.

(*a*) Ache o lagrangeano do sistema.
(*b*) Escreva a equação diferencial para o movimento de P em termos de r.
(*c*) Ache a velocidade de P em uma posição qualquer.

Resp. (*a*) $L = \frac{1}{2}m[2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + mg(l-r)$
(*b*) $\ddot{r} = a^2v_0^2/r^2 - g$
(*c*) $\dot{r} = \sqrt{2av_0^2 + 2g(a-r) - 2a^2v_0^2/r}$

11.100. Faça o probl. 11.99 considerando que as massas das partículas P e Q sejam m_1 e m_2, respectivamente.

11.101. Prove que, se $v_0 = \sqrt{ag}$, a partícula P do probl. 11.99 permanece em equilíbrio estável no círculo de raio $r = a$ e que, se ela for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio, oscilará em torno desta posição, com um movimento harmônico simples de período $2\pi\sqrt{2a/3g}$.

11.102. Prove que o valor Φ_ψ no probl. 11.34 representa fisicamente a componente Λ_3 do torque.

11.103. Descreva o movimento do sistema (*a*) do probl. 11.63 e (*b*) do probl. 11.66, em um instante qualquer após o impulso ter sido aplicado.

11.104. Mostre como achar o ângulo no qual as esferas do probl. 11.37 se separam.

11.105. (*a*) Ache o lagrangeano para o pêndulo triplo da fig. 11.16.

(*b*) Ache as equações do movimento.

11.106. Obtenha as frequências normais e os modos normais para o pêndulo triplo do probl. 11.105, considerando pequenas oscilações.

11.107. Faça os probls. 11.105 e 11.106 para o caso onde as massas e comprimentos sejam diferentes.

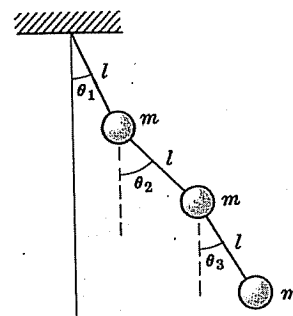
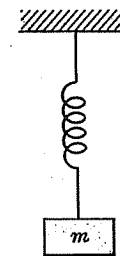



Fig. 11-16 Fig. 11-17

11.108. Um fio na vertical [fig. 11.17] tem uma constante κ e massa M. Se uma certa massa m for colocada sob mola e posta em movimento, use as equações de Lagrange para provar que o sistema moverá com movimento harmônico simples de período $2\pi\sqrt{(M + 3m)/3\kappa}$.

Capítulo 12

Teoria Hamiltoniana

MÉTODOS DE HAMILTON

No cap. 11 foi estudada uma formulação de Mecânica devida a Lagrange. Neste capítulo, estuda-se uma formulação devida a Hamilton, conhecida em seu conjunto como *métodos de Hamilton* ou *teoria de Hamilton*. Embora tal teoria possa ser usada para resolver problemas específicos de Mecânica, ela se mostra mais útil em suprir postulados fundamentais em campos como Mecânica Quântica, Mecânica Estatística e Mecânica Celeste.

O HAMILTONIANO

Da mesma maneira como a *função lagrangeana*, ou, sucintamente, o *lagrangeano*, é fundamental ao cap. 11, assim a *função hamiltoniana* ou, sucintamente, o *hamiltoniano*, é fundamental a este capítulo.

O hamiltoniano, simbolizado por H, é definido em termos do *lagrangeano* L como

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L \tag{1}$$

e deve ser expresso como uma função das coordenadas generalizadas q_α e momenta generalizados p_α. Para isto, as velocidades generalizadas $\dot{q}_\alpha$ devem ser eliminadas de (1), usando-se as equações de Lagrange [veja o probl. 12.3, por exemplo]. Em tal caso, a função H pode ser escrita como

$$H(p_1, \ldots, p_n, \quad q_1, \ldots, q_n, \ t) \tag{2}$$

ou, sucintamente, $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$, e é também chamada como o *hamiltoniano do sistema.*

EQUAÇÕES DE HAMILTON

Em termos do hamiltoniano, as equações do movimento do sistema podem ser escritas na forma simétrica

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \\ \dot{q}_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Estas são chamadas *equações canônicas de Hamilton* ou, sucintamente, *equações de Hamilton.* As equações servem para indicar que p_α e q_α estão sob as mesmas regras na formulação geral dos princípios mecânicos.

O HAMILTONIANO PARA SISTEMAS CONSERVATIVOS

Se um sistema for conservativo, o hamiltoniano H pode ser interpretado como a energia total (cinética e potencial) do sistema, i.e.,

$$H = T + V \tag{4}$$

Geralmente, isto dá um meio fácil de se determinar o hamiltoniano de um sistema.

COORDENADAS IGNORÁVEIS OU CÍCLICAS

Uma coordenada q_α que não aparece explícitamente no lagrangeano é chamada de *coordenada ignorável* ou *cíclica.* Em tal caso,

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{5}$$

assim p_α é uma constante, geralmente chamada de *constante do movimento.*

Em tal caso, também se tem que $\partial H/\partial q_\alpha = 0$.

ESPAÇO DE FASE

A formulação hamiltoniana dá uma simetria óbvia entre p_α e q_α, que se chamam *momentum* e *coordenadas de posição*, respectivamente. É, geralmente, útil imaginar um espaço de $2n$ dimensões, no qual um *ponto representativo* é indicado pelas $2n$ coordenadas

$$(p_1, \ldots, p_n \ q_1, \ldots, q_n) \tag{6}$$

Tal espaço é chamado um *espaço de fase* $2n$ dimensional ou espaço de fase *pq.*

Quando se conhece o estado de um sistema mecânico no instante t, i.e., todas as coordenadas de posição e de momentum, então isto corresponde a um ponto particular no espaço de fase. O inverso é verdadeiro, i.e., um ponto no espaço de fase especifica o estado do sistema mecânico. Enquanto o sistema mecânico se move em um espaço físico tridimensional, o ponto representativo descreve uma trajetória no espaço de fase, de acordo com as equações (3).

TEOREMA DE LIOUVILLE

Considere-se uma grande coleção de sistemas mecânicos conservativos tendo o mesmo hamiltoniano. Em tal caso, o hamiltoniano é a energia total e é constante, *i.e.,*

$$H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) = \text{constante} = E \tag{7}$$

que pode ser representado por uma superfície no espaço de fase.

Suponha-se que as energias totais de todos estes sistemas estão entre E_1 e E_2. Então, as trajetórias de todos estes sistemas no espaço de fase estarão entre as duas superfícies $H = E_1$ e $H = E_2$, como é indicado esquematicamente na fig. 12-1.

Como os sistemas têm condições iniciais diferentes, êles se moverão em trajetórias diferentes no espaço de fase. Imagina-se que os pontos iniciais estejam na região $\mathscr{R}_1$ da fig. 12-1 e que, após o tempo t, estes pontos ocupem a região $\mathscr{R}_2$. Por exemplo, o ponto representativo correspondente a um sistema particular move-se do ponto A ao ponto B. Da escolha de $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ é claro que os números de pontos representativos neles são os mesmos. O que não é tão óbvio é o seguinte teorema, chamado de *teorema de Liouville.*

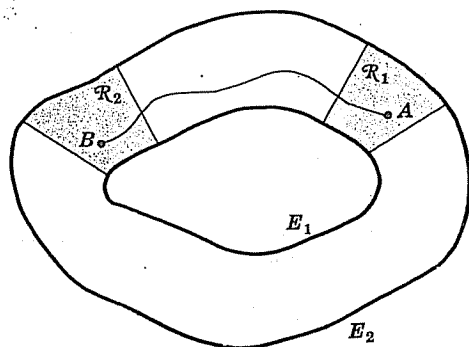



Fig. 12-1

Teorema 12.1: *Teorema de Liouville.* Os volumes $2n$ dimensionais de $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ são os mesmos ou, se for definido o número de pontos por unidade de volume como densidade, então a densidade é constante.

Pode-se pensar nos pontos de $\mathscr{R}_1$ como se fossem partículas de um fluido incompressível que se move de $\mathscr{R}_1$ para $\mathscr{R}_2$ no tempo t.

O CÁLCULO VARIACIONAL

Um problema que, geralmente, ocorre em Matemática é o de achar uma curva $y = Y(x)$ unindo os dois pontos onde $x = a$ e $x = b$ tal que a integral

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{8}$$

onde $y' = dy/dx$, é máxima ou mínima, também chamado de *valor extremo*. A curva em si é chamada *curva extrema*. Pode ser mostrado [veja o probl. 12.6] que a condição necessária para (8) ter um *valor extremo* é

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

que é, geralmente, chamada *equação de Euler.* Este problema e outros semelhantes são considerados pela parte da Matemática chamada de *Cálculo Variacional.*

PRINCÍPIOS DE HAMILTON

A semelhança óbvia de (9) com as equações de Lagrange leva-nos a considerar o problema de determinar as curvas extremas de

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt \tag{10}$$

ou, sucintamente,

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

onde $L = T - V$ é o lagrangeano de um sistema.

Pode-se mostrar que a condição necessária para uma curva extrema é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{11}$$

que são precisamente as equações de Lagrange. O resultado levou Hamilton a formular um princípio conhecido como

Princípio de Hamilton. Um sistema mecânico conservativo move-se do instante t_1 ao instante t_2 de tal maneira que

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{12}$$

algumas vezes chamada de *integral de ação,* tem um valor extremo. Como, geralmente, o valor extremo de (12) é mínimo, o princípio é, por vezes, referido como o *princípio de Hamilton da mínima ação.*

O fato de que a integral (12) é um valor extremo geralmente é simbolizado afirmando-se que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \tag{13}$$

onde δ é o símbolo variacional.

TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS OU DE CONTACTO

A facilidade da solução de muitos problemas em Mecânica depende, geralmente e em particular, das coordenadas generalizadas usadas. Conseqüentemente, é desejável examinar as transformações de um conjunto de coordenadas de posição e momentum para um outro. Por exemplo, se chamar-se de q_α e p_α as coordenadas de posição e de momentum anteriores, enquanto que de Q_α e P_α as coordenadas de posição e momentum posteriores, a transformação é

$$P_\alpha = P_\alpha(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t) \tag{14}$$

ou, sucintamente,

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \tag{15}$$

Restringe-se às transformações chamadas *canônicas* ou *transformações de contacto* para as quais exista uma função $\mathscr{H}$ chamada de Hamiltoniano nas novas coordenadas, de modo que

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_\alpha} \tag{16}$$

Em tal caso, refere-se, geralmente, a Q_α e P_α como *coordenadas canônicas.*

Os lagrangeanos nas coordenadas anteriores e posteriores são $L(p_\alpha, q_\alpha, t)$ e

$\mathscr{L}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ respectivamente. Eles estão relacionados com os Hamiltonianos $H(p_\alpha, q_\alpha, t)$ e $\mathscr{H}(P_\alpha, Q_\alpha, t)$ pelas equações

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \quad \mathscr{H} = \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathscr{L} \tag{17}$$

onde as somatórias estendem-se de $\alpha = 1$ a n.

CONDIÇÃO PARA QUE UMA TRANSFORMAÇÃO SEJA CANÔNICA

O seguinte teorema é interessante.

Teorema 12.2 A transformação

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \tag{18}$$

é canônica, se

$$\sum p_\alpha\, dq_\alpha - \sum P_\alpha\, dQ_\alpha \tag{19}$$

for uma diferencial exata.

FUNÇÕES GERADORAS

Pelo princípio de Hamilton, a transformação canônica (14) ou (15) deve satisfazer às condições de que $\int_{t_2}^{t_2} L\, dt$ e $\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt$ são ambas curvas extremas, i.e., deve-se ter simultaneamente

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad \text{e} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt = 0 \tag{20}$$

que serão satisfeitas, se houver uma função $\mathscr{G}$ tal que

$$\frac{d\mathscr{G}}{dt} = L - \mathscr{L} \tag{21}$$

Veja o probl. 12.11. Chama-se $\mathscr{G}$ de *função geradora*.

Admitindo que $\mathscr{G}$ é uma função, representada por $\mathscr{S}$, das coordenadas de posição q_α anteriores e das coordenadas de momentum P_α posteriores, assim como do tempo t, i.e.,

$$\mathscr{G} = \mathscr{S}(q_\alpha P_\alpha, t) \tag{22}$$

pode-se provar que [veja o probl. 12.13]

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + H \tag{23}$$

onde

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_\alpha} \tag{24}$$

Resultados semelhantes são obtidos, se a função geradora é uma função de outras coordenadas [veja o probl. 12.12].

A EQUAÇÃO DE HAMILTON E JACOBI

Se for possível achar-se uma transformação canônica fazendo $\mathscr{H} \equiv 0$ vê-se de (24) que P_α e Q_α serão constantes i.e., P_α e Q_α serão coordenadas ignoráveis. Assim,

por meio da transformação, torna-se possível achar p_α e q_α e, assim, determinar o movimento do sistema. O procedimento depende de se achar a função geradora certa. Da terceira equação de (23) vê-se que, fazendo $\mathscr{H} \equiv 0$, esta função geradora deve satisfazer à equação diferencial parcial

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + H(p_\alpha, q_\alpha, t) = 0 \tag{25}$$

ou

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + H\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q_\alpha}, q_\alpha, t\right) = 0 \tag{26}$$

Esta é a chamada *equação de Hamilton e Jacobi.*

A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE HAMILTON E JACOBI

Para se chegar ao resultado que se quer, deve-se achar uma solução da equação de Hamilton e Jacobi. Ora, como esta equação tem variáveis independentes num total de $n + 1$, i.e., $q_1, q_2, \ldots, q_n$ e t, tal solução chamada de *solução completa* envolverá $n + 1$ constantes. Omitindo uma constante aditiva arbitrária e denominando as n constantes restantes de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ [nenhuma das quais é aditiva], esta solução pode ser escrita como

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(q_1, q_2 \ldots, q_n, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, t) \tag{27}$$

Quando esta solução é obtida, podem ser determinadas as coordenadas do momentum anteriores por

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q_\alpha} \tag{28}$$

Também, se identificarmos as coordenadas do nôvo momentum P_α às constantes β_α, então

$$Q_\alpha = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \beta_\alpha} = \gamma_\alpha \tag{29}$$

onde γ_α, $\alpha = 1, \ldots, n$ são constantes.

Usando estes resultados, pode-se achar q_α como função de β_α, γ_α e t, o que dá o movimento do sistema.

CASO EM QUE O HAMILTONIANO É INDEPENDENTE DO TEMPO

Para se obter a solução completa da equação de Hamilton e Jacobi, é, normalmente, útil supor uma solução na forma

$$\mathscr{S} = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \ldots + S_n(q_n) + F(t) \tag{30}$$

onde cada função do lado direito depende somente de uma variável [veja o probl. 12.15 e o probl. 12.16]. Este método, normalmente chamado de *método da separação de variáveis*, é especialmente útil quando o Hamiltoniano não depende do tempo explíci-

tamente. Então, acha-se que $F(t) = -Et$, e, se a parte de $\mathscr{S}$ independente do tempo for representada por

$$S = S_1(q_1) + S_2(q_2) + \ldots + S_n(q_n) \tag{31}$$

a equação de Hamilton e Jacobi (26) reduz-se a

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, q_\alpha\right) = E \tag{32}$$

onde E é uma constante que representa a energia total do sistema.

A equação (32) pode também ser obtida diretamente, admitindo-se que a função geradora S seja independente do tempo. Em tal caso, as equações (23) e (24) são substituídas por

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial P_\alpha}, \quad \mathscr{H} = H = E \tag{33}$$

onde

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_\alpha} \tag{34}$$

INTEGRAIS DE FASE, VARIÁVEIS DE AÇÃO E DE ÂNGULO

Os métodos hamiltonianos são úteis na investigação de sistemas mecânicos que sejam periódicos. Em tal caso, as projeções do movimento de um ponto representativo, em um plano qualquer $p_\alpha\, q_\alpha$ do espaço de fase, serão uma curva fechada C_α. A integral de linha

$$J_\alpha = \oint_{C\alpha} p_\alpha\, dq_\alpha \tag{35}$$

é chamada de uma *integral de fase* ou *variável de ação*.

Pode-se mostrar [veja o probl. 12.17 e o probl. 12.18] que

$$S = S(q_1, \ldots, q_n, J_1, \ldots, J_n) \tag{36}$$

onde

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J_\alpha} \tag{37}$$

É costume representarem-se as coordenadas posteriores Q_α por w_α, tal que as equações (37) sejam substituídas por

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \quad w_\alpha = \frac{\partial S}{\partial J_\alpha} \tag{38}$$

Assim, as equações de Hamilton ficam [veja as equações (33) e (34)]

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial w_\alpha}, \quad \dot{w}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_\alpha} \tag{39}$$

onde $\mathscr{H} = E$; neste caso, depende sòmente das constantes J_α. Então, da segunda equação de (39)

$$w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha \tag{40}$$

onde f_α e c_α são constantes. Chama-se w_α de *variáveis de ângulo*. As frequências f_α são dadas por

$$f_\alpha = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_\alpha} \tag{41}$$

Veja os probls. 12.19 e 12.20.

Problemas Resolvidos

O HAMILTONIANO E AS EQUAÇÕES DE HAMILTON

12.1. Se o hamiltoniano $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, onde a somatória se estende de $\alpha = 1$ a n, for expresso como uma função das coordenadas q_α e dos momenta p_α, prove as *equações de Hamilton*

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

independentemente de H(*a*) não conter ou (*b*) conter a variável de tempo t explícita.

(*a*) *H não contém t explìcitamente.*

Tomando a diferencial de $H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$, tem-se

$$dH = \sum p_\alpha\, d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha \tag{1}$$

Então, usando o fato de que $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha$ e $\dot{p}_\alpha = \partial L/\partial q_\alpha$, isto reduz-se a

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha\, dq_\alpha \tag{2}$$

Mas, como H é expresso como função de p_α e q_α, tem-se

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha \tag{3}$$

Comparando (2) e (3), tem-se, como foi pedido,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

(*b*) *H contém t explìcitamente.*

Neste caso, as equações (1), (2) e (3) da parte (*a*) são substituídas pelas equações

$$dH = \sum p_\alpha\, d\dot{q}_\alpha + \sum \dot{q}_\alpha\, dp_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{4}$$

$$dH = \sum \dot{q}_\alpha\, dq_\alpha - \sum \dot{q}_\alpha\, dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \tag{5}$$

$$dH = \sum \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \sum \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{6}$$

Então, comparando (5) e (6), tem-se

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

12.2. Se o hamiltoniano H é independente de t explicitamente, prove que ele é (*a*) uma constante e que é (*b*) igual à energia total do sistema.

(*a*) Da equação (2) do probl. 12.1 tem-se

$$\frac{dH}{dt} = \sum \dot{q}_\alpha \dot{p}_\alpha - \sum \dot{p}_\alpha \dot{q}_\alpha = 0$$

Assim, H é uma constante representada por E.

(*b*) Pelo teorema de Euler sôbre funções homogêneas [veja o probl. 11.47],

$$\sum \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T$$

onde T é a energia cinética. Então, como $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{q}_\alpha = \partial T/\partial \dot{q}_\alpha$ [assumindo que o potencial V não depende de $\dot{q}_\alpha$], tem-se $\sum p_\alpha \dot{q}_\alpha = 2T$. Assim, como foi pedido,

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = 2T - (T - V) = T + V = E$$

12.3. Uma partícula move-se no plano xy sob influência de uma fôrça central dependendo sòmente de sua distância à origem. (*a*) Ache o hamiltoniano para o sistema. (*b*) Escreva as equações de Hamilton do movimento.

(*a*) Suponha que a partícula está localizada por suas coordenadas polares (r, θ) e que o potencial devido à fôrça central é $V(r)$. Como a energia cinética da partícula é $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r) \tag{1}$$

Tem-se $$p_r = \partial L/\partial \dot{r} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \partial L/\partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

pois que $$\dot{r} = p_r/m, \quad \dot{\theta} = p_\theta/mr^2 \tag{3}$$

Então, o hamiltoniano é dado por

$$H = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - \{\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)\}$$

$$= p_r\left(\frac{p_r}{m}\right) + p_\theta\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right) - \left\{\tfrac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \cdot \frac{p_\theta^2}{m^2r^4}\right) - V(r)\right\}$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r) \tag{4}$$

Note que esta é a energia total, expressa em têrmos de coordenadas e momenta.

(*b*) As equações de Hamilton são $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$, $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$

Assim, $$\dot{r} = \partial H/\partial p_r = p_r/m, \quad \dot{\theta} = \partial H/\partial p_\theta = p_\theta/mr^2 \tag{5}$$

$$\dot{p}_r = -\partial H/\partial r = p_\theta^2/mr^3 - V'(r), \quad \dot{p}_\theta = -\partial H/\partial_\theta = 0 \tag{6}$$

Note que as equações (5) são equivalentes às equações correspondentes (3).

O ESPAÇO DE FASE E O TEOREMA DE LIOUVILLE

12.4. Prove o teorema de Liouville, para o caso de um grau de liberdade.

Pode-se pensar no sistema mecânico como sendo descrito em têrmos do movimento de pontos representativos através de um elemento de volume no espaço de fase. No caso de um sistema mecânico com um grau de liberdade, tem-se um espaço de fases bidimensional (p, q) e o volume se reduz a um elemento área $dpdq$ [fig. 12-2].

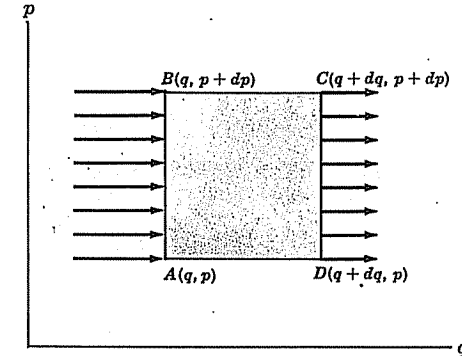



Fig. 12-2

Seja $\rho = \rho(p, q, t)$ a densidade dos pontos representativos, i.e., o número de pontos representativos por área unitária obtido por um procedimento de limite apropriado. Como a velocidade em módulo, com a qual os pontos representativos entram por AB é $\dot{q}$, o número de pontos representativos que entram por AB por unidade de tempo é

$$\rho\dot{q}\, dp \tag{1}$$

O número de pontos representativos que saem por CD é

$$\left\{\rho\dot{q} + \frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\, dq\right\} dp \tag{2}$$

Assim, o número dos que ficam no elemento é (1) menos (2), ou

$$-\frac{\partial}{\partial q}(\rho\dot{q})\, dp\, dq \tag{3}$$

Igualmente, os números de pontos representativos que entram por AD e saem por BC são, respectivamente,

$$\rho \dot{p}\, dq \quad \text{e} \quad \left\{\dot{p}p + \frac{\partial}{\partial p}(\rho \dot{p})\, dp\right\} dq$$

Assim, o número dos que ficam no elemento é

$$-\frac{\partial}{\partial p}(\rho \dot{p})\, dp\, dq \tag{4}$$

O aumento dos pontos representativos, somando (3) e (4), é

$$-\left\{\frac{\partial(\rho \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho \dot{p})}{\partial p}\right\} dp\, dq$$

Como isto é igual a $\frac{\partial \rho}{\partial t} dp\, dq$, deve-se ter $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\{\frac{\partial(\rho \dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial(\rho \dot{p})}{\partial p}\right\} = 0$

ou
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \rho}{\partial q}\dot{q} + \rho \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} + \frac{\partial \rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{5}$$

Ora, pelas equações de Hamilton, $\dot{p} = -\partial H/\partial q$, $\dot{q} = \partial H/\partial p$, tal que

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p\, \partial q}, \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{\partial^2 H}{\partial q\, \partial p}$$

Assim, como se considera que o hamiltoniano tenha derivadas de segunda ordem contínuas, segue-se que $\partial \dot{p}/\partial p = -\partial \dot{q}/\partial q$. Usando isto em (5), fica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \rho}{\partial p}\dot{p} = 0 \tag{6}$$

Ela pode, porém, ser escrita como $\qquad d\rho/dt = 0, \qquad (7)$
o que mostra que a densidade no espaço de fase é constante e fica provado o teorema de Liouville.

12.5. Prove o teorema de Liouville, para o caso geral.

No caso geral, o elemento de volume no espaço fase é

$$dV = dq_1 \ldots dq_n\, dp_1 \ldots dp_n$$

Da mesma maneira como no probl. 12.4, o aumento de pontos representativos em dV é achado como sendo

$$-\left\{\frac{\partial(\rho \dot{q}_1)}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial(\rho \dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_1)}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial(\rho \dot{p}_n)}{\partial p_n}\right\} dV$$

e, como isto é igual a $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$, deve-se ter

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \dot{q}_1)}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial(\rho \dot{q}_n)}{\partial q_n} + \frac{\partial(\rho \dot{p}_1)}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial(\rho \dot{p}_n)}{\partial p_n} = 0$$

ou
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\rho \dot{q}_\alpha)}{\partial q_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial(\rho \dot{p}_\alpha)}{\partial p_\alpha} = 0$$

Isto pode ser escrito como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \rho\left(\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha}\right) = 0 \tag{1}$$

Ora, pelas equações de Hamilton, $\dot{p}_\alpha = -\partial H/\partial q_\alpha$, $\dot{q}_\alpha = \partial H/\partial p_\alpha$ e, assim,

$$\frac{\partial \dot{p}_\alpha}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\, \partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\, \partial p_\alpha}$$

Então, $\partial \dot{p}_\alpha/\partial p_\alpha = -\partial \dot{q}_\alpha/\partial q_\alpha$ e (1) ficam

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) = 0 \tag{2}$$

i.e., $\qquad d\rho/dt = 0 \qquad (3)$

ou ρ = constante

Note que se usa o fato de que, se $\rho = \rho(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)$, então

$$\frac{d\rho}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \rho}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

CÁLCULO VARIACIONAL E O PRINCÍPIO DE HAMILTON

12.6. Prove que a condição necessária para que $I = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ seja um valor extremo máximo ou mínimo é $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

Considere que a curva que faz de I um valor extremo seja dada por

$$y = Y(x), \quad a \leqq x \leqq b \tag{1}$$

Então, $\qquad y = Y(x) + \varepsilon\eta(x) = Y + \varepsilon\eta, \qquad (2)$

onde ε é independente de x, é uma curva próxima a $x = a$ e $x = b$, se for escolhido $\eta(a) = \eta(b) = 0 \qquad (3)$

O valor de I para esta curva próxima é

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, Y + \varepsilon\eta, Y' + \varepsilon\eta')\, dx \tag{4}$$

Isto é um valor extremo para $\varepsilon = 0$. Uma condição necessária para que isto

seja assim é que $\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$. Mas, por diferenciação sob o sinal de integração, supondo que esta condição seja válida, acha-se

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx = 0$$

que pode ser escrita, integrando por partes, como

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}\eta\, dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) dx$$

$$= \int_a^b \eta \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\} dx = 0$$

onde foi usado (3). Como η é arbitrário, deve-se ter

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

que é chamada de *equação de Euler* ou *de Lagrange.* O resultado é facilmente estendido para a integral

$$\int_a^b F(x, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots, y_n, y_n')\, dx$$

e leva às *equações de Euler ou de Lagrange*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_\alpha'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

Usando uma expansão de série de Taylor, acha-se de (4), que

$$I(\varepsilon) - I(0) = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right) dx + \text{termos de ordem mais elevada em } \varepsilon^2, \; \varepsilon^3 \text{ etc.} \qquad (5)$$

O coeficiente de ε em (5) é, geralmente, chamado de *variação* da integral e é representado por

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

O fato de que $\int_a^b F(x, y, y')\, dx$ é um valor extremo é, assim, indicado por

$$\delta \int_a^b F(x, y, y')\, dx = 0$$

12.7. Discuta a relação do princípio de Hamilton com o probl. 12.6.

Pela identificação da função $F(x, y, y')$ com o Lagrangeano $L(t, q, \dot{q})$, onde x, y e y' são substituídas por t, q e $\dot{q}$, respectivamente, vê-se que uma condição necessária para a integral de ação

$$\int_{t_1}^{t_2} L\, dt \qquad (1)$$

ser um valor extremo máximo ou mínimo é dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (2)$$

Como já foi visto que (2) descreve o movimento de uma partícula, segue-se que tal movimento pode ser achado também pela condição de que (1) seja um valor extremo, que é o princípio de Hamilton.

Para sistemas envolvendo n graus de liberdade, considera-se que a integral (1), onde

$$L = L(t, q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ldots, q_n, \dot{q}_n)$$

leve às equações de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n$$

12.8. Uma partícula desliza, partindo do repouso de um ponto em um fio sem atrito em um plano vertical, para um outro ponto sob influência da gravidade. Ache o tempo total gasto.

Seja a forma do fio a indicada pela curva C na fig. 12-3 e considere que os pontos de partida e chegada são tomados como sendo a origem e o ponto $A(x_0, y_0)$, respectivamente.

Seja $P(x, y)$ uma posição qualquer da partícula que se supõe ter a massa m. Do princípio da conservação de energia, se for escolhida a linha horizontal por A como nível de referência, tem-se

Energia potencial em O + energia cinética em O =
= energia potencial em P + energia cinética em P

ou
$$mgy_0 + 0 = mg(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}m(ds/dt)^2$$

onde ds/dt é a velocidade instantânea em módulo da partícula, no instante t. Então,

$$ds/dt = \pm\sqrt{2gy} \qquad (1)$$

Se for medido o comprimento do arco s partindo da origem, então s aumenta com o movimento da partícula. Assim, ds/dt é positivo e, portanto, $ds/dt = \sqrt{2gy}$ ou $dt = ds/\sqrt{2gy}$.

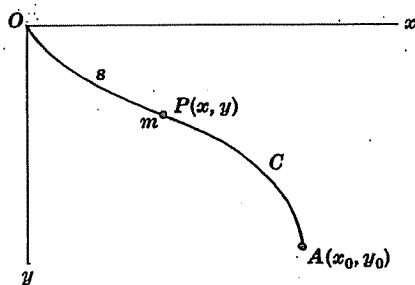



Fig. 12-3

O tempo total gasto para ir de $y = 0$ a $y = y_0$ é

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \int_{y=0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Mas, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ ou $ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Assim, o tempo requerido é

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=0}^{y_0} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

12.9. Deseja-se que a partícula do probl. 12.8 vá do ponto O ao ponto A no mínimo tempo possível; mostre que a equação diferencial da curva C, definindo a forma do fio, é $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$.

Uma condição necessária para que o tempo τ, dado pela equação (2) do probl. 12.8, seja um mínimo é que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

onde $$F = (1 + y'^2)^{1/2}\, y^{-1/2} \qquad (2)$$

Ora, $\partial F/\partial y' = (1 + y'^2)^{-1/2}\, y'\, y^{-1/2}$, $\quad \partial F/\partial y = -\frac{1}{2}(1 + y'^2)^{1/2}\, y^{-3/2}$

Substituindo isto em (1), fazendo-se a diferenciação indicada, em relação a x e simplificando, obtém-se a equação diferencial pedida.

O problema de se achar a forma de um fio é, geralmente, chamado de *problema da braquistócrona*.

12.10. (*a*) Resolva a equação diferencial do probl. 12.9 e (*b*) mostre que a curva pedida é uma *ciclóide*.

(*a*) Trocando de variável a equação diferencial, seja $y' = u$ tal que

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} y' = u\frac{du}{dy}$$

Então, a equação diferencial fica

$$1 + u^2 + 2yu\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{2u\,du}{1 + u^2} + \frac{dy}{y} = 0$$

E, por integração, obtém-se

$$\ln(1 + u^2) + \ln y = \ln b \quad \text{ou} \quad (1 + u^2)y = b$$

onde b é uma constante. Assim,

$$u = y' = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{b - y}{y}}$$

pois a inclinação deve ser positiva. Separando as variáveis e integrando, acha-se

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{b - y}}\, dy + c$$

Sendo $y = b \operatorname{sen}^2 \theta$, isto pode ser escrito como

$$x = \int \sqrt{\frac{b \operatorname{sen}^2 \theta}{b \cos^2 \theta}} \cdot 2b \operatorname{sen} \theta \cos \theta\, d\theta + c$$

$$= 2b \int \operatorname{sen}^2 \theta\, d\theta + c = b \int (1 - \cos 2\theta)\, d\theta + c = \tfrac{1}{2}b(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) + c$$

Assim, as equações paramétricas da curva pedida são

$$x = \tfrac{1}{2}b(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) + c, \qquad y = b \operatorname{sen}^2 \theta = \tfrac{1}{2}b(1 - \cos 2\theta)$$

Como a curva deve passar pelo ponto $x = 0$, $y = 0$, tem-se que $c = 0$. Então, fazendo-se

$$\phi = 2\theta, \qquad a = \tfrac{1}{2}b \qquad (1)$$

as equações paramétricas pedidas são

$$x = a(\phi - \operatorname{sen} \phi), \qquad y = a(1 - \cos \phi) \qquad (2)$$

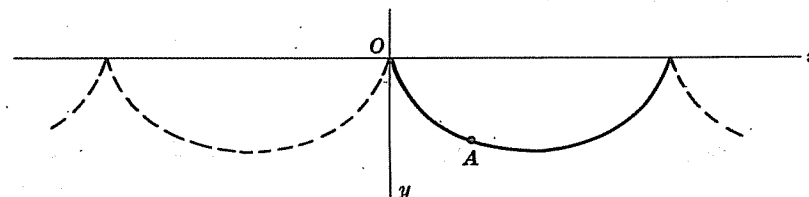



Fig. 12-4

(*b*) As equações (2) são as equações paramétricas de uma *ciclóide* [veja fig. 12-4]. A constante a deve ser determinada de modo que a curva passe pelo ponto A. A ciclóide é a trajetória descrita por um ponto de um círculo que rola ao longo de uma reta dada [veja o probl. 12.89].

TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E FUNÇÕES GERADORAS

12.11. Prove que uma transformação é canônica, se existir uma função $\mathcal{G}$ tal que $d\mathcal{G}/dt = L - \mathcal{L}$.

As integrais $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$ e $\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$ devem ser simultaneamente valores extremos, para que seus variacionais sejam nulos, i.e.,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0 \quad \text{e} \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt = 0$$

Assim, por subtração,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (L - \mathcal{L})\,dt = 0$$

Isto pode ser conseguido, se existir uma função $\mathcal{G}$ tal que

$$L - \mathcal{L} = d\mathcal{G}/dt$$

pois, em tal caso,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{G}}{dt}\,dt = \delta\,\{\mathcal{G}(t_2) - \mathcal{G}(t_1)\} = 0$$

A função $\mathcal{G}$ é chamada de *função geradora*.

12.12. Considere que a função geradora é uma função $\mathcal{T}$ das coordenadas de posição anteriores e posteriores q_α e Q_α, respectivamente, assim como do tempo t, i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$. Prove que

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + H, \quad \text{onde} \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

Pelo probl. 12.11,

$$\frac{d\mathcal{T}}{dt} = L - \mathcal{L} = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - H - \left\{\sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha - \mathcal{H}\right\}$$
$$= \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - \sum P_\alpha \dot{Q}_\alpha + \mathcal{H} - H$$

ou

$$d\mathcal{T} = \sum p_\alpha\,dq_\alpha - \sum P_\alpha\,dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \qquad (1)$$

Mas, se $\mathcal{T} = \mathcal{T}(q_\alpha, Q_\alpha, t)$, então

$$d\mathcal{T} = \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}\,dQ_\alpha + \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}\,dt \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), tem-se, como foi pedido,

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_\alpha}, \quad P_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_\alpha}, \quad \mathcal{H} - H = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t}$$

As equações

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

são devidas ao fato de que $\mathcal{H}$ é o hamiltoniano nas coordenadas P_α e Q_α tal que as equações de Hamilton se mantêm como no probl. 12.1.

12.13. Seja $\mathcal{S}$ uma função geradora dependendo somente de q_α, P_α, e t. Prove que

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H \quad \text{onde} \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

Do probl. 12.12, equação (1), temos

$$d\mathcal{T} = \sum p_\alpha\,dq_\alpha - \sum P_\alpha\,dQ_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt$$
$$= \sum p_\alpha\,dq_\alpha - d\,\{\sum P_\alpha Q_\alpha\} + \sum Q_\alpha\,dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt$$

ou

$$d(\mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha) = \sum p_\alpha\,dq_\alpha + \sum Q_\alpha\,dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \qquad (1)$$

i.e.,

$$d\mathcal{S} = \sum p_\alpha\,dq_\alpha + \sum Q_\alpha\,dP_\alpha + (\mathcal{H} - H)\,dt \qquad (2)$$

onde

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} + \sum P_\alpha Q_\alpha \qquad (3)$$

Mas, como $\mathcal{S}$ é uma função de q_α, P_α e t,

$$d\mathcal{S} = \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}\,dq_\alpha + \sum \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}\,dP_\alpha + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}\,dt \qquad (4)$$

Comparando (2) e (4),

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H$$

Os resultados

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}$$

são obtidos como no probl. 12.12, pois $\mathcal{H}$ é o hamiltoniano.

12.14. Prove que a transformação $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, $Q = \text{tg}^{-1}(q/p)$ é canônica.

Método 1

Sejam os hamiltonianos nas coordenadas p, q e P, Q, respectivamente $H(p,q)$ e $\mathcal{H}(P,Q)$, tal que $H(p,q) = \mathcal{H}(P,Q)$. Como p, q são coordenadas canônicas,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad (1)$$

Mas

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial p}{\partial Q}\dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q}\dot{Q} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} \qquad (3)$$

Das transformações dadas, tem-se

$$\frac{\partial P}{\partial p} = p, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = q, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{-q}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p}{p^2+q^2}$$

Também, diferenciando-se as equações de transformação em relação a P e Q, respectivamente, acha-se

$$1 = p\frac{\partial p}{\partial P} + q\frac{\partial q}{\partial P}, \quad 0 = \left(p\frac{\partial q}{\partial P} - q\frac{\partial p}{\partial P}\right)\Big/(p^2+q^2)$$

$$0 = p\frac{\partial p}{\partial Q} + q\frac{\partial q}{\partial Q}, \quad 1 = \left(p\frac{\partial q}{\partial Q} - q\frac{\partial p}{\partial Q}\right)\Big/(p^2+q^2)$$

Resolvendo-as simultaneamente, obtem-se

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{q}{p^2+q^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -q, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = p \tag{4}$$

Então, as equações (1) e (2) ficam

$$\dot{p} = \frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} + \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = p\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q} \tag{6}$$

Assim, das equações (1), (5) e (6) tem-se

$$\frac{p}{p^2+q^2}\dot{P} - q\dot{Q} = -q\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} - \frac{p}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}$$

$$\frac{q}{p^2+q^2}\dot{P} + p\dot{Q} = p\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2+q^2}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}$$

Resolvendo-as simultaneamente, acha-se

$$\dot{P} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q}, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P} \tag{7}$$

o que mostra que P e Q são canônicas e que, então, a transformação é canônica.

Método 2

Pelo teorema 12.2, a transformação é canônica, se

$$\sum p_\alpha\, dq_\alpha - \sum P_\alpha\, dQ_\alpha \tag{8}$$

for uma diferencial exata. Neste caso, (8) fica

$$p\,dq - P\,dQ = p\,dq - \tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\left(\frac{p\,dq - q\,dp}{p^2+q^2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(p\,dq + q\,dp) = d(\tfrac{1}{2}pq),$$

uma diferencial exata. Assim, a transformação é canônica.

A EQUAÇÃO DE HAMILTON E JACOBI

12.15. (*a*) Escreva o hamiltoniano para um oscilador harmônico, unidimensional de massa m. (*b*) Escreva a equação de Hamilton e Jacobi correspondente. (*c*) Use o método de Hamilton e Jacobi, para obter o movimento do oscilador.

(*a*) *Método* 1

Seja q a coordenada de posição de um oscilador harmônico, tal que $\dot{q}$ seja sua velocidade. Como a energia cinética é $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ e a energia potencial é $V = \frac{1}{2}\kappa q^2$, o lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \tag{1}$$

O momentum é

$$p = \partial L/\partial \dot{q} = m\dot{q} \tag{2}$$

tal que

$$\dot{q} = p/m \tag{3}$$

Então, o hamiltoniano é

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L = p\dot{q} - (\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 \tag{4}$$

Método 2

Pelo probl. 12.2, como o hamiltoniano é o mesmo que a energia total para sistemas conservativos,

$$H = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}m(p/m)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \tfrac{1}{2}p^2/m + \tfrac{1}{2}\kappa q^2$$

(*b*) Usando $p = \partial\mathscr{S}/\partial q$ e o hamiltoniano da parte (*a*), a equação de Hamilton e Jacobi é [veja a equação (26) da introdução deste capítulo]

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + \frac{1m}{2m}\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = 0 \tag{5}$$

(*c*) Suponhamos uma solução de (5) na forma

$$\mathscr{S} = S_1(q) + S_2(t) \tag{6}$$

Então, (5) fica

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = -\frac{dS_2}{dt} \tag{7}$$

Fazendo cada lado igual à constante β, achamos

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dq}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\kappa q^2 = \beta, \quad \frac{dS_2}{dt} = -\beta$$

Cujas soluções, omitindo-se a constante de integração, são

$$S_1 = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq, \quad S_2 = -\beta t \tag{8}$$

de modo que (6) fica

$$\mathscr{S} = \int \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t \tag{9}$$

Identifiquemos β com a coordenada de momentum novo P. Enão, temos, para a coordenada de posição posterior,

$$Q = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\int \sqrt{2m(\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq - \beta t\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t$$

Mas como a coordenada posterior Q é uma constante γ,

$$\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{dq}{\sqrt{\beta - \frac{1}{2}\kappa q^2}} - t = \gamma$$

ou, integrando, $\sqrt{m/\kappa}\ \text{sen}^{-1}\,(q\sqrt{\kappa/2\beta}) = t + \gamma$

Então, resolvendo em q, $q = \sqrt{2\beta/\kappa}\ \text{sen}\sqrt{\kappa/m}\,(t + \gamma)$ (10)

que é a solução pedida. As constantes β e γ podem ser achadas das condições iniciais.

É interessante notar que a quantidade β é fisicamente igual à energia total E do sistema [veja o probl. 12.92 (*a*)]. O resultado (9) com $\beta = E$ ilustra a equação (31) da introdução deste capítulo.

12.16. Use os métodos de Hamilton e Jacobi para resolver o problema de Kepler, para uma partícula em um campo de força central e do tipo quadrado do inverso.

O hamiltoniano é $$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) - \frac{K}{r} \qquad (1)$$

Então, como $p_r = \partial\mathscr{S}/\partial r$, $p_\theta = \partial\mathscr{S}/\partial\theta$, a equação de Hamilton e Jacobi é

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = 0 \qquad (2)$$

Seja $$\mathscr{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(t) \qquad (3)$$

Então, (2) fica $$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = -\frac{dS_3}{dt}$$

Igualando-se ambos os lados à constante β_3, achamos

$$dS_3/dt = -\beta_3 \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2\right\} - \frac{K}{r} = \beta_3 \qquad (5)$$

Integrando-se (4), obtém-se, a menos de uma constante de integração,

$$S_3 = -\beta_3 t$$

Multiplique ambos os lados de (5) por $2mr^2$ e escreva sob a forma

$$\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\}$$

Então, como um lado depende somente de θ, enquanto o outro dependede somente de r, segue-se que cada lado é uma constante. Assim,

$$dS_2/d\theta = \beta_2 \quad \text{ou} \quad S_2 = \beta_2\theta \qquad (6)$$

e $$r^2\left\{2m\beta_3 + \frac{2mK}{r} - \left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2\right\} = \beta_2^2$$

ou $$\frac{dS^1}{dr} = \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2} \qquad (7)$$

tomando-se a raiz quadrada positiva. Então,

$$S_1 = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr \qquad (8)$$

Assim, $$\mathscr{S} = \int \sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \beta_2\theta - \beta_3 t \qquad (9)$$

Identificando-se β_2 e β_3 com os novos momenta P_r e P_θ, respectivamente, tem-se

$$Q_r = \frac{\partial\mathscr{S}}{\partial\beta_2} = \frac{\partial}{\partial\beta_2}\int\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr + \theta = \gamma^1$$

$$Q_\theta = \frac{\partial\mathscr{S}}{\partial\beta_3} = \frac{\partial}{\partial\beta_3}\int\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}\, dr - t = \gamma_2$$

já que Q_r e Q_θ são constantes, como γ_1 e γ_2. Realizando as diferenciações em relação a β_2 e β_3, achamos

$$\int \frac{\beta_2\, dr}{r^2\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = \theta - \gamma_1 \qquad (10)$$

$$\int \frac{m\, dr}{\sqrt{2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2}} = t + \gamma_2 \qquad (11)$$

A integral em (10) pode ser realizada usando-se a substituição $r = 1/u$ e, após a integração, acha-se a equação da órbita

$$r = \frac{\beta_2^2/mK}{1 - \sqrt{1 + 2\beta_3\beta_2^2/mK^2}\cos(\theta + \pi/2 - \gamma_1)} \qquad (12)$$

A constante β_3 pode ser identificada com a energia E [veja o probl. 12.92 (*b*)], assim ilustrando a equação (31) da introdução deste capítulo. Se $E = \beta_3 < 0$,

a órbita é uma elipse; se $E = \beta_3 = 0$, ela é uma parábola; e, se $E = \beta_3 > 0$ ela é uma hipérbole. Isto concorda com os resultados do cap. 5.

A equação (11), quando integrada, dá a posição como função do tempo.

INTEGRAL DE FASE E VARIÁVEIS DE ÂNGULO

12.17. Seja $\mathscr{S}$ uma solução completa da equação de Hamilton e Jacobi, contendo n constantes $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Faça-se $J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha$. Prove que os J_α são funções de β_α somente.

Temos
$$\mathscr{S} = S_1(q_1, \beta_1, \ldots, \beta_n) + \ldots + S_n(q_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) - \beta_1 t \tag{1}$$

onde a constante $\beta_1 = E$, é a energia total. Ora,

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial q_\alpha} = \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} \tag{2}$$

Assim,
$$J_\alpha = \oint p_\alpha dq_\alpha = \oint \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} dq_\alpha \tag{3}$$

Mas, nesta integração, q_α é a variável de integração; assim, as únicas quantidades que restam são as constantes $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Portanto, temos as n equações

$$J_\alpha = J_\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \qquad \alpha = 1, \ldots, n \tag{4}$$

Usando (4), pode-se resolver para $\beta_1, \ldots, \beta_n$ em termos de $J_1, \ldots, J_n$ e expressar (1) em termos dos J_α.

12.18. (*a*) Considere que as coordenadas de posição e momentum posteriores são tomadas como sendo w_α e J_α, respectivamente. Prove que, se $\mathscr{H}$ é o novo hamiltoniano,

$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathscr{H}/\partial w_\alpha, \qquad \dot{w}_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial J_\alpha$$

(*b*) Deduza de (*a*) que $J_\alpha =$ constante e $w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha$

onde f_α e c_α são constantes e $f_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial J_\alpha$

(*a*) Pelas equações de Hamilton para as coordenadas canônicas Q_α e P_α,
$$\dot{P}_\alpha = -\partial \mathscr{H}/\partial Q_\alpha, \qquad \dot{Q}_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial P_\alpha \tag{1}$$

Então, como as coordenadas de posição e momentum posteriores são tomadas como $Q_\alpha = w_\alpha$ e $P_\alpha = J_\alpha$, estas equações ficam

$$\dot{J}_\alpha = -\partial \mathscr{H}/\partial w_\alpha, \qquad \dot{w}_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial J_\alpha \tag{2}$$

(*b*) Como $\mathscr{H} = E$, o novo hamiltoniano depende somente de J_α e não de w_α. Assim, de (2) tem-se

$$\dot{J}_\alpha = 0, \qquad \dot{w}_\alpha = \text{constante} = f_\alpha \tag{3}$$

onde $f_\alpha = \partial \mathscr{H}/\partial J_\alpha$. De (3) acha-se, como foi pedido,

$$J_\alpha = \text{constante} \quad w_\alpha = f_\alpha t + c_\alpha \tag{4}$$

As quantidades J_α são chamadas *variáveis de ação*, enquanto as integrais correspondentes

$$\oint p_\alpha dq_\alpha = J_\alpha \tag{5}$$

onde a integração é realizada sobre um ciclo completo da coordenada q_α, são chamadas *integrais de fase*. As quantidades w_α são chamadas *variáveis de ângulo*.

12.19. (*a*) Faça-se Δw_α representar a mudança em w_α, correspondente a um ciclo completo na coordenada particular q_r. Prove que

$$\Delta w_\alpha = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = r \\ 0 \text{ se } \alpha \neq r \end{cases}$$

(*b*) Dê uma interpretação física do resultado de (*a*).

(*a*)
$$\Delta w_\alpha = \oint \frac{\partial w_\alpha}{\partial q_r} dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{\partial S}{\partial J_\alpha}\right) dq_r = \oint \frac{\partial}{\partial J_\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial q_r}\right) dq_r$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint \frac{\partial S}{\partial q_r} dq_r = \frac{\partial J_r}{\partial J_\alpha} = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = r \\ 0 \text{ se } \alpha \neq r \end{cases}$$

onde se usou o fato de que $w_\alpha = \partial S/\partial J_\alpha$ [veja o probl. 12.17] e o [probl. 12.18] e foi admitido que a ordem de diferenciação e de integração é imaterial.

(*b*) De (*a*) segue-se que w_α muda de uma unidade, quando q_α perfaz um ciclo completo, mas não há mudança quando um outro qualquer q perfaz um ciclo completo. Segue-se que q_α é uma função periódica de w_α, de período unitário. Fisicamente, isto significa que os f_α na equação (4) do probl. 12.18 são *frequências*.

12.20. Determine a frequência do oscilador hamônico do probl. 12.15.

Um ciclo completo da coordenada q [veja a equação (10) do probl. 12.15] consiste no movimento de $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$ a $q = +\sqrt{2\beta/\kappa}$ e de volta a $q = -\sqrt{2\beta/\kappa}$. Então, a variável de ação é

$$J = \oint p\, dq = 2\int_{-\sqrt{2\beta/\kappa}}^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2m(\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq = 4\int_0^{\sqrt{2\beta/\kappa}} \sqrt{2\ (\beta - \tfrac{1}{2}\kappa q^2)}\, dq$$

$$= 2\pi\beta\sqrt{m/\kappa}$$

Assim,
$$\beta = E = \frac{J}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = \mathscr{H} \quad \text{e} \quad f = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

12.21. Determine a frequência do problema de Kepler [veja o probl. 12.16].

Um ciclo completo da coordenada r consiste no movimento de $r = r$ a $r_{máx}$ e de volta a $r = r_{mín}$, onde $r_{mín}$ e $r_{máx}$ são os valores mínimo e máximo

de r, dados pelos zeros da equação quadrática [veja a equação (10) do probl. 12.16].

$$2m\beta_3 + 2mK/r - \beta_2^2/r^2 = 0 \tag{1}$$

Então, temos, das equações (6) e (7) do probl. 12.16,

$$J_\theta = \oint p_\theta \, d\theta = \oint \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \theta} d\theta = \oint \frac{dS_2}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \beta_2 \, d\theta = 2\pi\beta_2 \tag{2}$$

$$J_r = \oint p_r \, dr = \oint \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial r} dr = \oint \frac{dS_1}{dr} dr = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m\beta_3 + 2mK\, r - \beta_2^2/r^2}\, dr$$
$$= 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} - 2\pi\beta_2. \tag{3}$$

De (2) e (3) tem-se, por eliminação de β_2,

$$J_\theta + J_r = 2\pi mK/\sqrt{-2m\beta_3} \tag{4}$$

Como $\beta_3 = E$, (4), fica

$$E = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2} \quad \text{tal que} \quad \mathscr{H} = -\frac{2\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^2}$$

Então, as freqüências são

$$f_\theta = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_\theta} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}, \qquad f_r = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial J_r} = \frac{4\pi^2 mK^2}{(J_\theta + J_r)^3}$$

Como estas duas frequências são as mesmas, i.e., há uma única frequência, diz-se que o sistema é *degenerativo*.

PROBLEMAS DIVERSOS

12.22. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força de potencial V. Escreva (*a*) o hamiltoniano e (*b*) as equações de Hamilton em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ).

(*a*) A energia cinética em coordenadas esféricas é

$$T = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) \tag{1}$$

Então, o Lagrangeano é

$$L = T - V = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) - V(r, \theta, \phi) \tag{2}$$

Temos $p_r = \partial L/\partial \dot{r} = m\dot{r}$, $p_\theta = \partial L/\partial \dot{\theta} = mr^2\dot{\theta}$, $p_\phi = \partial L/\partial \dot{\phi} =$

$$= mr^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi} \tag{3}$$

e

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} \tag{4}$$

O hamiltoniano é dado por

$$H = \sum p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$
$$= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \dot{\phi}^2) + V(r, \theta, \phi)$$
$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} + V(r, \theta, \phi) \tag{5}$$

onde foram usados os resultados das equações (4).

Pode-se obter também (5) diretamente pelo uso do fato de que, para sistemas convervativos, o hamiltoniano é a energia total, i.e., $H = T + V$.

(*b*) As equações de Hamilton são $\dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}$, $\dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}$. Então, da parte (*a*),

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mr^2 \operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

12.23. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força cujo potencial em coordenadas esféricas é $V = -(K\cos\theta)/r^2$. Escreva a equação de Hamilton e Jacobi, descrevendo seu movimento.

Pelo probl. 12.22, o hamiltoniano é

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\right) - \frac{K\cos\theta}{r^2} \tag{1}$$

Escrevendo $p_r = \dfrac{\partial \mathscr{S}}{\partial r}$, $p_\theta = \dfrac{\partial \mathscr{S}}{\partial \theta}$, $p_\phi = \dfrac{\partial \mathscr{S}}{\partial \phi}$, a equação de Hamilton e Jacobi pedida é

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial_\phi}\right)^2\right\} - \frac{K\cos\theta}{r^2} = 0 \tag{2}$$

12.24. (*a*) Ache uma solução completa da equação de Hamilton e Jacobi do probl. 12.23 e (*b*) indique como o movimento da partícula pode ser determinado.

(*a*) Usando $\mathscr{S} = S_1(r) + S_2(\theta) + S_3(\phi) - Et$ na equação (2) do probl. 12.23, pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2 \operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 - \frac{K\cos\theta}{r^2} = E \tag{1}$$

Multiplicando a equação (1) por $2mr^2$ e, rearranjando os termos,

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = -\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^3 + 2mK\cos\theta$$

Como o lado esquerdo depende somente de r, enquanto o lado direito depende de θ e ϕ, segue-se que cada lado deve ser uma constante, que será chamada β_1. Assim,

$$r^2\left(\frac{dS_1}{dr}\right)^2 - 2mEr^2 = \beta_1 \tag{2}$$

e

$$-\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{\text{sen}^2\,\theta}\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 + 2mK\cos\theta = \beta_1 \tag{3}$$

Multiplicando a equação (3) por $\text{sen}^2\,\theta$ e rearranjando os termos,

$$\left(\frac{dS_3}{d\phi}\right)^2 = 2mK\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta - \beta_1\,\text{sen}^2\,\theta - \text{sen}^2\,\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 \tag{4}$$

Como o lado esquerdo depende somente de ϕ, enquanto o lado direito depende somente de θ, cada lado deve ser uma constante que será chamada β_2. Entretanto, como

$$p_\phi = \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \phi} = \frac{dS_3}{d\phi} \tag{5}$$

pode-se escrever $\beta_2 = p_\phi^2$. Isto é uma conseqüência do fato de que ϕ é coordenada cíclica ou ignorável. Então, (4) fica

$$2mK\,\text{sen}^2\,\theta\cos\theta - \beta_1\,\text{sen}^2\,\theta - \text{sen}^2\,\theta\left(\frac{dS_2}{d\theta}\right)^2 = p_\phi^2 \tag{6}$$

Pela solução das equações (2), (6) e (5), obtém-se

$$S_1 = \int\sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr, \quad S_2 = \int\sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\,\text{csec}^2\,\theta - \beta_1}\,d\theta,$$

$$S_3 = p_\phi \phi$$

onde são escolhidas as raízes quadradas positivas e são omitidas as constantes aditivas arbitrárias. A solução completa é

$$\mathscr{S} = \int\sqrt{2mE + \beta_1/r^2}\,dr + \int\sqrt{2mK\cos\theta - p_\phi^2\,\text{csec}^2\,\theta - \beta_1}\,d\theta + p_\phi\phi - Et$$

(*b*) As equações pedidas do movimento são achadas, escrevendo-se

$$\frac{\partial \mathscr{S}}{\partial \beta_1} = \gamma_1, \quad \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial E} = \gamma_2, \quad \frac{\partial \mathscr{S}}{\partial p_\phi} = \gamma_3$$

e, então, resolvendo-as, para obter as coordenadas r, θ, ϕ como funções do tempo, usando as condições iniciais para avaliar as constantes arbitrárias.

12.25. Se as funções F e G dependem das coordenadas de posição q_α dos momenta p_α e do tempo t, o *parêntese de Poisson* de F e G é definido como

$$[F, G] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right)$$

Prove que (*a*) $[F, G] = -[G, F]$, (*b*) $[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$, (*c*) $[F, q_r] = \partial F/\partial p_r$, (*d*) $[F, p_r] = -\partial F/\partial q_r$.

$$(a)\quad [F,G] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) = -\sum_\alpha \left(\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\right) = -[G,F]$$

Isto mostra que o parêntese de Poisson não obedece à *lei comutativa da Álgebra.*

$$(b)\quad [F_1 + F_2, G] = \sum_\alpha \left\{\frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial(F_1+F_2)}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right\}$$

$$= \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_1}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right) + \sum_\alpha \left(\frac{\partial F_2}{\partial p_\alpha}\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha}\right)$$

$$= [F_1, G] + [F_2, G].$$

Isto mostra que o parêntese de Poisson obedece à *lei distributiva da Álgebra.*

$$(c)\quad [F, q_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial q_r}{\partial p_\alpha}\right) = \frac{\partial F}{\partial p_r}$$

como $\partial q_r/\partial q_\alpha = 1$ para $\alpha = r$ e 0 para $\alpha \neq r$, enquanto $\partial q_r/\partial p_\alpha = 0$ para qualquer α. Como r é arbitrário, o resultado pedido é obtido.

$$(d)\quad [F, p_r] = \sum_\alpha \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_r}{\partial p_\alpha}\right) = -\frac{\partial F}{\partial q_r}$$

como $\partial p_r/\partial q_\alpha = 0$ para qualquer α, enquanto $\partial p_r/\partial p_\alpha = 1$ para $\alpha = r$ e 0 para $\alpha \neq r$. Como r é arbitrário, o resultado pedido é obtido.

12.26. Se H é o hamiltoniano, prove que, se f for uma função qualquer dependente da posição, momenta e tempo, então

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}dq_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}dp_\alpha\right) \tag{1}$$

ou

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\dot{p}_\alpha\right) \tag{2}$$

Mas, pelas equações de Hamilton,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \tag{3}$$

Então, (2) pode ser escrita

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

Problemas Propostos

O HAMILTONIANO E AS EQUAÇÕES DE HAMILTON

12.27. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força de potencial V. (*a*) Escreva o hamiltoniano e (*b*) as equações de Hamilton em coordenadas retangulares (x, y, z).

Resp. (*a*) $H = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + V(x, y, z)$

(*b*) $\dot{x} = p_x/m$, $\dot{y} = p_y/m$, $\dot{z} = p_z/m$, $\dot{p}_x = -\partial V/\partial x$, $\dot{p}_y = -\partial V/\partial y$, $\dot{p}_z = -\partial V/\partial z$.

12.28. Use as equações de Hamilton para obter o movimento de uma partícula de massa m sobre um plano sem atritos e inclinado de um ângulo α.

12.29. Faça o problema para pequenas oscilações de um pêndulo simples usando as equações de Hamilton.

12.30. Use as equações de Hamilton para obter o movimento de um projétil lançado com uma velocidade em módulo de v_o e em um ângulo α com a horizontal.

12.31. Usando as equações de Hamilton, faça o problema do oscilador harmônico em (*a*) uma dimensão, (b) duas dimensões, (c) três dimensões.

12.32. Faça o probl. 3.27, usando a equação de Hamilton.

ESPAÇO DE FASE E TEOREMA DE LIOUVILLE

12.33. Explique por que a trajetória de um ponto de fase no espaço de fase representa o movimento de um sistema de partículas que não se podem cruzar.

12.34. Dê os detalhes da demonstração do teorema de Liouville, para o caso de dois graus de liberdade.

CÁLCULO VARIACIONAL E PRINCÍPIO DE HAMILTON

12.35. Use os métodos de cálculo variacional, para achar a curva que liga dois pontos fixos, em um plano com o menor comprimento.

12.36. Prove que, se a função F na integral $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$ é independente de x, então a integral é um valor extremo de $F - y'F_{y'} = c$, onde c é uma constante.

12.37. Use o resultado do probl. 12.36, para resolver (*a*) o probl. 12.9 e (*b*) o probl. 12.35.

12.38. Deseja-se girar a curva da fig. 12-5, tendo as extremidades fixas em $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ em torno do eixo x tal que a área I da superfície de revolução gerada tenha um valor mínimo.

(*a*) Mostre que $I = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx$.

(*b*) Obtenha a equação diferencial da curva.

(*c*) Prove que a curva pedida é uma catenária.

Resp. (*b*) $yy'' = 1 + (y')^2$

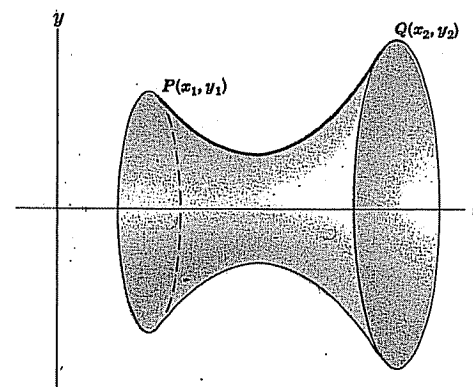



Fig. 12-5

12.39. Dois fios circulantes idênticos em contato são colocados em uma solução de sabão e, então, separados, para formar um filme de sabão. Explique por que a forma da superfície do filme de sabão está relacionada com o resultado do probl. 12.38.

12.40. Use o princípio de Hamilton, para achar o movimento de um pêndulo simples.

12.41. Faça o problema de um projétil, usando o princípio de Hamilton.

12.42. Use o princípio de Hamilton, para achar o movimento de um cilindro sólido, rolando por um plano. inclinado de um ângulo α.

TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E FUNÇÕES GERADORAS

12.43. Prove que a transformação $Q = p$, $P = -q$ é canônica.

12.44. Prove que a transformação $Q = q \operatorname{tg} p$, $P = \ln \operatorname{sen} p$ é canônica.

12.45. (*a*) Prove que o hamiltoniano para um oscilador harmônico pode ser escrito na forma $H = \frac{1}{2}p^2/m + \frac{1}{2}\kappa q^2$.

(*b*) Prove que a transformação $q = \sqrt{P/\sqrt{\kappa}}$ sen Q, $p = \sqrt{mP\sqrt{\kappa}}$ cos Q é canônica.

(*c*) Expresse o hamiltoniano do item (*a*) em termos de P e Q e mostre que é cíclico.

(*d*) Obtenha a solução de um oscilador harmônico, usando os resultados acima.

12.46. Prove que a função geradora que dá origem à transformação canônica do do probl. 12.45 (*b*) é $S = \frac{1}{2}\sqrt{\kappa}\, q^2 \cot Q$.

12.47. Prove que o resultado de duas ou mais transformações canônicas sucessivas são também sucessivos.

12.48. Seja $\mathscr{U}$ uma função geradora dependendo sòmente de Q_α, p_α e t. Prove que

$$P_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial Q_\alpha}, \quad q_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial p_\alpha}, \quad \mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial t} + H$$

12.49. Seja $\mathscr{V}$ uma função geradora dependendo sòmente dos momenta anterior e posterior p_α e P_α, respectivamente, e do tempo t. Prove que

$$q_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{V}}{\partial p_\alpha}, \quad Q_\alpha = \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial P_\alpha}, \quad \mathscr{H} = \frac{\partial \mathscr{V}}{\partial t} + H$$

12.50. Prove que a função geradora $\mathscr{U}$ do probl. 12.48 está relacionada com a função geradora $\mathcal{T}$ do probl. 12.12 por $\mathscr{U} = \mathcal{T} - \Sigma p_\alpha q_\alpha$.

12.51. Prove que a função geradora $\mathscr{U}$ do probl. 12.49 está relacionada com a função geradora $\mathcal{T}$ do probl. 12.12 por $\mathscr{V} = \mathcal{T} + \Sigma P_\alpha Q_\alpha - \Sigma p_\alpha q_\alpha$.

A EQUAÇÃO DE HAMILTON E JACOBI

12.52. Use o método de Hamilton e Jacobi, para determinar o movimento de uma partícula que cai verticalmente, em um campo gravitacional uniforme.

12.53. (*a*) Ache a equação de Hamilton e Jacobi, para o movimento de uma partícula deslizando por um plano sem atrito e inclinado de um ângulo α. (*b*) Resolva a equação de Hamilton e Jacobi de (*a*) e determine, assim, o movimento da partícula.

12.54. Faça o problema de um projétil lançado com velocidade em módulo v_0 e um ângulo α com a horizontal, usando os métodos de Hamilton e Jacobi.

12.55. Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para descrever o movimento e achar as frequências de um oscilador harmônico (*a*) em 2 dimensões e (*b*) em 3 dimensões.

12.56. Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para chegar à função geradora do probl. 12.46.

INTEGRAIS DE FASE E VARIÁVEIS DE ÂNGULO

12.57. Use o método das integrais de fase e variáveis de ângulo para achar a frequência de um pêndulo simples de comprimento l, admitindo que as oscilações tenham amplitudes pequenas. *Resp.* $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

12.58. Ache as frequências (*a*) de um oscilador harmônico bidimensional, (*b*) de um oscilador harmônico tridimensional.

12.59. Obtenha a freqüência de oscilação de pequena amplitude de um pêndulo composto, usando as integrais de fase.

12.60. Duas massas iguais m são ligadas por molas iguais entre si e com as paredes fixas A e B, as massas são livres de deslizar sobre uma linha do plano AB sem atrito [veja fig. 12-6]. Usando as integrais de fase, determine as freqüências dos modos normais.

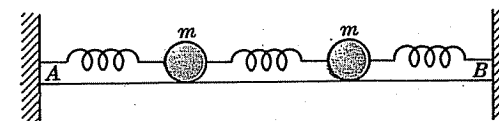



Fig. 12-6

12.61. Discuta o probl. 12.57, se as oscilações não forem supostas de pequena amplitude.

PROBLEMAS DIVERSOS

12.62. Uma partícula de massa m move-se em um campo de força tendo um potencial $V(\rho, \phi, z)$, onde ρ, ϕ, z são coordenadas cilíndricas. Dê (*a*) o hamiltoniano e (*b*) as equações de Hamilton para a partícula.

Resp. (*a*) $H = (p_\rho^2 + p_\phi^2/\rho^2 + p_z^2)/2m + V(\rho, \phi, z)$

(*b*) $\dot\rho = p_\rho/m, \dot\phi = p_\phi/mr^2, \dot z = p_z/m, \dot p_\rho = p_\phi^2/m\rho^3 - \partial V/\partial\rho, \dot p_\phi = -\partial V/\partial\phi,$
$\dot p_z = -\partial V/\partial z$

12.63. Uma partícula de massa m move-se, em um plano, relativamente a um conjunto de eixos fixos e tendo um hamiltoniano dado pela energia total. Ache o hamiltoniano relativamente ao conjunto de eixos, que gira com velocidade angular constante ω relativamente aos eixos fixos.

12.64. Ache o hamiltoniano de um pêndulo duplo. Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para determinar as freqüências normais para o caso de vibrações de pequena amplitude.

12.65. Prove que uma condição necessária para que $I = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, \dot{x}, \ddot{x})\, dt$ seja um valor extremo é que

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) = 0$$

Pode-se generalizar este resultado?

12.66. Faça o probl. 3.22, pelos métodos hamiltonianos.

12.67. Uma partícula de massa m move-se dentro de um cone vertical e sem atrito, tendo a equação $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$. (*a*) Escreva o hamiltoniano e (*b*) escreva as equações de Hamilton, usando coordenadas cilíndricas.

Resp. (*a*) $H = \dfrac{p_\rho^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2m} + \dfrac{p_\phi^2}{2m\rho^2} + mg\rho \operatorname{cotg} \alpha$

(*b*) $\dot{\rho} = \dfrac{p_\rho \operatorname{sen}^2 \alpha}{m}, \quad \dot{p}_\rho = \dfrac{p_\phi^2}{m\rho^3} - mg \operatorname{cotg} \alpha$

12.68. Use os resultados do probl. 12.67, para provar que haverá uma órbita estável em um plano horizontal qualquer $z = h > 0$ e ache a freqüência nesta órbita.

12.69. Prove que o produto de uma coordenada de posição e seu momentum conjugado canônicamente deve ter a dimensão de *ação* ou energia multiplicada pelo tempo, i.é., $ML^2 T^{-1}$.

12.70. Realize a integração da equação (10) do probl. 12.16 e compare com a solução do problema de Kepler, no cap. 5.

12.71. Verifique a integração do resultado (3) do probl. 12.21.

12.72. Prove que a equação de Euler (9) da introdução deste capítulo pode ser escrita como

$$y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

12.73. Um homem pode navegar com um bote à velocidade v_1 e pode andar com uma velocidade v_2. Referindo-se à fig. 12-7, prove que, para ir de um ponto A na margem de um lado do rio a um ponto B do outro lado no menor tempo, ele deve chegar de bote ao ponto P onde os ângulos θ_1 e θ_2 são tais que

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Discuta a relação deste resultado com a refração da luz na teoria da ótica.

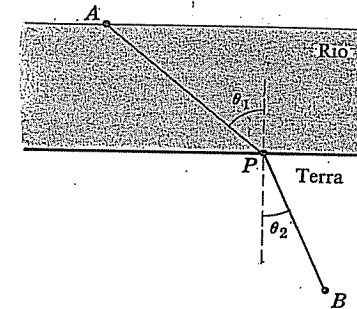



Fig. 12-7

12.74. Prove que, se uma partícula não se move sob a ação de forças externas, i.e., ela é uma partícula livre, então o princípio de mínima ação transforma-se no princípio de mínimo tempo. Discuta a relação deste resultado com o probl. 12.73.

12.75. Derive a condição para a reflexão da luz da teoria ótica, usando o princípio de mínimo tempo.

12.76. Deseja-se achar a forma da curva pertencente a um plano e tendo extremidades fixas tal que seu momento de inércia em torno de um eixo perpendicular ao plano e passando por uma origem fixa é um valor mínimo.

(*a*) Usando coordenadas polares (r, θ), mostre que o problema é equivalente ao de minimizar a integral

$$I = \int_{r=r_1}^{r_2} r^2 \sqrt{1 + r^2 (d\theta/dr)^2}\, dr$$

onde os pontos das extremidades fixas são (r_1, θ_1), (r_2, θ_2).

(*b*) Escreva a equação de Euler, obtendo, assim, a equação diferencial da curva.

(*c*) Resolva a equação diferencial obtida em (*b*) e, assim, ache a equação da curva.

Resp. (*c*) $r^3 = c_1 \sec(3\theta - c_2)$, onde c_1 e c_2 são determinadas de maneira que a curva passe pelos pontos fixos.

12.77. Use o método de Hamilton e Jacobi, para achar as equações do movimento de um pêndulo esférico.

12.78. Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para resolver o probl. 11.20 e o probl. 11.21.

12.79. Se $[F, G]$ é o parênteses de Poisson [veja o probl. 12.25 e o 12.26], prove que

(*a*) $[F_1 F_2, G] = F_1[F_2, G] + F_2[F_1, G]$

(*b*) $\dfrac{\partial}{\partial t}[F, G] = \left[\dfrac{\partial F}{\partial t}, G\right] + \left[F, \dfrac{\partial G}{\partial t}\right]$

(*c*) $\dfrac{d}{dt}[F, G] = \left[\dfrac{dF}{dt}, G\right] + \left[F, \dfrac{dG}{dt}\right]$

12.80. Prove que (*a*) $[q_\alpha, q_\beta] = 0$, (*b*) $[p_\alpha, p_\beta] = 0$, (*c*) $[p_\alpha, q_\beta] = \delta_{\alpha\beta}$

$$\text{onde } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases} \text{ é chamado de } \textit{delta de Kronecker.}$$

12.81. Avalie $[H, t]$, onde H é o hamiltoniano e t é o tempo. As variáveis H e t são conjugadas canonicamente? Explique.

12.82. Prove a *identidade de Jacobi* para o parêntese de Poisson

$$[F_1, [F_2, F_3]] + [F_2, [F_3, F_1]] + [F_3, [F_1, F_2]] = 0.$$

12.83. Ilustre o teorema de Liouville, usando um oscilador harmônico unidimensional.

12.84. (*a*) O lagrangeano de um sistema dinâmico é único? Explique.
(*b*) Discuta a unicidade dos momenta generalizados e o hamiltoniano do sistema.

12.85. (*a*) Ache o hamiltoniano para o fio constituído de N partículas [veja o probl. 8.29].
(*b*) Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para achar os modos normais e as frequências.

12.86. Prove que o parêntese de Poisson é invariante, sob uma transformação canônica.

12.87. Prove que o teorema de Liouville é equivalente ao resultado $\partial \rho / \partial t = [\rho, H]$.

12.88. (*a*) Seja $Q_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\alpha\mu} q_\mu$, $P_\alpha = \sum_{\mu=1}^{n} b_{\alpha\mu} p_\mu$, onde $a_{\alpha\mu}$ e $b_{\alpha\mu}$ são constantes dadas e $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Prove que a transformação é canônica se, e somente se, $b_{\alpha\mu} = \Delta_{\alpha\mu}/\Delta$, onde Δ é o determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

e $\Delta_{\alpha\mu}$ é o co-fator do elemento $a_{\alpha\mu}$ deste determinante.
(*b*) Prove que as condições em (*a*) são equivalentes à condição $\Sigma P_\alpha Q_\alpha = \Sigma p_\alpha q_\alpha$.

12.89. Prove que a trajetória realizada por um ponto, fixo a um círculo que rola ao longo de uma dada linha, é uma ciclóide.

12.90. (*a*) Expresse na forma de uma integral a energia potencial total de uma corrente uniforme, cujas extremidades estão suspensas por dois pontos fixos. (*b*) Usando o fato de que, para o equilíbrio, a energia potencial total é mínima, use o cálculo variacional, para mostrar que a equação da curva que a corrente forma é uma *catenária* como no probl. 7.32. [*Sugestão*: Ache o valor mínimo da integral sujeita à condição de que o comprimento total da corrente seja uma constante dada.]

12.91. Use os métodos de cálculo variacional, para achar a curva plana e fechada que cerca a maior área.

12.92. Prove que as constantes (*a*) β no probl. 12.15 e (*b*) β_3 no probl. 12.16 podem ser identificadas com a energia total.

12.93. Se a teoria da relatividade é levada em conta no movimento de uma partícula de massa m, em um campo de força de potencial V, o hamiltoniano é dado por

$$H = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + V,$$

onde c é a velocidade em módulo da luz. Obtenha as equações do movimento para esta partícula.

12.94. Use os métodos hamiltonianos para resolver o problema de uma partícula movendo-se em um campo de força inverso do cubo.

12.95. Use coordenadas esféricas para resolver o problema de Kepler.

12.96. Considere que m das n coordenadas $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sejam cíclicas [por exemplo, as primeiras m, i.e., $q_1, q_2, \ldots, q_m$]. Seja

$$\mathcal{R} = \sum_{\alpha=1}^{m} c_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \qquad \text{onde} \qquad c_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$$

Prove que, para $\alpha = m+1, \ldots, n$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_\alpha}$

A função $\mathcal{R}$ é chamada de *função de Routh* ou o *routiano*. Com o seu uso, um problema envolvendo n graus de liberdade é reduzido a um que envolve apenas $n - m$ graus de liberdade.

12.97. Usando as propriedades $\delta L = \dfrac{\partial L}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial L}{\partial y'}\delta y'$, $(\delta y)' = \delta y'$ do símbolo variacional δ [veja o probl. 12.6] e admitindo que o operador δ possa ser pôsto sob o sinal de integração, mostre como as equações de Lagrange podem ser derivadas do princípio de Hamilton.

12.98. Seja $P = P(p, q)$, $Q = Q(p, q)$. Considere que o hamiltoniano expresso em termos de p, q e P e Q seja dado por $H = H(p, q)$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}(P, Q)$, respectivamente. Prove que, se

$$\dot{q} = \partial H / \partial p, \qquad \dot{p} = -\partial H / \partial q,$$

então

$$\dot{Q} = \partial \mathcal{H} / \partial P, \qquad \dot{P} = -\partial \mathcal{H} / \partial Q$$

desde que o *determinante jacobiano* [ou, simplesmente, *Jacobiano*]

$$\frac{\partial(P, Q)}{\partial(p, q)} = \begin{vmatrix} \partial P/\partial p & \partial P/\partial q \\ \partial Q/\partial p & \partial Q/\partial q \end{vmatrix} = 1$$

Discuta a conexão destes resultados com a teoria hamiltoniana.

12.99. (*a*) Ache o hamiltoniano para um cilindro sólido rolando sobre um plano inclinado de um ângulo α.
(*b*) Escreva as equações de Hamilton e deduza o movimento do cilindro.
(*c*) Use os métodos de Hamilton e Jacobi, para obter o movimento do cilindro e compare com a parte (*b*).

12.100. Faça o probl. 7.22 pelos métodos de Hamilton e Jacobi.

12.101. Escreva (*a*) o hamiltoniano e (*b*) as equações de Hamilton, para uma partícula de carga e e massa m, movendo-se em um campo eletromagnético [veja o probl. 11.90].

Resp. (*a*) $H = \dfrac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi$

(*b*) $\mathbf{v} = \dfrac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}),\ \dot{\mathbf{p}} = -e\nabla\Phi + e\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v})$

12.102. (*a*) Obtenha a equação de Hamilton e Jacobi, para o movimento da partícula do probl. 12.101. (*b*) Use o resultado, para escrever as equações para o movimento de uma partícula carregada em um campo eletromagnético.

12.103. (*a*) Escreva o hamiltoniano para um pião simétrico e, assim, obtenha a equação do movimento (*b*) Compare os resultados obtidos em (*a*) com os do cap. 10.

12.104. Prove o teorema 12.2.

12.105. Um átomo consiste em um elétron de carga $-e$ movendo-se em campo de fôrça central $\mathbf{F}$, em torno de um núcleo de carga Ze tal que

$$\mathbf{F} = -\frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor-posição de um elétron relativamente ao núcleo e Z é o número atômico. Na teoria quântica de Bohr do átomo, as integrais de fase são múltiplas inteiras da *constante de Planck h*, i.e.,

$$\oint p_r\,dr = n_1 h, \qquad \oint p_\theta\,d\theta = n_2 h.$$

Usando estas equações, prove que haverá somente um conjunto discreto de níveis de energia dados por

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m Z^2 e^4}{n^2 h^2}$$

onde $n = n_1 + n_2 = 1, 2, 3, 4, \ldots$ é chamado de *número de quantum orbital.*

Apêndice A

Unidades e Dimensões

UNIDADES

Comprimentos padrões, tempos e massas, em termos dos quais outros comprimentos, tempos e massas são medidos, são chamados de *unidades.* Por exemplo, uma distância pode ser medida em termos de *metro* ou *centímetro.* Um intervalo de tempo pode ser medido em termos de *segundo*, *horas* ou *dias.* Uma massa pode ser medida em termos de *quilogramas* ou *gramas.* São possíveis muitos tipos diferentes de unidades. Entretanto, há quatro tipos principais em uso atualmente.

1. O CGS ou sistema centímetro-grama-segundo.
2. O MKS ou sistema metro-quilograma-segundo.
3. O FPS ou sistema pé-libra-segundo.
4. O FSS ou sistema pé-slug-segundo, também chamado de sistema gravitacional inglês.

Os dois primeiros são chamados, algumas vezes, de *sistema métrico*, enquanto os dois últimos são chamados, por vezes, de *sistemas ingleses.* Há uma tendência crescente para o uso dos sistemas métricos.

Aqui estão indicados quatro conjuntos de unidades nestes sistemas que podem ser usados na equação $F = ma$.

Sistema CGS:	F (dinas)	$= m$ (gramas	$\times\ a$ (cm/s^2)
Sistema MKS:	F (newtons)	$= m$ (quilogramas)	$\times\ a$ (m/s^2)
Sistema FPS:	F (poundals)	$= m$ (libras)	$\times\ a$ (pé/s^2)
Sistema FSS:	F (libra-peso)	$= m$ (slugs)	$\times\ a$ (pé/s^2)

Na tabela da pág. 489, são dadas as unidades de vários valores nestes sistemas.

E, na tabela logo a seguir, encontram-se os fatores de conversão de unidades dos vários sistemas.

DIMENSÕES

As dimensões de todos os valores mecânicos podem ser expressos em termos das dimensões fundamentais de comprimento L, massa M e tempo T. Na segunda coluna da tabela seguinte, as dimensões de vários valores físicos são dados.

UNIDADES E DIMENSÕES

Valor físico	Dimensão	Sistema CGS	Sistema MKS	Sistema FPS	Sistema FSS
Comprimento	L	cm	m	ft	ft
Massa	M	g	kg	lb	slug
Tempo	T	s	s	s	s
Velocidade	LT^{-1}	cm/s	m/s	ft/s	ft/s
Aceleração	LT^{-2}	cm/s²	m/s²	ft/s²	ft/s²
Força	MLT^{-2}	g/cm/s² = *dina*	kg m/s² = newton	lb ft/s² = poundal	slug ft/s² = lbwt
Momento, Impulso	MLT^{-1}	g cm/s = dina s	kg m/s = N s	lb ft/s = pdl s	slug ft/s = lbwt s
Energia, Trabalho	ML^2T^{-2}	g cm²/s² = dina cm = erg	kg m²/s² = N m = joule	lb ft²/s² = ft pdl	slug ft²/s² = ft lbwt
Potência	ML^2T^{-3}	g cm²/s² = dina cm/s = erg/s	kg m²/s² = joule/s = watt	lb ft²/s³ = ft pdl/s	slug ft²/s³ = ft lbwt/s
Volume	L^3	cm³	m³	ft³	ft³
Densidade	ML^{-3}	g/cm³	kg/m³	lb/ft³	slug/ft³
Ângulo	—	radiano (rad)	rad	rad	rad
Velocidade angular	T^{-1}	rad/s	rad/s	rad/s	rad/s
Aceleração angular	T^{-2}	rad/s²	rad/s²	rad/s²	rad/s²
Torque	ML^2T^{-2}	g cm²/s² = dina cm	kg m²/s² = N m	lb ft²/s² = ft pdl	slug ft²/s² = ft lbwt
Momento angular	MLT^{-1}	g cm²/s	kg m²/s	lb ft²/s	slug ft²/s
Momento de inércia	ML^2	g cm²	kg m²	lb ft²	slug ft²
Pressão	$ML^{-1}T^{-2}$	gr/(cm s²) = dina/cm²	kg/(m s²) = N m²	pdl/ft²	lbw/ft²

FATORES DE CONVERSÃO

Comprimento

1 quilômetro (km) = 1000 metros
1 metro (m) = 100 centímetros
1 centímetro (cm) = 10^{-2} m
1 milímetro (mm) = 10^{-3} m
1 mícron (μ) = 10^{-6} m
1 milimícron ($m\mu$) = 10^{-9} m
1 angstrom (A) = 10^{-10} m
1 polegada (in) = 2,540 cm
1 pé (ft) = 30,48 cm
1 milha (mi) = 1,609 km
1 mil = 10^{-3} in
1 centímetro = 0,3937 in
1 metro = 39,37 in
1 quilômetro = 0,6214 milha

Área

1 metro quadrado (m²) = 10,76 ft²
1 pé quadrado (ft²) = 929 cm²
1 milha quadrada (mi²) = 640 acres
1 acre = 43,560 ft²

Volume

1 litro (l) = 1000 cm³ = 1057 quarto (qt) = 61,02 in³ = 0,03532 ft³
1 metro cúbico (m³) = 1000 l = 35,32 ft³
1 pé cúbico (ft³) = 7,481 US gal = 0,02832 m³ = 28,32 l;
1 US gallon (gal) = 231 in³ = 3,785 l; 1 British gallon = 1,201 US gallon = 277,4 in³

Massa

1 quilograma (kg) = 2,2046 lb = 0,06852 slug; 1 lb = 453,6 g = = 0,03108 slug
1 slug = 32,74 lb = 14,59 kg

Velocidade

1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6214 mi/h = 0,9113 ft/s
1 mi/h = 1,467 ft/seg = 1,609 km/h = 0,4470 m/s

Densidade

1 g/cm³ = 10^3 kg/m³ = 62,43 lb/ft³ = 1,940 slug/ft³
1 lb/ft³ = 0,01602 g/cm³; 1 slug/ft³ = 0,5154 g/cm³

Força

1 newton (N) = 10^5 dinas = 0,1020 kgf = 0,2248 lbwt
1 libra-peso (lbwt) = 4,448 N = 0,4536 kgf = 32,17 poundals
1 quilograma peso (kgf) = 2,205 lbwt = 9,807 N
1 U.S., peso = 2 000 lbwt; 1 long ton = 2 240 lbwt; 1 t métrica = = 2 205 lbwt

Energia

1 joule = 1 Nm = 10^7 ergs = 0,7376 ft lbwt = 0,2389 cal = 9,481 × × 10^{-4} Btu
1 ft lbwt = 1,356 joules = 0,3239 cal = 1,285 × 10^{-3} Btu
1 caloria (cal) = 4 186 joules = 3 087 ft lbwt = 3 968 × 10^{-3} Btu
1 Btu = 778 ft lbwt = 1 055 joules = 0.293 watt h
1 quilowatt hora (kw h) = 3,60 × 10^6 joules = 860,0 kcal = 3413 Btu
1 elétron volt (eV) = 1,602 × 10^{-19} joule

Potência

1 watt = 1 joule/s = 10^7 ergs/s = 0,2389 cal/s
1 cavalo vapor (cv) 75 kgf.m/s = 1,25 kgf.m/min = 735,5 watts
1 quilowatr (kW) = 1,341 HP = 737,6 ft lbwt/s = 0,9483 Btu/s

Pressão

1 N/m^2 = 10 $dinas/cm^2$ = 9,869 × 10^{-6} atmosfera = 2,089 × 10^{-2} $lbwt/ft^2$
1 $lbwt/in^2$ = 6 895 N/m^2 = 5,171 cm mercúrio = 27,68 in. água
1 atmosfera (atm) = 1,013 × 10^5 N/m^2 = 1,013 × 10^6 $dinas/cm^2$ = 76 cm mercúrio = 406,8 in. água

Ângulo

1 radiano (rad) = 57,296°; 1° = 0,017453 rad

Apêndice B

Dados Astronômicos

O SOL

Massa	4,4 × 10^{30} lb	ou	2,0 × 10^{30} kg
Radiano	4,32 × 10^5 mi	ou	6,96 × 10^5 km
Densidade média	89,2 lb/ft^3	ou	1,42 g/cm^3
Aceleração gravitacional média na superfície	896 ft/s^2	ou	273 m/s^2
Velocidade de escape na superfície	385 mi/s	ou	620 km/s
Período de rotação em torno do eixo	25,38 dias	ou	2,187 × 10^6 s
Constante gravitacional universal G	1,068 × 10^{-9} $ft^3/lb\text{-}s^2$	ou	6,673 × 10^{-8} $cm^3/g\text{-}s^2$

A LUA

Distância média à Terra	239 × 10^3 mi	ou	3,84 × 10^5 km
Período de rotação em torno da terra	27,3 dias	ou	2,36 × 10^6 s
Raio equatorial	1080 mi	ou	1738 km
Massa	1,63 × 10^{23} lb	ou	7,38 × 10^{22} kg
Densidade média	208 lb/ft^3	ou	3,34 g/cm^3
Aceleração gravitacional média na superfície Velocidade de escape	5,30 ft/s^2 1,48 mi/s	ou ou	1,62 m/s^2 2,38 km/s
Período de rotação em torno do eixo	27,3 dias	ou	2,36 × 10^6 s
Velocidade orbital	0,64 mi/s	ou	1,02 km/s
Excentricidade orbital	0,055		

OS PLANETAS

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno	Plutão
Distância média ao sol	$36{,}2 \times 10^6$ mi $58{,}2 \times 10^6$ km	$67{,}2 \times 10^6$ mi 108×10^6 km	$92{,}9 \times 10^6$ mi 150×10^6 km	141×10^6 mi 227×10^6 km	484×10^6 mi 778×10^6 km	887×10^6 mi 1427×10^6 km	1784×10^6 mi 2871×10^6 km	2795×10^6 mi 4498×10^6 km	3670×10^6 mi 5910×10^6 km
Período de rotação em torno do sol	88,0 dias 0,241 anos	224,7 dias 0,615 anos	365,26 dias 1,000 anos	687,0 dias 1,88 anos	4333 dias 11,86 anos	10,760 dias 29,46 anos	30,690 dias 84,0 anos	60,180 dias 164,8 anos	90,730 dias 248,4 anos
Raio equatorial	1500 mi 2420 km	3850 mi 6200 km	3963 mi 6378 km	2110 mi 3400 km	44,370 mi 71,400 km	37,500 mi 60,400 km	14,800 mi 23,800 km	13,900 mi 22,300 km	1850 mi 2960 km
Massa	$0{,}071 \times 10^{25}$ lb $0{,}32 \times 10^{24}$ kg	$1{,}1 \times 10^{25}$ lb $4{,}9 \times 10^{24}$ kg	$1{,}32 \times 10^{25}$ lb $5{,}98 \times 10^{24}$ kg	$0{,}14 \times 10^{25}$ lb $0{,}64 \times 10^{24}$ kg	420×10^{25} lb 1900×10^{24} kg	126×10^{25} lb 570×10^{24} kg	19×10^{25} lb 87×10^{24} kg	$22{,}7 \times 10^{25}$ lb 103×10^{24} kg	$1{,}2 \times 10^{25}$ lb $5{,}4 \times 10^{24}$ kg
Densidade média	330 lb/ft^3 5,3 gm/cm^3	306 lb/ft^3 4,95 gm/cm^3	340 lb/ft^3 5,52 gm/cm^3	247 lb/ft^3 3,95 gm/cm^3	81 lb/ft^3 1,33 gm/cm^3	44 lb/ft^3 0,70 gm/cm^3	100 lb/ft^3 1,56 gm/cm^3	144 lb/ft^3 2,28 gm/cm^3	250 lb/ft^3 4,0 gm/cm^3
Aceleração gravitacional média na superfície	12 ft/s^2 3,6 m/s^2	28 ft/s^2 8,5 m/s^2	32,2 ft/s^2 9,81 m/s^2	12,5 ft/s^2 3,8 m/s^2	85 ft/s^2 26,0 m/s^2	37 ft/s^2 11,2 m/s^2	31 ft/s^2 9,4 m/s^2	49 ft/s^2 15,0 m/s^2	26 ft/s^2 8,0 m/s^2
Velocidade de escape	2,6 mi/s 4,2 km/s	6,3 mi/s 10,2 km/s	7,0 mi/s 11,2 km/s	3,1 mi/s 5,0 km/s	38 mi/s 5,0 km/s	23 mi/s 61 km/s	14 mi/s 37 km/s	16 mi/s 25 km/s	6 mi/s 10 km/s
Período de rotação em torno do eixo	88 dias $7{,}58 \times 10^6$ s	30 dias (aproximado)	23,93 hr 86,164 s	24,61 hr 88,580 s	9,84 hr 35,430 s	10,23 hr 35,430 s	10,8 hr 38,900 s	15,7 hr 56,400 s	16,0 hr 57,600 s
Velocidade orbital	29,8 mi/s 47,9 km/s	21,8 mi/s 35,1 km/s	18,5 mi/s 29,8 km/s	15,0 mi/s 24,1 km/s	8,12 mi/s 13,1 km/s	6,00 mi/s 9,65 km/s	4,22 mi/s 6,80 km/s	3,38 mi/s 5,44 km/s	2,95 mi/s 4,75 km/s
Excentricidade orbital	0,206	0,0068	0,017	0,093	0,048	0,055	0,047	0,009	0,247

Apêndice C

Soluções de Equações Diferenciais Especiais

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação que tenha derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida é chamada de *equação diferencial*. A ordem da equação diferencial é a ordem da maior derivada ou diferencial que houver na equação. Uma *solução* de uma equação diferencial é uma relação qualquer entre os variáveis que reduzem a equação diferencial a uma identidade.

Exemplo 1.

A equação $\dfrac{dy}{dx} = 2y$ é uma equação diferencial de primeira ordem ou ordem 1. Uma solução desta equação é $y = ce^{2x}$ onde c é uma constante qualquer, pois, substituindo-se isto na equação diferencial, tem-se a identidade

$$2ce^{2x} = 2ce^{2x}$$

Exemplo 2.

A equação $x^2dx + y^3dy = 0$ é uma equação diferencial de primeira ordem. Uma solução é $x^3/3 + y^4/4 = c$, onde c é uma constante qualquer, pois, tomando a diferencial da solução, tem-se:

$$d(x^3/3 + y^4/4) = 0 \text{ ou } \quad x^2\,dx + y^3\,dy = 0$$

Exemplo 3.

A equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x$ é uma equação diferencial de segunda ordem. Uma solução é $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3$, pois

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = (c_1e^x + 4c_2e^{2x}) - 3(c_1e^x + 2c_2e^{2x} + 2) + 2(c_1e^x + c_2e^{2x} + 2x + 3) = 4x$$

Nos exemplos acima, usou-se x como variável independente e y como variável dependente. Entretanto, é claro que podem ser usados outros símbolos, como o têm sido. Assim, por exemplo, a equação diferencial do exemplo 3 poderia ser

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 4t$$

com variável independente t e variável dependente x e solução $x = c_1e^t + c_2e^{2t} + 2t + 3$.

As equações acima são, geralmente, chamadas *equações diferenciais ordinárias*, para distingui-las das *equações diferenciais parciais*, tais como $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ envolvendo duas ou mais variáveis independentes.

CONSTANTES ARBITRÁRIAS. SOLUÇÕES GERAIS E PARTICULARES

Nos exemplos acima, as constantes c, c_1, c_2 podem ter valores quaisquer e são chamadas de *constantes arbitrárias*. Na prática, a equação diferencial de enésima ordem terá uma solução envolvendo exatamente n constantes arbitrárias independentes. Tal solução é chamada *solução geral*. Todos os casos especiais da solução geral obtidas ao se darem valores especiais às constantes são, então, chamadas *soluções particulares*. Assim, no exemplo 3, se considerarmos $c_1 = 5$, $c_2 = -3$ na solução geral $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2x + 3$, obtém-se a solução particular $y = 5e^x - 3e^{2x} + 2x + 3$.

Soluções particulares são achadas, geralmente, a partir de certas condições impostas ao problema e, algumas vezes, são chamadas de *condições limites* ou *iniciais*. No exemplo 3, por exemplo, se se deseja satisfazer as condições $y = 5$ quando $x = 0$ e $y^1 = dy/dx = 1$ quando $x = 0$, obtém-se $c_1 = 5$, $c_2 = -3$.

Um problema, no qual se exige a solução de uma equação diferencial sujeita a condições dadas, é, geralmente, chamado de *problema de valor limite*.

SOLUÇÕES A ALGUMAS EQUAÇÕES ESPECIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

A lista seguinte mostra alguns métodos importantes para achar soluções gerais de equações diferenciais de primeira ordem.

1. *Separação de variáveis*

Se uma equação de primeira ordem puder ser escrita como

$$F(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

então as variáveis são denominadas *separáveis* e a solução geral obtida por integração direta é

$$\int F(x)\,dx + \int G(y)\,dy = c \tag{2}$$

2. *Equações lineares*

Uma equação de primeira ordem é chamada de *linear* se tiver a forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x) \tag{3}$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{\int P\,dx}$, isto pode ser escrito como

$$\frac{d}{dx}\{y\,e^{\int P\,dx}\} = Q\,e^{\int P\,dx}$$

Então, integrando-se, a solução geral é

$$y\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + c$$

ou

$$y = e^{-\int P\,dx}\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + c\,e^{-\int P\,dx} \tag{4}$$

O fator $e^{\int P\,dx}$ é, geralmente, chamado *fator de integração*.

3. *Equação exata*

A equação

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{5}$$

onde M e N são funções de x e y, é chamada *equação diferencial exata*, se $M\,dx + N\,dy$ puder ser expressa como uma diferencial exata dU de uma função $U(x, y)$. Em tal caso, a solução é dada por $U(x, y) = c$.

Uma condição necessária e suficiente para que (5) seja exata é

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{6}$$

Em alguns casos, uma equação diferencial não é exata, mas pode ser transformada em uma exata multiplicando-se tôda ela por uma certa função chamada de fator de integração, como no caso da equação linear.

4. *Equação homogênea*

Se uma equação tiver a forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$

ela é chamada *equação homogênea* e pode ser solucionada pela transformação $y = vx$. Usando istò, (7) fica

$$v + x\frac{dv}{dx} = F(v) \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dv}{F(v) - v} \tag{8}$$

na qual as variáveis foram separadas. Então, a solução geral é

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c \qquad \text{onde} \qquad v = y/x \tag{9}$$

Ocasionalmente, outras transformações, que podem ou não ser evidentes pela forma da equação diferencial, servem para obter a solução geral.

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE ORDEM ELEVADA

A seguinte lista mostra certas equações de ordem maior que um que podem ser, geralmente, resolvidas

1. $\dfrac{d^n y}{dx^n} = F(x)$. Neste caso, a equação pode ser integrada n vezes, para obter

$$y = \int \ldots \int F(x)\, dx^n + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1}$$

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = F\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$. Neste caso, y é oculto e, se for feita a substituição $dy/dx = v$, obtém-se a equação

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v)$$

de primeira ordem. Se esta puder ser resolvida, troca-se v por dy/dx, obtendo-se uma outra equação de primeira ordem, que precisa, então, ser resolvida.

3. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = F\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$. Aqui, x está oculto e, se for feita a substituição $dy/dx = v$, notando-se que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy},$$

a equação dada pode ser escrita como uma equação de primeira ordem

$$v\frac{dv}{dy} = F(y, v)$$

que, então, precisa ser resolvida.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDEM MAIOR QUE UM

Serão consideradas equações diferenciais lineares de segunda ordem. Os resultados podem ser estendidos para equações lineares de ordem maior.

Uma *equação linear de segunda ordem* tem a forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\, y = R(x) \tag{10}$$

Se y_c é a solução geral da equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)\, y = 0, \tag{11}$$

[obtida, trocando-se o lado direito da equação (10) por zero] e, se y_p é uma solução particular qualquer de (10), então a solução geral de (10) é

$$y = y_c + y_p \tag{12}$$

A equação (11) é, geralmente, denominada *equação complementar* e a sua solução geral é chamada *solução complementar*.

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

A solução complementar é facilmente obtida quando $P(x)$ e $Q(x)$ são as constantes A e B, respectivamente. Em tal caso, a equação (11) pode ser escrita

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = 0 \tag{13}$$

Se se considerar como solução $y = e^{\alpha x}$, onde α é constante em (11), achamos que α deve satisfazer a equação

$$\alpha^2 + A\alpha + B = 0$$

Esta equação tem duas raízes, havendo, assim, três casos a considerar:

1. *As raízes são reais e distintas*, $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Neste caso, as soluções são $e^{\alpha_1 x}$ e $e^{\alpha_2 x}$. Assim, $c_1 e^{\alpha_1 x}$ e $c_2 e^{\alpha_2 x}$ também são soluções e a soma $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}$ é a solução geral.

2. *As raízes são reais e iguais*, $\alpha_1 = \alpha_2$

Neste caso, acham-se as soluções $e^{\alpha_1 x}$ e $xe^{\alpha_1 x}$ e a solução geral é $c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 x e^{\alpha_1 x}$.

3. *As raízes são complexas.*

Se A e B são reais, estas raízes complexas são conjugadas, i.e., $a + bi$ e $a - bi$. Em tal caso, as soluções são $e^{(a+bi)x} = e^{ax} e^{bix} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx)$ e $e^{(a-bi)x}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx)$. A solução geral pode ser escrita como $e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx)$.

SOLUÇÕES PARTICULARES

Para achar a solução geral de

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = R(x) \tag{14}$$

deve-se achar uma solução particular desta equação e somá-la à solução geral de (13), obtida acima. Existem dois métodos importantes para conseguir isto.

1. *Método dos coeficientes indeterminados*

Este método pode ser usado somente para funções especiais $R(x)$ tais como polinômios e exponenciais ou funções trigonométricas tendo a forma e^{px}, $\cos^{px}$, sen^{px}, onde P é uma constante, ou somas e produtos de tais funções. Veja os probls. C. 17 e C. 18.

2. *Métodos da variação dos parâmetros.*

Neste método, escreve-se, primeiro, a solução complementar em termos das constantes c_1 e c_2. Depois, trocam-se c_1 e c_2 pelas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ escolhidas de tal maneira que satisfaçam a equação dada. O método é ilustrado no probl. C.19.

Problemas Resolvidos

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. CONSTANTES ARBITRÁRIAS. SOLUÇÕES GERAIS E PARTICULARES

C.1. (*a*) Prove que $y = ce^{-x} + x - 1$ é a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - x + y = 0$$

(*b*) Ache a solução particular, tal que $y = 3$, quando $x = 0$.

(*a*) Se $y = ce^{-x} + x - 1$, então $dy/dx = -ce^{-x} + 1$ e, assim,

$$dy/dx - x + y = (-ce^{-x} + 1) - x + (ce^{-x} + x - 1) = 0$$

Portanto, $y = ce^{-x} + x - 1$ é a solução; e, como ela tem um número de constantes arbitrárias (no caso uma) igual à ordem da equação diferencial, ela é a solução geral.

(*b*) Como $y = 3$ quando $x = 0$, tem-se de $y = ce^{-x} + x - 1$, $3 = c - 1$ ou $c = 4$. Assim, $y = 4e^{-x} + x - 1$ é a solução particular pedida.

C.2. (*a*) Prove que $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ é a solução geral de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = 2\cos t - 4\operatorname{sen} t$$

(*b*) Ache a solução particular tal que $x = 2$, $dx/dt = -3$ em $t = 0$.

(*a*) De $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ tem-se

$$\frac{dx}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos t, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \operatorname{sen} t$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x &= (c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \operatorname{sen} t) + 2(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos t)\\ &\quad - 3(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t)\\ &= 2\cos t - 4\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Assim, $x = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \operatorname{sen} t$ é uma solução; e, como ela tem *duas* constantes arbitrárias, pois a equação diferencial é de ordem *dois*, ela é a solução geral.

(*b*) Do item (*a*), fazendo $t = 0$ nas expressões de x e dx/dt, tem-se

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -3 = c_1 - 3c_2 + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - 3c_2 = -4 \end{cases}$$

Resolvendo, acha-se $c_1 = 1/2$, $c_2 = 3/2$. Então, a solução particular pedida é

$$x = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-3t} + \operatorname{sen} t$$

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

C.3. (*a*) Ache a solução geral de $(x + xy^2)\,dx + (y + x^2y)\,dy = 0$.

(*b*) Ache a solução particular, tal que $y = 2$ quando $x = 1$.

(*a*) Escreva a equação como $x(1 + y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0$. Dividindo por $(1 + x^2)(1 + y^2) \neq 0$ para separar as variáveis, acha-se

$$\frac{x\,dx}{1 + x^2} + \frac{y\,dy}{1 + y^2} = 0 \tag{1}$$

Então, tem-se por integração

$$\int \frac{x\,dx}{1 + x^2} + \int \frac{y\,dy}{1 + y^2} = c_1$$

ou

$$\tfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \tfrac{1}{2}\ln(1 + y^2) = c_1$$

Isto pode ser escrito como $\frac{1}{2}\ln\{(1 + x^2)(1 + y^2)\} = c_1$ ou

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = c_2 \tag{2}$$

que é a solução geral pedida.

(*b*) Como $y = 2$, quando $x = 1$, tem-se, por substituição em (2), $c_2 = 10$; assim, a solução particular pedida é

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = 10 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + x^2y^2 = 9$$

C.4. Resolva $\dfrac{dR}{dt} = R^2t^2$ considerando $R = 1$ quando $t = 1$.

Separando as variáveis, tem-se $\dfrac{dR}{R^2} = t^2\,dt$. Integrando ambos os lados,

$$-\frac{1}{R} = \frac{t^3}{3} + c$$

Substituindo $t = 1$, $R = 1$, acha-se $c = -4/3$. Assim,

$$-\frac{1}{R} = \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad R = \frac{3}{4 - t^3}$$

EQUAÇÃO LINEAR

C.5. Resolva $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x^3 + x$ considerando $y = 2$ em $x = 0$

Está é uma equação linear da forma (3) [veja introdução deste capítulo] com $P = 2x$, $Q = x^3 + x$. Um fator de integração é $e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Multiplicando-se a equação dada por este fator, acha-se

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = (x^3 + x)e^{x^2}$$

que pode ser escrita

$$\frac{d}{dx}(y\,e^{x^2}) = (x^3 + x)e^{x^2}$$

Integrando, $$y e^{x^2} = \int (x^3 + x)e^{x^2}\,dx + c$$

ou, fazendo a substituição $v = x^2$ na integral,

$$y e^{x^2} = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} + c$$

Assim, $$y = \tfrac{1}{2}x^2 + ce^{-x^2}$$

Como $y = 2$ quando $x = 0$, acha-se $c = 2$. Assim,

$$y = \tfrac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}$$

Confirmação: Se $y = \frac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}$, então, $dy/dx = x - 4xe^{-x^2}$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x - 4xe^{-x^2} + 2x(\tfrac{1}{2}x^2 + 2e^{-x^2}) = x^3 + x$$

C.6. Resolva $\dfrac{dU}{dt} = 3U + 1$ considerando $U = 0$ em $t = 0$.

Escrevendo a equação na forma

$$\frac{dU}{dt} - 3U = 1 \qquad (1)$$

vê-se que ela é linear com fator de integração $e^{\int -3\,dt} = e^{-3t}$. Multiplicando (1) por e^{-3t}, ela pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}(Ue^{-3t}) = e^{-3t}$$

Integrando, tem-se

$$Ue^{-3t} = -\tfrac{1}{3}e^{-3t} + c$$

Como $U = 0$ quando $t = 0$, obtém-se $c = \frac{1}{3}$. Assim,

$$Ue^{-3t} = -\tfrac{1}{3}e^{-3t} + \tfrac{1}{3} \quad \text{ou} \quad U = \tfrac{1}{3}(e^{3t} - 1) \qquad (2)$$

Um outro método. A equação pode ser resolvida pelo método da separação de variáveis. Assim, tem-se

$$\frac{dU}{3U + 1} = dt$$

Integrando, $$\tfrac{1}{3}\ln(3U + 1) = t + c$$

Como $U = 0$ quando $t = 0$, acha-se $c = 0$ tal que $\frac{1}{3}\ln(3U + 1) = t$. Assim, $U = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$.

EQUAÇÕES EXATAS

C.7. Resolva $(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\operatorname{sen} x - 4y^3)\,dy = 0$.

Comparando com $M\,dx + N\,dy = 0$, tem-se $M = 3x^2 + y\cos x$, $N = \operatorname{sen} x - 4y^3$. Então, $\partial M/\partial y = \cos x = \partial N/\partial x$ e, assim, a equação é exata. Dois métodos de solução são possíveis.

Método 1.

Como a equação é exata, o lado esquerdo deve ser uma diferencial exata de uma função U. Agrupando-se os termos, a equação pode ser escrita como

$$3x^2\,dx + (y\cos x\,dx + \operatorname{sen} x\,dy) - 4y^3\,dy = 0$$

i.e., $\quad d(x^3) + d(y\operatorname{sen} x) + d(-y^4) = 0 \quad$ ou $\quad d(x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4) = 0$

Por integração, obtém-se a solução pedida, $x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4 = c$.

Método 2.

A equação dada pode ser escrita como

$$(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\operatorname{sen} x - 4y^3)\,dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Deve-se ter, então,

$$(1)\ \frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + y\cos x \qquad (2)\ \frac{\partial U}{\partial y} = \operatorname{sen} x - 4y^3$$

Integrando-se (1) em relação a x, mantendo y constante, tem-se

$$U = x^3 + y\operatorname{sen} x + F(y)$$

Então, substituindo isto em (2), acha-se

$$\operatorname{sen} x + F'(y) = \operatorname{sen} x - 4y^3 \quad \text{ou} \quad F'(y) = -4y^3$$

onde $F'(y) = dF/dy$. Integrando, omitindo a constante de integração, tem-se $F(y) = -y^4$ tal que

$$U = x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4$$

Então, a equação diferencial dada pode ser escrita como

$$dU = d(x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4) = 0$$

e, assim, a solução é $x^3 + y\operatorname{sen} x - y^4 = c$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

C.8. Resolva $\dfrac{dy}{dx} = e^{y/x} + \dfrac{y}{x}$.

Seja $y = vx$. Então a equação pode ser escrita como

$$v + x\frac{dv}{dx} = e^v + v \quad \text{ou} \quad x\frac{dv}{dx} = e^v$$

Separando as variáveis, $\dfrac{dx}{x} = e^{-v}dv$. Integrando-se, $\ln x = -e^{-v} + c$. Assim, a solução geral é $\ln x + e^{-y/x} = c$.

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE ALTAS ORDENS

C.9. Resolva $\dfrac{d^2U}{dt^2} = 1 + \cos t$ onde $U = 2$, $dU/dt = 3$ em $t = 0$.

Integrando-se uma vez,

$$dU/dt = t + \operatorname{sen} t + c_1$$

Então, como $dU/dt = 3$ em $t = 0$, acha-se $c_1 = 3$. Assim,

$$dU/dt = t + \operatorname{sen} t + 3$$

Integrando de novo

$$U = \tfrac{1}{2}t^2 - \cos t + 3t + c_2$$

Ora, como $U = 2$ em $t = 0$, acha-se $c_2 = 3$. A solução pedida é

$$U = \tfrac{1}{2}t^2 - \cos t + 3t + 3$$

C.10. Resolva $xy'' + 2y' = x^2$, onde $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$.

Como y está oculto, seja $y' = dy/dx = v$. Então, a equação pode ser escrita como

$$(1)\ x\frac{dv}{dx} + 2v = x^2 \quad \text{ou} \quad (2)\ \frac{dv}{dx} + \frac{2}{x}v = x$$

Esta é uma equação linear em v com fator de integração $e^{\int (2/x)\,dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$. Multiplicando-se (2) por x^2, ela pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(x^2 v) = x^3$$

Então, por integração, $x^2 v = x^4/4 + c_1$ ou

$$v = dy/dx = x^2/4 + c_1/x^2$$

Integrando de novo, $y = x^3/12 - c_1 x + c_2$.

C.11. Resolva $yy'' + (y')^2 = 0$, onde $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$.

Como x está oculto, seja $y' = dy/dx = v$. Então,

$$y'' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

e a equação dada por ser escrita como

$$yv\frac{dv}{dy} + v^2 = 0 \quad \text{ou} \quad v\left(y\frac{dv}{dy} + v\right) = 0$$

tal que $\quad (1)\ v = 0 \quad \text{ou} \quad (2)\ y\dfrac{dv}{dy} + v = 0$

De (1), $y' = 0$ ou $y = c_1$. De (2) $\dfrac{dv}{v} + \dfrac{dy}{y} = 0$, i.e., $\ln v + \ln y = c_2$ ou $\ln(vy) = c_2$ tal que $vy = c_3$ e

$$v = dy/dx = c_3/y \quad \text{ou} \quad y\,dy = c_3\,dx$$

Integrando, $\quad y^2/2 = c_3 x + c_4 \quad$ ou $\quad y^2 = Ax + B$

Assim, as soluções são $y = c_1$ e $y^2 = Ax + B$. Como a primeira é um caso particular da segunda, a solução geral pedida pode ser escrita como $y^2 = Ax + B$.

EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES

C.12. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = 0$.

Fazendo $y = e^{\alpha x}$ na equação, obtém-se

$$(\alpha^2 - 4\alpha - 5)e^{\alpha x} = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 - 4\alpha - 5 = 0$$

Assim, $(\alpha - 5)(\alpha + 1) = 0$ e $\alpha = 5, -1$. Então, as soluções são e^{5x} e e^{-x} e a solução geral é $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$.

C.13. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$.

Substituindo-se $y = e^{\alpha x}$, acha-se $\alpha^2 + 10\alpha + 25 = 0$, i.e. $(\alpha + 5)(\alpha + 5) = 0$, ou $\alpha = -5, -5$. Como a raiz é dupla, as soluções são e^{-5x} e xe^{-5x}. Então, a solução geral é $y = c_1 e^{-5x} + c_2 x e^{-5x}$.

C.14. Resolva $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 4x = 0$.

Fazendo-se $x = e^{\alpha t}$, acha-se $\alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$ ou $\alpha = -2, -2$. Então, a solução geral é $x = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$.

C.15. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$.

Substituindo-se $y = e^{\alpha x}$ acha-se $\alpha^2 + 2\alpha + 5 = 0$ ou $\alpha = -1, \pm 2i$. Então, as soluções são $e^{(-1+2i)x} = e^{-x}e^{2ix} = e^{-x}(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$ e $e^{(-1-2i)x} = e^{-x}e^{-2ix} = e^{-x}(\cos 2x - i \operatorname{sen} 2x)$. A solução geral é $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x)$.

C.16. Resolva $d^2y/dx^2 + \omega^2 y = 0$.

Substituindo-se $y = e^{\alpha x}$, acha-se $\alpha^2 + \omega^2 = 0$ ou $\alpha = \pm i\omega$. Então, as soluções são $e^{i\omega x} = \cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x$ e $e^{-i\omega x} = \cos \omega x - i \operatorname{sen} \omega x$. Assim, a solução geral é $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \operatorname{sen} \omega x$.

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

C.17. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} - 5y = x^2 + 2e^{3x}$.

Pelo probl. C.12, a solução complementar, i.e. a solução geral, de

$$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}-5y=0$$

é

$$y_c = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} \qquad (1)$$

Como o lado direito da equação dada contém um polinômio de segundo grau (i.e. x^2) e uma exponencial ($2e^{3x}$), usa-se como tentativa para solução

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} \qquad (2)$$

onde A, B, C, D são constantes a serem determinadas.

Substituindo (2) por y na equação dada e simplificando, acha-se

$$(2A-4B-5C) + (-8A-5B)x - 5Ax^2 - 8De^{3x} = x^2 + 2e^{3x}$$

Como esta deve ser uma identidade, deve-se ter

$$2A-4B-5C=0, \quad -8A-5B=0, \quad -5A=1, \quad -8D=2$$

Resolvendo, acha-se $A=-\frac{1}{5}$, $B=\frac{8}{25}$, $C=-\frac{42}{125}$, $D=-\frac{1}{4}$. Então, de (2),

$$y_p = -\tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{8}{25}x - \tfrac{42}{125} - \tfrac{1}{4}e^{3x}$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = y_c + y_p = c_1e^{5x} + c_2e^{-x} - \tfrac{1}{5}x^2 + \tfrac{8}{25}x - \tfrac{42}{125} - \tfrac{1}{4}e^{3x}$$

que pode ser conferida por substituição direta.

C.18. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 20\cos 2x$.

A solução complementar [pelo probl. C.13] é

$$y_c = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} \qquad (1)$$

Como o membro direito tem o termo $\cos 2x$ pode-se solucionar por tentativas; tendo-se como uma primeira

$$y_p = A\cos 2x + B\,\text{sen}\,2x \qquad (2)$$

Substituindo, na equação dada, após simplificação,

$$(21A + 20B)\cos 2x + (21B-20A)\,\text{sen}\,2x = 20\cos 2x$$

Equacionando os coeficientes de termos semelhantes, tem-se $21A + 20B = 20$, $21B-20A=0$. Resolvendo, acha-se $A=\frac{420}{841}$, $B=\frac{400}{841}$ tal que a solução particular seja

$$y_p = \tfrac{420}{841}\cos 2x + \tfrac{400}{841}\,\text{sen}\,2x$$

e a solução geral da equação dada é

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} + \tfrac{420}{841}\cos 2x + \tfrac{400}{841}\,\text{sen}\,2x$$

MÉTODO DOS PARÂMETROS VARIÁVEIS

C.19. Resolva $d^2y/dx^2 + y = \text{tg}\,x$.

A solução complementar é a do probl. C.16, com $\omega = 1$:

$$y_c = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x \qquad (1)$$

Ora, considerando-se que a solução da equação dada tenha a forma

$$y = f_1\cos x + f_2\,\text{sen}\,x \qquad (2)$$

onde f_1 e f_2 são funções de x. De (2) tem-se, usando-se plicas (') para representar a diferenciação em relação a x,

$$dy/dx = -f_1\,\text{sen}\,x + f_2\cos x + f_1'\cos x + f_2'\,\text{sen}\,x \qquad (3)$$

Antes de achar d^2y/dx^2, observe que, como há duas funções, f_1 e f_2 para serem determinadas e somente uma relação a ser satisfeita [a equação diferencial deve ser satisfeita] pode-se impor uma relação qualquer entre f_1 e f_2. Escolhendo a relação

$$f_1'\cos x + f_2'\,\text{sen}\,x = 0 \qquad (4)$$

e, assim, simplificando (3) que fica

$$dy/dx = -f_1\,\text{sen}\,x + f_2\cos x \qquad (5)$$

Uma outra diferenciação, então, leva a

$$d^2y/dx^2 = -f_1\cos x - f_2\,\text{sen}\,x - f_1'\,\text{sen}\,x + f_2'\cos x \qquad (6)$$

De (2) e (6), vê-se que a equação diferencial dada pode ser escrita como

$$d^2y/dx^2 + y = -f_1'\,\text{sen}\,x + f_2'\cos x = \text{tg}\,x \qquad (7)$$

Assim,

$$-f_1'\,\text{sen}\,x + f_2'\cos x = \text{tg}\,x \qquad (8)$$

De (4) e (8), acha-se $f_1' = -\text{sen}^2 x/\cos x$, $f_2' = \text{sen}\,x$. E, portanto,

$$f_1 = -\int\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}dx = -\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = -\int(\sec x - \cos x)\,dx$$

$$= -\ln(\sec x + \text{tg}\,x) + \text{sen}\,x + c_1$$

$$f_2 = \int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + c_2$$

Substituindo em (2), acha-se a solução geral pedida,

$$y = c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x - \cos x\ln(\sec x + \text{tg}\,x)$$

Problemas Propostos

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. CONSTANTES ARBITRÁRIAS. SOLUÇÕES GERAIS E PARTICULARES

C.20. Verifique a solução de cada uma das seguintes equações diferenciais.

(*a*) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}+x=t;\ x=(c_1+c_2t)e^t+t+2$

(*b*) $t\dfrac{dU}{dt}+U=t^2;\ t^3-3tU=c$

C.21. (*a*) Mostre que $z=e^{-t}(c_1 \operatorname{sen} t+c_2\cos t)$ é a solução geral de

$$\frac{d^2z}{dt^2}+2\frac{dz}{dt}+2z=0$$

(*b*) Determine a solução particular tal que $z=-2$ e em $t=0$.

Resp. (*b*) $z=e^{-t}(3\operatorname{sen} t-2\cos t)$

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

C.22. Resolva $dy/dx=-2xy$ para $y=0$ em $x=0$.
Resp. $y=4e^{-x^2}$.

C.23. Resolva $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{t\sqrt{1-z^2}}{z\sqrt{1-t^2}}$.
Resp. $\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-z^2}=c$.

C.24. Resolva $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x$ para $y(1)=5$.
Resp. $y=6x^2-x$

C.25. Resolva $(x+2y)\,dx+(2x-5y)\,dy=0$. para $y=1$ em $x=2$.
Resp. $x^2+4xy-5y^2=7$.

C.26. Resolva $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$.
Resp. $\ln x+(x/y)=c$

C.27. Resolva $(ye^x-e^{-y})\,dx+(xe^{-y}+e^x)\,dy=0$.
Resp. $ye^x-xe^{-y}=c$.

C.28. Resolva $(x+xy)\,dx+(xy+y)\,dy=0$.
Resp. $(x+1)(y+1)=ce^{x+y}$

C.29. Mostre que a equação diferencial $(4y-x^2)\,dx+x\,dy=0$ tem um fator de integração que depende de uma variável somente e, depois, resolva a equação.
Resp. $x^4y-\frac{1}{6}x^6=c$.

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DE ORDENS ELEVADAS

C.30. Resolva $d^2U/dt^2=t+e^{-t}$ para $U=3$, $dU/dt=2$ em $t=0$.
Resp. $U=\frac{1}{6}t^3+e^{-t}+3t+2$

C.31. Resolva $x\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=x^2$.
Resp. $y=-\frac{1}{3}x^3+c_1x^4+c_2$.

C.32. Resolva $U\dfrac{d^2U}{dt^2}+2\left(\dfrac{dU}{dt}\right)^2=0$.
Resp. $U^3=c_1t+c_2$

C.33. Resolva $\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3=\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2$.
Resp. $(x-A)^2+(y-B)^2=1$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE ORDENS ELEVADAS

C.34. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-8y=0$.
Resp. $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-2x}$

C.35. Resolva $\dfrac{d^2U}{dt^2}+4\dfrac{dU}{dt}+4U=0$ para $U=1$, $dU/dt=0$ em $t=0$
Resp. $U=(1+2t)e^{-2t}$.

C.36. Resolva $\dfrac{d^2z}{dt^2}+4\dfrac{dz}{dt}+5z=0$.
Resp. $z=e^{-2t}(c_1\cos t+c_2\operatorname{sen} t)$.

C.37. Resolva $4\dfrac{d^2y}{dx^2}+25y=0$ para $y(0)=10$, $y'(0)=25$.
Resp. $y=10\,(\cos\frac{5}{2}x+\operatorname{sen}\frac{5}{2}x)$

C.38. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}-y=0$.
Resp. $y=e^{2x}(c_1e^{\sqrt{5}x}+c_2e^{-\sqrt{5}x})$.

C.39. Resolva $4y''-20y'+25y=0$.
Resp. $(c_1+c_2x)e^{5x/2}$.

C.40. Resolva $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-3x}$.

Resp. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-3x}$.

C.41. Resolva $\dfrac{d^2U}{dt^2} + \dfrac{dU}{dt} - 2U = 6t - 10\cos 2t + 5$.

Resp. $U = c_1e^{-2t} + c_2e^{t} - 3t - 4 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{2}\cos 2t$.

C.42. Resolva $y'' + y = \sec x$, usando o método dos parâmetros variáveis.

Resp. $y = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x \operatorname{sen} x - \cos x \ln \sec x$.

C.43. Resolva (*a*) o probl. C.40 e (*b*) o probl. C.41 pelo método dos parâmetros variáveis.

C.44. Resolva cada uma das seguintes equações por um método qualquer

(*a*) $y'' - 5y' + 6y = 50 \operatorname{sen} 4x$ (*c*) $y'' + 4y = \operatorname{cosec} 2x$

(*b*) $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}$ (*d*) $y'' + 8y' + 25y = 25x + 33 + 18e^{-x}$

Resp. (*a*) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + 2\cos 4x - \operatorname{sen} 4x$

(*b*) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{4}xe^{-x}$

(*c*) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x \ln(\operatorname{cosec} 2x)$

(*d*) $y = e^{-4x}(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x) + x + 1 + e^{-x}$

C.45. Resolva $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

Resp. $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$.

C.46. Resolva simultaneamente $dx/dt + y = e^t$, $x - dy/dt = t$.

Resp. $x = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}e^t + t$,

$y = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t + \frac{1}{2}e^t - 1$.

C.47. Resolva $y'' + y = 4\cos t$ com $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$. O método dos coeficientes indeterminados é aplicável? Explique.

Resp. $y = 2\cos t - \operatorname{sen} t + 2t \operatorname{sen} t$

C.48. Mostre como resolver as equações lineares de ordem maior que dois, achando a solução geral de

(*a*) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 36x$, (*b*) $y^{(iv)} + 2y'' + y = x^2$.

Resp. (*a*) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - 6x - 11$

(*b*) $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x) + x^2 - 4$

Apêndice D

Índice de Símbolos Especiais e Notações

A lista a seguir mostra os símbolos especiais e notações usadas neste livro. As letras em negrito simbolizam vetores. Os casos em que um símbolo tenha mais de um significado serão discernidos pelo texto.

SÍMBOLOS

a	comprimento do semi-eixo maior de elipse ou hipérbole
a_n	coeficientes co-senoidais de Fourier
$\mathbf{a}$	aceleração
$\mathbf{a}_{P_2/P_1}$	aceleração da partícula P_2 em relação à partícula P_1
A	área
$\mathbf{A}$	potencial vetorial de campo eletromagnético
$\dot{\mathbf{A}}$	velocidade de área
$\mathscr{A}$	amplitude de oscilação estacionária
$\mathscr{A}_{\max}$	máxima amplitude de oscilação estacionária
b	comprimento do semi-eixo menor de elipse ou hipérbole
b_n	coeficientes senoidais de Fourier
$\mathbf{B}$	Intensidade de campo magnético
$\mathbf{B}$	vetor unitário binormal
c	velocidade da luz
C	curva
D_F, D_M	operador de derivação temporal em sistemas fixos e móveis, respectivamente
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	vetores unitários
E	energia total
$\mathbf{E}$	intensidade de campo elétrico
	força devida ao atrito
$\mathbf{f}_{\nu\lambda}$	fôrça interna sôbre a partícula ν devida à particula λ
f	frequência
f_a	frequências
$\mathbf{F}$	fôrça
$\mathbf{F}_{12}$	fôrça da partícula 1 sôbre a partícula 2
$\mathbf{F}_{av}$	fôrça média
$\mathbf{F}_D$	fôrça de amortecimento
$\mathbf{F}_\nu$	fôrças impulsivas

$\mathbf{F}_\nu^{(c)}, \mathbf{F}_\nu^{(c)}$	forças reais e de restrição, atuantes sobre a partícula ν, respectivamente
$\mathscr{F}_\alpha$	Impulso generalizado
$\mathscr{F}_\nu$	força (externa e interna) atuante sobre a partícula ν de um sistema de partículas
$\mathbf{g}$	aceleração da gravidade
G	constante gravitacional
$\mathscr{G}$	função geratriz
h	constante de Planck
H	Hamiltoniano
$\mathscr{H}$	Hamiltoniano sob uma transformação canônica
$\mathbf{i}$	vetor unitário na direção positiva do eixo x, 3
I	momento de inércia
I_c	momento de inércia, em torno do eixo que passa por dentro de massa
I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}	momento de inércia em torno dos eixos x, y, z, respectivamente
I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}	produtos de inércia
I_1, I_2, I_3	momento principais de inércia
$\mathscr{I}_\nu$	impulsos
$\mathscr{I}$	impulso angular
$\mathbf{j}$	vetor unitário na direção positiva do eixo y, 3.
J_α	Integral de fase ou variável de ação
$\mathbf{k}$	vetor unitário na direção positiva do eixo z
K	raio de giração
l	comprimento
L	lagrangeano
$\mathscr{L}$	lagrangeano sob uma transformação canônica
m	massa
m_0	massa em repouso,
M	massa total de um sistema de partículas
n	número de graus de liberdade
n	número de quantum orbital
N	componente normal de força de reação
N	número de partículas em um sistema
$\mathbf{N}$	normal unitária
p_α	momentos generalizados ou conjugados
$\mathbf{p}$	momentum
P	período
P_α	momentos generalizados posteriores sob uma transformação canônica
$\mathscr{P}$	potência
q	carga elétrica
q_α	coordenadas generalizadas
Q_α	coordenadas generalizadas posteriores, sob uma transformação canônica
r	coordenada esférica
$\mathbf{r}$	vetor de posição
$\bar{\mathbf{r}}$	vetor de posição do centro de massas
$\mathbf{r}_1$	vetor unitário na direção radial
$\mathbf{r}'_\nu$	vetor de posição de partícula ν relativamente ao centro de massa
R	raio de curvatura
R	alcance
R_{max}	alcance máximo

$\mathbf{R}$	força resistiva
$\mathbf{R}$	resultante de forças
$\mathscr{R}$	corpo rígido
$\mathscr{R}$	função de Routh ou routhiniano
s	comprimento de arco
$\mathbf{s}$	velocidade angular de rotação em torno de si mesmo
S	função geratriz
$\mathscr{S}$	função geratriz dependendo das coordenadas de posição anteriores e momentos posteriores
t	tempo
T	energia cinética
$\mathbf{T}$	tensão
$\mathbf{T}$	vetor unitário tangente
$\mathscr{T}$	função geratriz dependente de coordenadas de posição anteriores e posteriores
$\mathscr{U}$	função geratriz dependente de coordenadas posteriores e momentos anteriores
v_{lim}	velocidade escalar limite
v_{max}, v_{min}	velocidades orbitais escalares máxima e mínima, respectivamente
$\mathbf{v}$	velocidade
$\bar{\mathbf{v}}$	velocidade do centro de massa
v_{P_2/P_1}	velocidade da partícula P_2 em relação à partícula P_1
$\mathbf{v}'_\nu$	velocidade da partícula ν relativamente ao centro de massa
$\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}'_{12}$	velocidades relativas de partículas ao longo de uma normal comum, antes e após o impacto
V	energia potencial ou potencial
$\mathscr{V}$	função geratriz dependente de momentos anteriores e posteriores
ω_α	variáveis angulares
W	trabalho
$\mathbf{W}$	peso
y_c	solução complementar
y_p	solução particular
Y	deslocamento transversal de um fio vibrante
z	coordenada cilíndrica
Z	número atômico

SÍMBOLOS GREGOS

α	ângulo entre o vetor e a direção positiva do eixo x
α	índice de somatória
α	aceleração angular
β	ângulo entre o vetor e a direção positiva do eixo y
β	constante de amortecimento
β	razão de velocidade escalar da partícula pela velocidade escalar da luz, i.e. v/c
γ	ângulo entre o vetor e a direção positiva do eixo z
δ	decremento logarítmico
δ	símbolo de variação
$\delta_{\alpha\beta}$	delta de Kronecker

Δ	determinante
ε	coeficiente de restituição
ε	excentricidade
θ	coordenada cilíndrica
θ	ângulo de Euler
θ	coordenada polar
θ	coordenada esférica
θ_1	vetor unitário perpendicular à direção radial
κ	curvatura
κ	constante de mola
λ	co-latitude
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2, \ldots$	multiplicadores de Lagrange
$\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$	componentes de torque ao longo dos eixos principais
Λ	torque ou momento
Λ_C	torque ou momento em torno do centro de massa
μ	coeficiente de atrito
μ	massa reduzida
ν	índice de somatória
ρ	coordenada cilíndrica
ρ	densidade no espaço de fase
σ	densidade
σ	torção
τ	raio de torsão
τ	tempo
τ	volume
ϕ	ângulo de Euler
ϕ	ângulo de fase
ϕ	coordenada esférica
Φ	potencial escalar
Φ_α	força generalizada
ω	velocidade angular escalar
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	componentes da velocidade angular ao longo dos eixos principais
$\boldsymbol{\omega}$	velocidade angular vetorial
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$	componentes do momento angular ao longo dos eixos x, y e z
$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$	componentes do momento angular ao longo dos eixos principais
$\boldsymbol{\Omega}$	momento angular

NOTAÇÕES

$\lvert \mathbf{A} \rvert$	magnitude de $\mathbf{A}$
$\overline{AB}$	magnitude da distância de A a B
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	produto escalar de A por B
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	produto vetorial de A por B
$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$	produto escalar triplo
$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$	produto vetorial triplo
$\mathbf{A}(u)$	função vetorial de u
$\mathbf{A}(x, y, z)$	função vetorial de x, y, z
$\phi(u)$	função escalar de u
$\phi(x, y, z)$	função escalar de x, y, z

$\dot{\mathbf{A}}, \ddot{\mathbf{A}}$	derivada temporal de $\mathbf{A}$, i.e., $d\mathbf{A}/dt$, $d^2\mathbf{A}/dt^2$
$\int \mathbf{A}(u)\,du$	integral indefinida de $\mathbf{A}(u)$
$\int_\alpha^\beta \mathbf{A}(u)\,du$	integral definida de $\mathbf{A}(u)$
$\int_C$	integral ao longo da curva C
$\oint$	integral ao longo de uma trajetória fechada
∇	operador del
$\nabla\phi = \text{grad}\ \phi$	gradiente de ϕ
$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div}\, \mathbf{A}$	divergente de $\mathbf{A}$
$\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot}\, \mathbf{A}$	rotacional de $\mathbf{A}$
$f(r)$	magnitude da força central
$[F, G]$	colchete de Poisson de F e G

Índice Analítico

impresso na
planimpress gráfica e editora
rua anhaia, 247 - s.p.